МАТЕМАТИКА ПОСЛЕ УРОКОВ

М. Б. БАЛК, Г. Д. БАЛК

МАТЕМАТИКА ПОСЛЕ УРОКОВ

Пособие для учителей

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ» МОСКВА 1971

Б 20
51(07)

*Рекомендована к изданию
Учебно-методическим советом
Министерства просвещения РСФСР.*

Балк М. Б. и Балк Г. Д.

Б 20 Математика после уроков. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1971.

462 с.

Пособие содержит интересный материал для внеклассной работы по математике и методические указания к нему.

$\frac{2-2-2}{155-69}$ 51 (07)

Учителям математики, обучавшимся в Смоленском педагогическом институте в 1948—1970 годах, посвящаем эту книгу.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга адресована, в первую очередь, начинающему учителю математики.

Нам неоднократно приходилось наблюдать, с какими большими трудностями сталкивается вчерашний студент педагогического института, когда он пытается наладить внеклассную работу по математике. В настоящей книге делается попытка помочь ему в этом.

Книга отражает опыт советских школ, частично освещенный в печати. Авторы опирались и на свой личный опыт.

Материалами книги многократно пользовались в работе факультативного семинара, посвященного внеклассным занятиям по математике, который уже много лет проводится в Смоленском педагогическом институте.

Книга состоит из двух частей.

Главы I и III—VII первой части книги посвящены вопросам организации математического кружка, внеклассного чтения, математических экскурсий, вечеров, олимпиад, стенгазет и др. Методические соображения иллюстрируются примерами.

Глава II содержит обзор различных тем, которые могут быть использованы для кружковых занятий в V—X классах. Авторы отдавали предпочтение темам, проверенным ими в математических кружках. По многим темам приводятся примерные планы, отдельные методические замечания и указывается литература. Список книг и статей, на которые делаются библиографические ссылки, помещен в конце книги.

Вторая часть книги содержит материалы, которые учитель может использовать для подготовки занятий математического кружка или рекомендовать школьникам для самостоятельной работы.

Надеемся, что учителя математики обратятся к части II данной книги также при подборе материалов для факультативных и обязательных занятий со школьниками.

Каждая из 12 глав части II разбита на отдельные параграфы (темы), которые представляют собой либо очерки, либо наборы задач. Чтобы выделить из текста задачи, рядом с ними поставлена вертикальная черта.

Различные параграфы между собой формально почти не связаны. Наиболее полезные темы отмечены восклицательными знаками, а наиболее трудные — звездочками (одной или двумя). Такие же пометки имеются и у задач.

Большинство задач снабжено ответами, указаниями или решениями.

При написании данной книги мы частично воспользовались материалами книги М. Б. Балка «Организация и содержание внеклассных занятий по математике» и диссертацией Г. Д. Балк «Актуальные вопросы внеурочных занятий по математике в современной средней школе».

Г. Д. Балк написала: в части I данной книги — § 1 главы III и главу II (с привлечением отдельных материалов из упомянутой выше книги М. Б. Балка);

в части II — § 9 главы I; § 1, 2, 5 главы II; § 5 главы IV; § 1 и 7 главы V; § 4 главы VI; главу VII (кроме § 5); § 2 и 4 главы IX; § 3, 4, 6, 8 главы X, § 5 главы XI; гл. XII (кроме § 1, 2).

Авторами были написаны совместно во второй части книги: § 3 и 4 гл. II; § 1 гл. III; § 1 гл. IV; § 5 гл. VII; гл. VIII, § 3 гл. IX.

Остальную часть книги подготовил М. Б. Балк.

При подготовке окончательного варианта рукописи нам помогли полезные замечания и советы Б. И. Аргунова, В. Г. Болтянского, И. Б. Вейцмана, Г. И. Дринфельда, А. А. Колосова, Б. А. Кордемского, Р. Х. Кристалинского, А. М. Лопшица, М. З. Маллера, В. Л. Минковского, В. А. Петрова, А. А. Полухина. Выражаем этим товарищам свою глубокую признательность. Будем благодарны читателям, которые пришлют нам свои критические замечания.

М. Балк, Г. Балк

ВВЕДЕНИЕ

В этой книге, говоря о внеурочных занятиях по математике, мы будем иметь в виду необязательные, добровольные занятия учащихся во внеурочное время.

Несмотря на свою необязательность для школьника, внеурочные занятия по математике заслуживают самого пристального внимания каждого учителя, преподающего этот предмет.

Введение в школьное преподавание факультативных курсов по математике не снимает необходимости проведения внеурочных занятий, в частности кружковых занятий по данному предмету.

В математическом кружке учитель может выбрать ту тематику и такую программу занятий, которые больше всего соответствуют его личным вкусам, знаниям и увлечениям. Учитель может на внеурочных занятиях в максимальной мере учесть возможности, запросы и интересы своих питомцев.

Внеклассная работа по математике дополняет обязательную учебную работу по предмету и должна прежде всего способствовать более глубокому усвоению учащимися материала, предусмотренного программой.

Одна из основных причин сравнительно плохой успеваемости по математике — слабый интерес многих учащихся (а иногда и отсутствие всякого интереса) к этому предмету. Немало школьников считали и считают математику скучной, сухой наукой. Интерес учащихся к предмету зависит прежде всего от качества постановки учебной работы на уроке. В то же время с помощью продуманной системы внеурочных занятий можно значительно повысить интерес школьников к математике.

Наряду с учащимися, безразличными к математике, имеются и другие, увлекающиеся этим предметом. Им мало тех знаний, которые они получают на уроке математики. Они хотели бы больше узнать о своем любимом предмете, узнать, как он применяется в жизни, порешать интересные и более трудные задачи. Разнообразные формы внеурочных занятий представляют большие возможности в этом направлении.

Внеурочные занятия с успехом могут быть использованы для углубления знаний учащихся в области программного материала, развития их логического мышления, пространственного воображения, исследовательских навыков, смекалки, развития правильной математической речи, привития вкуса к чтению математической литературы, для сообщения учащимся полезных сведений из истории математики.

Внеклассная работа создает большие возможности для решения воспитательных задач, стоящих перед нашей школой (в частности, воспитание у учащихся настойчивости, инициативы, воли, смекалки). Работа в кружке, подготовка математического вечера и другие виды совместных работ способствуют воспитанию у школьников чувства коллективизма.

Внеурочные занятия с учащимися приносят большую пользу и самому учителю. Чтобы успешно проводить внеклассную работу, учителю приходится постоянно расширять свои познания по математике, следить за новостями математической науки. Это благотворно сказывается и на качестве его уроков.

Ясно, как важно для успешной работы преподавателя доверие, дружелюбное отношение учащихся к учителю, известный контакт между ними. Чем скорее учитель сблизится с учащимися, тем легче ему удастся наладить дисциплину, тем успешнее пойдет учебная и воспитательная работа. Хорошо налаженная внеклассная работа обычно содействует такому сближению.

Часть I

ОРГАНИЗАЦИЯ И СОДЕРЖАНИЕ ВНЕУРОЧНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ С УЧАЩИМИСЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Глава I
ОРГАНИЗАЦИЯ КРУЖКОВЫХ ЗАНЯТИЙ

§ 1. ПЕРВОЕ ЗАНЯТИЕ КРУЖКА

В каждом классе имеется несколько учащихся, которые интересуются математикой. Собрать их на первое занятие кружка нетрудно. Обычно для этой цели достаточно, чтобы учитель рассказал учащимся о том, чем они будут заниматься в кружке, какую пользу им принесут эти занятия, что они узнают в кружке нового и интересного.

Тщательно, во всех деталях, продумайте эту краткую беседу — от нее зависит рождение вашего кружка.

Разумеется, организовать кружок тем легче, чем больше учащиеся интересуются математикой. Такой интерес создается на уроках математики и определяется прежде всего качеством этих уроков.

Не следует упускать из виду, что интерес учащихся к математике можно повысить, предлагая им время от времени на дом в небольших дозах занимательные задачи, софизмы, математические фокусы, включая в свои уроки исторические справки и экскурсы, связанные с изучаемым материалом.

Итак, пусть вы уже все это проделали, вы даже не забыли повесить на видном месте яркое объявление о том, что завтра или послезавтра — первое занятие кружка... И повестка дня напрашивается почти сама собой: во-первых, организационные вопросы (ведь надо же выбрать старосту кружка, бюро кружка, редколлегию газеты кружка и т. д.; надо же принять устав кружка, договориться об обязанностях и правах членов кружка, утвердить план работы кружка и распределить доклады — много набежит организационных вопросов), во-вторых (после оргвопросов), решение занимательных задач.

Не торопитесь воспользоваться этой «само собой напрашивающейся» повесткой дня.

Опыт показывает, что начинающему руководителю кружка лучше не концентрировать вопросы организационного характера на первом заседании, а распределить их между несколькими заседаниями и решать эти вопросы по мере их возникновения. В самом деле, состав кружка обычно определяется не на первом, а лишь на втором или третьем заседании. А пока не определился состав кружка, не имеет смысла спешить с распределением всех тем между членами кружка и с утверждением плана работы кружка.

Нередко начинающий учитель, «чтобы завлечь школьников», строит первое занятие (а иногда и второе) исключительно на развлекательном материале: он предлагает учащимся самые занимательные задачи, которыми располагает, самые забавные фокусы, игры, софизмы и т. д. Это может принести *вред* кружку (особенно в старших классах). У школьников создается ложное впечатление о математическом кружке как о кружке *развлекательной* математики. Если на каком-то из последующих заседаний будет поставлена серьезная тема, то оно покажется учащимся значительно менее привлекательным, чем первое. Незачем делать первое занятие кружка рекламным, «зазывающим». По этой причине мы бы воздержались от постановки на первом заседании кружка таких тем, как «Приемы быстрого счета», «Математические софизмы», «Решение логических задач», «Математические развлечения», «Математические фокусы» и т. п.

Но если первое занятие кружка не должно быть организационным, не должно быть «завлекающим», то каким же оно должно быть? Оно должно быть типичным заседанием: учащиеся должны понять, что примерно вот такими же будут и последующие занятия. И в то же время первое занятие кружка имеет свои особенности. Перечислим их.

1) Освещение перспективы кружка. В начале первого занятия учителю нужно хотя бы кратко, в течение 5—7 минут, обрисовать учащимся перспективу всей работы кружка, рассказать об основных вопросах, которыми будут заниматься члены кружка, о том, что они получат от кружка. Нужно также сформулировать 3—4 самых основных требования, которым обязан подчиняться каждый член кружка.

2) Более простая (это не значит «более развлекательная») основная тема, чем на последующих занятиях. Материал *каждого* занятия — все равно, первого или не первого — должен быть достаточно занимателен, интересен и доступен школьникам; но, учитывая развитие и запросы учащихся, пришедших на первое занятие кружка, некоторую неопределенность состава кружка, лучше выбрать тему несколько более доступную, чем последующие.

3) Первое занятие проводит сам учитель. Это особенно желательно, если учащиеся мало знакомы с кружковой работой. Ученики получают образец, как им нужно выступать на занятиях кружка.

4) С первого занятия начинается выпуск журнала кружка. Вы вряд ли упустите из виду, чтобы в

конце первого занятия договориться с учащимися о времени и месте ближайших занятий, о теме ближайшего занятия, о школьниках, которым предстоит принять участие в подготовке этого занятия, и т. п. Но не забудьте также об оформлении *журнала кружка*, в который должно заноситься все, что происходит в кружке. Так от занятия к занятию будет создано основное пособие, пользуясь которым каждый кружковец сумеет в любое время восстановить, чем же он занимался в кружке (подробнее см. гл. V, § 2).

§ 2. ЧТО ТАКОЕ «ТЕМАТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ»?

Некоторые учителя считают основной формой работы кружка доклады учащихся продолжительностью в 30—50 минут и более. Известны кружки, в которых такие доклады занимают 70—80% времени каждого заседания.

Хорошо это или плохо?

Школьнику трудно выступить с большим докладом на математическую или даже историко-математическую тему, а его товарищам — выслушать этот доклад. Чтобы прочесть такой доклад доброкачественно, необходим довольно высокий уровень математической культуры и педагогического искусства. Ученик часто затягивает доклад. По форме доклад обычно тяжеловесен, перегружен чуждыми ученику выписанными из книг выражениями, изложение ведется рывками, недостаточно живо и энергично. Наконец, нередко докладчик допускает неточности и даже ошибки.

Ясно, что поручать отдельным учащимся большие доклады нужно редко и с большой осторожностью, особенно в начале работы кружка. Целесообразней большой доклад разбить на несколько частей и каждую часть поручить отдельному учащемуся.

Несомненно, что особое внимание нужно уделить тем формам кружковых занятий, которые дают возможность подавляющему большинству членов кружка проявить свою инициативу, самостоятельность и рассчитаны на активную творческую работу **всех** членов кружка.

Рассмотрим одну из удачных форм кружковой работы. Условно назовем ее комбинированным тематическим занятием.

Основную часть такого занятия составляет решение членами кружка ряда задач на одну и ту же тему, например «Геометрические места точек в пространстве» или «формула Муавра и ее приложения».

Учитель заранее подбирает и продумывает список задач и вопросов для занятия, располагает их в определенной последовательности. Занятие начинается с вводных замечаний учителя относительно значения темы, ее применения и т. д. Иногда можно начать сразу с увлекательной задачи, связанной с темой. После этого руководитель кружка предлагает вопросы и задачи. Задачи решают сами учащиеся, каждый в отдельности, здесь же, в классе. Если у школьников возникают затруднения, то учитель ставит наводящий вопрос или дает указание (иногда отдельному ученику, иногда всем членам кружка). К следующей задаче не переходят до тех пор, пока предыдущая не разобрана (часто у доски) кем-либо из учащихся. Решая задачи, отвечая на поставленные учителем вопросы, учащиеся постепенно, как бы заново, самостоятельно раскрывают рассматриваемую тему. Каждый имеет возможность проявить свою инициативу, самостоятельность, способность к творчеству, и это, как показывает опыт, дает учащимся значительно большее удовлетворение, чем пассивное прослушивание докладов. Раскрытие темы протекает как коллективная работа всего кружка, в которую каждый может внести свою долю. По ходу занятий делаются обобщения, иногда дополнения, учитель вместе с учащимися формулирует выводы. Иногда дополнения делают специально подготовившиеся учащиеся. В конце занятия учитель подводит краткий итог, предлагает на дом задачи и рекомендует литературу по данной теме.

Бывает, что в теме, которой посвящено тематическое занятие, имеется материал, который не может быть раскрыт самими учащимися (например, неизвестные школьникам определения; методы, которые учащимся не под силу или очень трудно открыть самостоятельно). Такой материал освещает сам учитель или предварительно подготовленный ученик.

Иногда весьма желательно ознакомить учащихся с решением какой-либо интересной, но очень трудной для них задачи. Пусть, например, на тематическом занятии «Построения с ограниченными средствами» учитель пожелал познакомить школьников с такой задачей: «Построить точку пересечения двух непараллельных прямых, пользуясь только циркулем». Вряд ли можно ожидать, что учащиеся сами догадаются о способе решения задачи (во всяком случае это потребует много времени). Вполне разумно, чтобы решение этой задачи показали специально подготовленные учащиеся. Однако основную часть тематического занятия (может быть, 70—80%) нужно выделить для самостоятельного решения задач всеми присутствующими.

В старших классах отбор материала для тематического занятия и проведение его можно поручить (полностью или частично) одному или нескольким хорошо подготовленным ученикам. Обычно тематическое занятие занимает 60—70% времени всего заседания кружка (ниже мы укажем, как можно использовать остальное время). Тематическое занятие должно войти составной частью в подавляющее большинство заседаний.

Приведем сокращенную стенограмму одного тематического занятия.

Тема *«Геометрические места точек в пространстве»*. Кружок X классов.

Вначале руководитель кружка — учитель разъяснил кратко значение темы. Затем он предложил вопросы и задачи. «С понятием ГМТ (здесь и всюду в дальнейшем ГМТ пишется вместо слов «геометрическое место точек») впервые ознакомились еще в VI—VII классах. Вы, наверное, без труда скажете, чем является в пространстве ГМТ, равноудаленных от концов данного отрезка AB». Ученик К. говорит: «Этим ГМТ является плоскость, перпендикулярная к середине данной прямой AB».— «В чем неточность такого ответа»? — обращается учитель к другим школьникам.

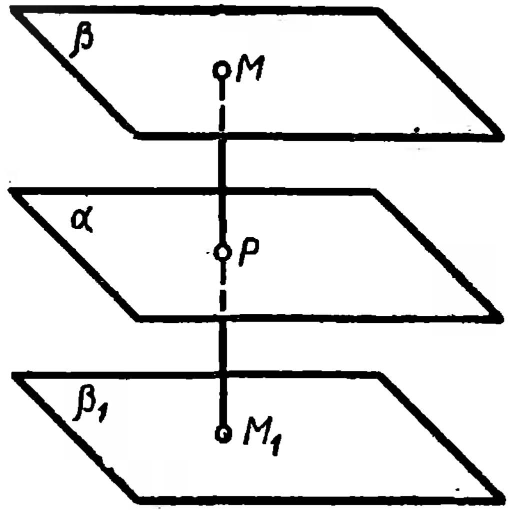


Рис. 1.

Очень скоро ученики выясняют, что не имеет смысла говорить о середине прямой и что плоскость не может быть перпендикулярна к точкам, в том числе и к середине отрезка. Ученик Д. дает окончательный ответ: «В пространстве ГМТ, равноудаленных от концов данного отрезка, является плоскость, перпендикулярная к отрезку и проходящая через его середину». Результат иллюстрируется моделью (листок картона, наколотый на карандаш).

Учитель (продолжает). Плоскость стола β параллельна плоскости пола α; расстояние между ними равно 1 *м*. Один из учащихся сказал, что плоскость стола является ГМТ, отстоящих от плоскости пола на расстоянии в 1 *м*. Прав он или нет?

Ученик М. Конечно, прав. Ведь каждая точка плоскости β отстоит от плоскости α на расстоянии в 1 *м*.

Учитель. А остальные как думают?

Голоса. Ну, конечно, правильно.

Ученик Д. Будет еще одно ГМТ: плоскость β_1 снизу от плоскости α (рис. 1).

Учитель. Кто же прав — М. или Д.?

После небольшого обсуждения ученики приходят к правильному выводу: искомым ГМТ является пара плоскостей β и β_1. Одновременно они дают более или менее правильное определение ГМТ. Окончательную формулировку дает учитель: «ГМТ пространства, обладающих определенным свойством, называется множество всех тех, и только тех точек пространства, которые обладают этим свойством». Далее учитель разъясняет смысл выражения «всех тех, и только тех».

Учитель. Мы раньше говорили о ГМТ, равноудаленных от концов отрезка. Напомни нам, К., чем является это ГМТ. (К. напоминает.) А как это доказать?

К доске идет ученик С. «Обозначим данный отрезок через AB, его середину — через M. Пусть плоскость α перпендикулярна к AB и проходит через точку M. Докажем, что каждая точка плоскости α равноудалена от точек A и B. Пусть P — произвольная точка плоскости α. Соединим P с A, B и M; $AB \perp PM$ (ибо $AB \perp \alpha$, а PM лежит в плоскости α). $\triangle AMP = \triangle BMP$ (ибо $\angle AMP = \angle BMP = 90°$, $AM = BM$ по условию, MP — общий катет этих треугольников). Следовательно, $AP = BP$, что и требовалось доказать».

— Всё? — спрашивает учитель.

— Всё.

— А как другие думают?

— Конечно, всё!

— Нет, не всё, — говорит учитель после небольшой паузы. —

Подумайте, что еще нужно доказать. Не забудьте о слове «всех» в определении ГМТ, — напоминает учитель.

Первым догадывается ученик С.: «Нужно еще доказать, что других точек нет». — «Точнее?» — «Нужно доказать, что, кроме точек плоскости α, других точек, равноудаленных от A и B, нет».—«Как же это доказать?»

Ученица Р. предлагает доказать это способом от противного. При помощи других учеников она проводит у доски доказательство. «Пусть Q —произвольная точка вне плоскости α. Докажем, что $AQ \neq BQ$. Доказательство проводим способом от противного. Допустим, что $AQ = BQ$, и придем к противоречию. Рассмотрим плоскость β, проходящую через AB и точку Q. В этой плоскости соединим Q с точками A, B, M; $\triangle AMQ = \triangle BMQ$, так как сторона MQ у них общая, по допущению $AQ = BQ$, а по условию $AM=BM$. Следовательно, $\measuredangle AMQ = \measuredangle BMQ$, то есть $MQ \perp AB$. Плоскости α и β пересекаются (ибо точка M у них общая). Обозначим линию пересечения этих плоскостей через MN. Тогда $MN \perp AB$, причем MN также лежит в плоскости β и отлична от прямой MQ. Итак, в плоскости β через точку M проходят две различные прямые, перпендикулярные к AB. Это невозможно. Мы пришли к противоречию. Следовательно, наше допущение неверно и $AQ \neq BQ$».

Учитель замечает, что отдельно следовало бы провести рассуждения, когда точка Q на прямой AB.

С помощью членов кружка учитель еще раз формулирует два предложения, которые нам пришлось доказать, когда мы хотели убедиться, что плоскость α является действительно искомым ГМТ.

Затем учитель говорит: «ГМТ, лежащих внутри двугранного угла и равноудаленных от его граней, является ...»

— Плоскость, — подсказывает ученик.

— Нет, полуплоскость.

— Верно, полуплоскость, делящая этот двугранный угол пополам. Как бы вы это стали доказывать?

— Для этого нужно доказать два взаимно противоположных предложения. (Ученики их формулируют.)

— Таким образом, — делает вывод учитель, — если хотим доказать, что какая-нибудь фигура Φ есть ГМТ, обладающих каким-то указанным свойством, нужно доказать два предложения: 1) каждая точка фигуры Φ обладает указанным свойством; 2) никакая точка вне фигуры Φ не обладает указанным свойством. Предложение второе можно сформулировать и так: каждая точка, обладающая указанным свойством, принадлежит фигуре Φ.

Затем рассматриваются несколько примеров (без доказательства). Например: «Назвать ГМТ, равноудаленных от двух данных плоскостей (а) параллельных, б) пересекающихся)».

— Чем является ГМТ, находящихся на данном расстоянии d от данной точки M? — спрашивает учитель.

Следуют ответы: «Поверхность шара», «Сфера с центром в точке M и радиусом, равным d».

— Как это доказать?

Ученики думают. Через 1—2 минуты учитель объясняет, что этот факт не нуждается в доказательстве, ибо в школьном курсе геометрии это есть определение сферы, а *определение* не требует доказательства.

— Обязательно ли ГМТ в пространстве является поверхностью? Кто мог бы привести пример ГМТ, которое не является поверхностью?

У ч е н и к Д. ГМТ, равноудаленных от всех точек сферы, есть точка — центр сферы.

У ч е н и к Г. ГМТ, отстоящих от точки M на расстоянии, не превышающем отрезка d, является шар радиуса d с центром в точке M. Это тело, а не поверхность.

Учитель обращает внимание на различие между понятиями «сферы» и «шар». Затем он предлагает задачу: «Имеются две параллельные плоскости α

и β, расстояние между ними равно d ($d = 1$ *дм*). Найти ГМТ, для которых сумма расстояний от этих плоскостей равна d».

Следуют несколько неверных ответов («плоскость α», «две плоскости α и β», «любая плоскость между α и β» и т. д.). После небольшого обсуждения учащиеся приходят к правильному ответу: искомым ГМТ служит часть пространства, заключенная между плоскостями α и β, включая сами плоскости α и β. Ученики доказывают это.

— Чем является ГМТ, равноудаленных от вершин треугольника?

Следует правильный ответ («прямая, перпендикулярная к плоскости треугольника и проходящая через центр описанной окружности»).

Учитель (делает вывод). ГМТ в пространстве — это не обязательно поверхность или совокупность нескольких поверхностей. Это может быть тело, точка или несколько точек, линия или несколько линий; это может быть и часть пространства «бесконечного объема» (например, слой между двумя параллельными плоскостями).

«Будем считать за точку вот эту лампочку, свисающую с потолка нашего класса. Чем является ГМТ, лежащих в плоскости пола и отстоящих от лампочки на расстоянии 10 *м*?» (Ученики определяют на глаз, что от лампочки до пола приблизительно 3 *м*.)

Ученик К. Окружность. Ведь ГМТ, отстоящих от лампочки на расстоянии в 10 *м*, является сфера радиуса, равного 10 *м*. В пересечении этой сферы с плоскостью пола получается окружность.

Учитель. Чем является ГМТ, равноудаленных от двух данных точек A и B и лежащих в данной плоскости α?

Ученик В. ГМТ, равноудаленных от точек A и B, служит некоторая плоскость β. Точки, которые мы ищем, должны лежать одновременно в плоскостях α и β. Значит, это будет прямая — линия пересечения двух плоскостей.

Учитель. Кто думает иначе? (Молчание.) Ответ не полон. (Ученики удивлены). Разве плоскости α и β обязаны пересечься?

Ученик Г. Возможны три случая. 1) Плоскость β совпадает с плоскостью α ($\beta \equiv \alpha$). Искомое ГМТ — сама плоскость α. Это будет, когда точки A и B симметричны относительно плоскости α. 2) $\beta \parallel \alpha$. Искомое ГМТ не содержит ни одной точки. Это будет, когда точки A и B не симметричны относительно плоскости α, но $AB \perp \alpha$. 3) Плоскости β и α пересекаются. Искомое ГМТ — прямая. Это будет, если отрезок AB не перпендикулярен α.

Учитель. Верно. Таким образом, если мы хотим найти ГМТ, обладающих сразу двумя свойствами, то поступаем так: ищем отдельно ГМТ, обладающих первым свойством, и ГМТ, обладающих вторым свойством. Затем находим пересечение этих двух фигур (то есть совокупность всех точек, общих для обеих полученных фигур). Это и будет искомым ГМТ.

После этого учитель предлагает еще несколько упражнений (часть II, глава XI, § 2, задача 6). В конце учитель подводит итог занятия (формулирует основные положения по занятию).

§ 3. ДЕСЯТИМИНУТКА

Вторая по важности форма работы математического кружка — небольшое сообщение (или рассказ) учителя или ученика по одному какому-нибудь сравнительно узкому вопросу. Длится оно обычно 8—15 минут. Мы его для краткости назовем **десятиминуткой**. Темой десятиминутки может быть 1) краткая биография какого-либо выдающегося математика; 2) интересный вопрос (или факт) из истории математики (например, история изобретения логарифмов); 3) прием счета (устного или на каком-нибудь счетном приборе, например на линейке); 4) сообщение о какой-нибудь математической книге, статье, обзор журнала; 5) краткое изложение какого-либо математического вопроса (например, «циклоида»).

Чаще всего десятиминутка проводится после тематического занятия, когда учащиеся уже несколько устали. По содержанию она не обязательно связана с тематическим занятием (хотя часто это желательно): различие между основной темой и темой десятиминутки имеет свои достоинства. Десятиминутка не содержит каких-либо громоздких выкладок или трудоемких доказательств теорем. Она должна легко и с интересом восприниматься учащимися даже в конце заседания кружка — это вполне характеризует степень ее трудности. Десятиминутка нередко носит характер обзора, сообщения фактов без детальных доказательств (иногда указывается литература, где эти доказательства можно найти). Приведем для примера стенограммы двух десятиминуток.

Собирательный способ умножения двух произвольных двузначных чисел (V — VI классы).

«Я покажу один прием умножения двузначных чисел, который проще того, которым постоянно пользуются на уроках.

Некоторые опытные учителя в прошлом веке считали, что этот способ должен заменить в нашей школе общепринятый способ умножения. Они называли его нормальным способом умножения. Некоторым американцам он настолько понравился, что они его даже так и называли «американский способ». Однако им пользовались индийцы еще в VI веке н. э., и правильнее его назвать индийским способом. На Руси он был известен как «способ умножения крестиком».

Перемножим два каких-либо двузначных числа, скажем 23 на 12. Я сразу напишу, что получится. (Рассказчик пишет цифры справа налево: 6, затем 7, затем 2.)

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}23\\12\end{array}\\ \hline 276\end{array}$$

Вы видите: очень быстро получен ответ. Но **к а к** он получен?

1-й шаг. $\begin{array}{r} 23 \\ \times\quad \uparrow \\ 12 \\ \hline ..6 \end{array}$ Говорю: «$2 \times 3 = 6$».

2-й шаг. $\begin{array}{r} 23 \\ \times\quad \times \\ 12 \\ \hline .76 \end{array}$ Говорю: «$2 \times 2 + 1 \times 3 = 7$», пишу 7 левее цифры 6.

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\uparrow\ \\ 12 \\ \hline \cdot\, 276 \end{array}$$

3-й шаг. Говорю: «$1 \times 2 = 2$», пишу 2 левее цифры 7. Получаем 276.

Выясним теперь, почему же можно так умножать. Мы умножаем двузначное число на двузначное. В результате получим число, в котором будут содержаться единицы, десятки, сотни (возможно, что и тысячи, но мы каждую тысячу будем рассматривать как 10 сотен).

Как можно получить в этом примере единицы? Только от умножения единиц сомножителей. Это и делаем на первом шаге: $2 \times 3 = 6$.

Как можно получить десятки? Очевидно, от умножения единиц множителя на десятки множимого (2×2) и десятков множителя на единицы множимого (1×3). Десятков собрали на втором шаге: $2 \times 2 + 1 \times 3 = 7$.

Как получим сотни? Очевидно, от умножения десятков сомножителей. Это и делаем на третьем шаге. Сотен будет: $1 \times 2 = 2$.

Иногда может оказаться, что умножая единицы сомножителей, получим не только единицы; но и несколько десятков, тогда придется увеличить следующую цифру на соответствующее число единиц.

Приведем стенограмму десятиминутки на геометрическую тему.

Построение правильных многоугольников (VIII—IX классы)

На практике нередко бывает необходимо разделить окружность на некоторое число равных частей. Пользуясь только циркулем и линейкой, легко разделить окружность на 6, 3, 4, 12, 24, 48... равных частей. Немного труднее разделить окружность на 5 и 10 равных частей (решение этой задачи приводится в учебнике А. П. Киселева). Но можно ли, пользуясь только циркулем и линейкой, разделить окружность на 7, 9, 15, 20, 30, 360 равных частей? А если можно, то как это сделать?

С задачей деления окружности на равные части связана важная для практики задача построения правильных многоугольников: если разделить окружность на n равных частей циркулем и линейкой, то легко построим правильный n-угольник; обратно, если мы построим правильный n-угольник, то после этого нетрудно будет разделить окружность на n равных частей. С задачей деления окружности связана и другая важная для практики задача — построение угла, содержащего данное число градусов. Если нам, например, нужно построить угол в 9°, то для этого, очевидно, достаточно разделить окружность на 40 равных частей, а чтобы построить угол в 1°, достаточно окружность разделить на 360 равных частей.

Задача о делении окружности на равные части привлекала внимание математиков и нематематиков в течение многих столетий. Еще две с половиной тысячи лет назад решали и решили задачу о делении окружности на 5 равных частей древнегреческие математики из школы Пифагора. Крупнейший греческий геометр Архимед 2200 лет назад занимался делением окружности на 7 равных частей. Этой же задачей интересовались индийские математики в V—VII веках нашей эры. Большой интерес к построению правильных многоугольников проявил гениальный художник и ученый эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452—1519).

Только в конце XVIII века математика оказалась в состоянии справиться с задачей деления окружности. В 1796 году девятнадцатилетний юноша Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), впоследствии один из крупнейших математиков мира, доказал, что не при всяком n можно циркулем и линейкой разделить окружность на n равных частей (или, что то же, построить правильный n-угольник). Более того, он точно установил, при каких значениях n это возможно и при каких невозможно. Вот какую теорему он доказал:

1) *Если n—простое число, то правильный n-угольник можно построить циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда n имеет вид $2^{2^k}+1$ (k — целое неотрицательное число).*

2. *Если же n—составное число, то его нужно разложить на простые сомножители и правильный n-угольник можно построить циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда все нечетные простые сомножители различные и каждый из них имеет вид $2^{2^k}+1$.*

Рассмотрим несколько примеров. Число 3 можно представить в виде $2^{2^0}+1$, число 5 можно представить в виде $2^{2^1}+1$. Следовательно, по теореме Гаусса, правильные треугольник и пятиугольник можно построить циркулем и линейкой. Но вот $2^{2^2}+1=$ $=17$. Число 17 — простое. Следовательно, по теореме Гаусса, правильный семнадцатиугольник также можно построить циркулем и линейкой. Гаусс сам дал способ построения правильного семнадцатиугольника.

Можно ли построить циркулем и линейкой правильный семиугольник? 7 — простое число, но оно не может быть представлено в виде $2^{2^k}+1$. Значит, по теореме Гаусса, правильный семиугольник циркулем и линейкой построить невозможно. То же можно повторить относительно правильного одиннадцатиугольника, тринадцатиугольника.

Выясним, можно ли разделить окружность на 360 равных частей циркулем и линейкой. $360=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$. Среди нечетных простых сомножителей, на которые разлагается 360, имеются два одинаковых (3 и 3). Следовательно, по теореме Гаусса, разделить окружность на 360 равных частей циркулем и линейкой невозможно. Отсюда следует: если пользоваться только циркулем и линейкой, то нельзя построить дугу (а значит, и угол) в 1° (речь идет об абсолютно точном, а не приближенном построении).

Вернемся к первой части теоремы Гаусса. Рассмотрим числа вида $n = 2^{2^k} + 1$. При $k = 0, 1, 2$ мы получим для n значения 3, 5, 17. Все они простые, и поэтому можно построить правильный треугольник, пятиугольник, семнадцатиугольник. При $k = 3$ $n = 2^{2^3} + 1 = 257$. Можно ли построить циркулем и линейкой 257-угольник? Да, ибо 257 — простое число. В 30-х годах прошлого века один ученый на самом деле провел это построение, посвятив описанию построения обширную статью в одном из немецких журналов.

При $k = 4$ $n = 2^{2^4} + 1 = 65537$. Число 65537 простое. Значит, можно циркулем и линейкой построить правильный 65537-угольник. Выполнение такого построения представляет, пожалуй, лишь спортивный интерес. Нашелся в конце прошлого века один профессор, который не пожалел десяти лет жизни для выполнения этого построения. Рукопись с описанием этого построения занимает солидный чемодан и хранится в одном из германских университетов.

При $k = 5$ $n = 2^{2^5} + 1 = 4294967297$. Это число, оказывается, составное. Значит, правильный многоугольник, у которого $2^{2^5} + 1$ сторон, циркулем и линейкой построить невозможно.

Раньше мы говорили, что нельзя разделить окружность на 360 равных частей циркулем и линейкой. Но это деление можно провести с помощью других инструментов, например транспортира. Транспортиром можно легко разделить окружность и на 9 равных частей.

§ 4. ДРУГИЕ ФОРМЫ РАБОТЫ КРУЖКА

Помимо рассмотренных выше двух основных форм кружковой работы, полезно использовать и другие формы. Перечислим их.

I. *Решение задач, не связанных с основной темой данного заседания.* Сюда относятся задачи, подготавливающие учащихся к *предстоящим* занятиям; задачи, подобные рассмотренным на предыдущих заседаниях; задачи, подготовляющие членов кружка к предстоящей олимпиаде или конкурсу (например, из подготовительных серий задач к олимпиаде), а также занимательные задачи, в том числе исторические и логические.

II. *Математические софизмы, фокусы, задачи-шутки, геометрические иллюзии, игры и всякого рода развлечения,* не связанные с основной темой заседания. Предлагаются они обычно в самом конце заседания кружка.

III. *Разбор задач,* предложенных членам кружка на дом (на прошлых заседаниях).

IV. *Доклады* (на 30—40 минут и более) и *беседы* на математические или историко-математические темы. Доклады ставятся изредка, и притом на такие темы, по которым невозможно или нецелесообразно проводить тематические занятия. Это бывает, когда учащимся нужно сообщить определения неизвестных им понятий, ознакомить их с рядом неизвестных им фактов, сравнительно труднодоказываемых. Таковы, например, доклады: «Классификация многогранников», «Что такое топология?», «Понятие об анализе бесконечно малых» и др. Доклады исторического характера ставятся в тех случаях, когда нужно подробно осветить деятельность выдающегося ученого или группы ученых, например: «С. В. Ковалевская», «От Евклида до Лобачевского (5-й постулат и его значение в развитии геометрии)», «Выдающиеся советские математики» и др. Такие доклады часто приурочивают к какому-либо юбилею. Им, как правило, посвящаются расширенные заседания кружка, на которые приглашаются не только члены кружка. Большую ценность имеют обзорные доклады, например: «Развитие понятия числа», «Основные понятия алгебры», «Математические ошибки, допускаемые учащимися при поступлении в вузы» и другие.

Докладчиками могут быть: руководитель кружка, учителя, студенты, приглашенные специалисты-математики, старшеклассники, члены кружка. Очень интересны доклады (вернее — беседы) специалистов-нематематиков (инженеров, физиков, квалифицированных рабочих, летчиков, артиллеристов, агрономов и др.) о значении математики для той или иной науки, для практики. С каким вниманием их слушают члены кружка! Если бы тот же доклад зачитывал ученик или даже учитель, эффект был бы куда меньше. Разумеется, что руководителю кружка нужно предварительно ознакомиться с содержанием доклада, продумать, насколько он доступен для учащихся, и в случае необходимости внести коррективы. Иногда такой доклад составляет специалист совместно с учителем.

Оставшееся после доклада время можно использовать для решения задач, связанных с докладом, или занимательных задач.

V. *Моделирование* (изготовление наглядных пособий по математике).

VI. Математические *экскурсии* и геодезические работы на местности.

VII. *Обсуждение математических книг и статей.*

VIII. *Сообщение члена кружка о результате, который им самим получен*, о задаче, которую он сам придумал и решил, о выполнении определенной работы математического характера.

IX. *Чтение отрывков* из художественных произведений, связанных с математикой.

X. Просмотр кинофильма или диафильма по математике (например, кинофильма «Покорение чисел» — о работе машиносчетных станций).

§ 5. ПЛАНИРОВАНИЕ РАБОТЫ КРУЖКА

Начинающему учителю можно планировать работу кружка на полугодие или на одну четверть. Однако желательно уже в начале года составить для себя примерный план на весь год. В плане целесообразно иметь следующие графы: 1) номер заседания кружка, 2) дата, 3) содержание (кружкового занятия), 4) кто отвечает (за каждую часть этого заседания), 5) срок (к которому должна быть закончена подготовка отдельных частей заседания), 6) отметка о выполнении.

Организационную работу лучше планировать отдельно от учебной работы кружка. В план, утверждаемый кружком, включаются лишь основные вопросы, которые предстоит рассмотреть на занятиях кружка (например, какое будет тематическое занятие, десятиминутка, доклад и т. д.). Наряду с этим рекомендуем учителю также планировать для себя дополнительный материал, который он намерен рассмотреть в кружке (занимательные задачи, софизмы, фокусы, развлечения и т. д.).

В течение года план работы кружка может изменяться и дополняться. Приведем в качестве примера план работы кружка девятых классов.

. Основная тематика

Обозначения: т. з. — тематические занятия, «10» — десятиминутка. Подробнее о темах см. главу II.

Заседание 1 (14/IX): 1) Правильные многоугольники (т. з.). 2) Современные счетные машины (просмотр диафильма).

Заседание 2 (28/IX): Математическая экскурсия «Геометрия в парке».

Заседание 3 (12/X): 1) Неопределенные уравнения (т. з.). 2) Последняя теорема Ферма́ («10»).

Заседание 4 (26/X): 1) Равновеликие и равносоставленные фигуры (т. з.). 2) Циклоида («10»).

Заседание 5 (9/XI): 1) Некоторые замечательные последовательности (т. з.). 2) Число π и задача о квадратуре круга («10»).

Заседание 6 (23/XI). Задачи на максимум и минимум (т. з.): 1) Экстремум квадратного трехчлена. 2) Геометрические способы нахождения экстремума.

Заседание 7 (7/XII): 1) Суммирование (т. з.). 2) Изопериметрическая задача («10»).

Заседание 8 (21/XII): 1) Математическая индукция (т. з.). 2) Профессия математика («10»).

Заседание 9 (4/I). Математика на каждом шагу: а) математика в строительстве (рассказ инженера), б) математика и оборона страны (рассказ офицера Советской Армии), в) решение задач с практическим содержанием.

З а с е д а н и е 10 (8/I): 1) Исследование функций и построение их графиков (т. з.). 2) Примеры функций в природе и технике («10»).

З а с е д а н и е 11 (1/II): 1) Теорема Птолемея и ее применение (т. з.). 2) Л. С. Понтрягин («10»).

З а с е д а н и е 12 (15/II): 1) Исчисление высказываний и булева алгебра (т. з.). 2) Николай Бурбаки («10»).

З а с е д а н и е 13 (1/III): 1) Формула сложных процентов и ее применение (т. з.). 2) Как были изобретены логарифмы («10»).

З а с е д а н и е 14 (15/III): 1) ГМТ в пространстве (т. з.). 2) Наши земляки-математики («10»).

З а с е д а н и е 15 (2/IV): 1) Формула перехода от логарифмов по одному основанию к логарифмам по другому основанию. Ее применение (т. з.). 2) О книге Б. А. Кордемского «Математическая смекалка» (сообщение).

З а с е д а н и е 16 (11/IV). Заключительное заседание кружка.

II. Дополнения

К з а с е д а н и ю 1. Фокус «Угадывание возраста».

К з а с е д а н и ю 3. Фокус «Моментальное извлечение кубического корня».

К з а с е д а н и ю 4. Софизм «64 = 65».

К з а с е д а н и ю 5. Игра «Кто первый скажет «100».

К з а с е д а н и ю 6. Рассказ Л. Н. Толстого «Много ли человеку земли нужно?»

К з а с е д а н и ю 7. Геометрическая иллюзия.

II. Организационная работа

1. Рассказ учителя о перспективах работы кружка (14/IX).
2. Выпуск математического журнала кружка (с 20/IX).
3. Выборы старосты кружка (28/IX).
4. Составление плана работы кружка. Утверждение его кружком (12/X).
5. Выпуск стенгазеты «Математика на каждом шагу» (5 номеров) (с 15/X).
6. Организация математической библиотечки кружка (с 1/XI).
7. Выпуск фотомонтажа «Выдающиеся математики нашей Родины» (15/I).
8. Подготовка к городской математической олимпиаде (весь год). Участие в олимпиаде (апрель).

9. Изготовление таблицы «Что читать о математике?» (1/XII).

10. Участие в проведении школьного математического вечера IX и X классов (15/I).

Приведем несколько примеров того, как может быть распределено время одного кружкового заседания, если основную часть его составляет тематическое занятие.

X класс (1-е заседание): 1) рассказ учителя о содержании и формах работы данного кружка, о требованиях, предъявляемых к членам кружка, и т. д. (5—7 минут); 2) тематическое занятие «Геометрические места точек в пространстве» (40 минут); 3) перерыв (10 минут); 4) продолжение тематического занятия; в конце — краткие выводы (20 минут); 5) десятиминутка «Математики-смоляне»; 6) математический фокус «Угадывание дня, месяца и года рождения» (7—8 минут); 7) заключительные замечания учителя о следующем заседании, о журнале кружка и т. п. (5 минут).

VIII класс: 1) вводные замечания учителя о предстоящей теме (3 минуты); 2) тематическое занятие «Построения при различных ограничениях» (50 минут); 3) софизмы «64 = 65» (6—7 минут); 4) заключительные замечания учителя (2—3 минуты).

§ 6. ВЫСТУПЛЕНИЯ ЧЛЕНОВ КРУЖКА

Умение хорошо и интересно выступать на заседаниях кружка не придет к учащемуся само по себе — школьника надо этому научить. Но как научить?

1. Мы уже отмечали выше, что особенно большую ценность имеют выступления руководителя кружка — они воспринимаются школьниками как *образцы* для ученических выступлений.

2. Организовав кружок, не торопитесь предлагать школьнику тему для подготовки доклада или десятиминутки — пусть он начнет с более простых выступлений, например: изложение решения какой-нибудь задачи; сообщение условия какой-нибудь задачи; краткая справка о каком-либо математике (например, об Архимеде), о каком-то математическом термине (например, о слове «цифра»), показ математического фокуса, софизма, приема счета и т. п. Обратите внимание на то, насколько *интересно* и *грамотно* подготовлено учеником такое сообщение. Только после этого можно поручить ученику подготовку десятиминутки.

3. Но вот, наконец, вы решили дать ученику такое поручение. Сделайте это заблаговременно; месяц до заседания — это нормальный срок. Вместе с темой вы, разумеется, порекомендуете ученику литературу и дадите хотя бы краткие указания относительно плана и узловых моментов выступления.

Однако далеко не всегда следует начать с рекомендации литературы. Иногда лучше (если это возможно) сначала предложить ученику задачу по выбранной им теме, а литературу — через некоторое время (скажем, через неделю). Например, прежде чем предложить ученику тему «Геодезические линии», можно рекомендовать ему решить какую-либо задачу «О пауке и мухе» (см. ч. II, гл. XI, § 4); прежде чем предложить ему тему «Односторонние поверхности», можно показать ученику, как склеивается лента Мебиуса, и посоветовать самостоятельно установить свойства этой ленты (например, разбивает ли ее продольный разрез на два куска). Оправдывает себя и такое задание: «Придумать алгоритм для быстрого возведения в квадрат чисел, близких к 100 (или к 1000)». Когда школьник найдет свой способ, учитель ему порекомендует литературу.

4. Очень важно указать школьнику, сколько минут должно длиться выступление. Ограничение во времени заставляет школьника отобрать для выступления только самое важное и интересное. Полезно (если это возможно), чтобы ученик предварительно прослушал себя или записал свое сообщение на магнитофон.

5. Имеет смысл недели через две после того, как ученик получил тему доклада или десятиминутки, пригласить его к себе, проверить составленный им план выступления; если нужно, помочь школьнику разобраться в литературе; вместе с ним почитать некоторые места из рекомендованной книги или статьи, обратить внимание на главное и выбросить второстепенное.

Очень желательно, чтобы учитель не только просматривал конспект ученического выступления, но хотя бы иногда (особенно на первых порах работы кружка) предварительно прослушивал это выступление.

6. Хороший конспект — это еще не обязательно хороший доклад. Даже подготовив содержательный конспект, ученик может плохо изложить его по форме. Вы окажете большую услугу членам кружка, если обратите их внимание на типичные «мелкие» недостатки ученических выступлений. Перечислим некоторые из этих дефектов: изложение ведется слишком быстро, так что членам кружка трудно следить за мыслью выступающего, или, наоборот, чересчур медленно, вяло; записи располагаются на доске бессистемно, вразброс; посторонние записи не стираются, отвлекая внимание слушателей; ученик «рассказывает доске» (стоит почти все время спиной к аудитории); небрежные или мелкие чертежи; докладчик называет фамилии, даты, формулы, не записывая их на доске.

Будет хорошо, если вы в отдельной беседе в кружке обратите внимание будущих докладчиков на конкретные возможности улучшения конспектов и выступлений. Перечислим некоторые из этих возможностей.

1. Нередко конспект составляется путем компановки отдельных фраз и абзацев из рекомендованных пособий. Однако выступление будет лучше восприниматься аудиторией, если ученик изложит тему своими словами. Можно ему посоветовать сначала прочесть рекомендованную литературу, составить план и лишь затем составить конспект.

2. Лучше, чтобы докладчик рассказывал по памяти, а не читал доклад по конспекту.

3. Все употребляемые в выступлении термины или имена должны быть сразу же разъяснены. Сказав, например, что «А. Н. Крылову принадлежат важнейшие исследования по теории девиации компаса и теории килевой качки корабля», нужно сразу же объяснить, что значит «девиация компаса» и «килевая качка».

4. В начале доклада или десятиминутки нужно кратко объяснить, в чем состоит значение темы, чем она интересна для присутствующих. Тем самым докладчик мобилизует внимание слушателей. Например, рассказ о каком-либо видном математике вовсе не следует начинать сообщением сведений о времени и месте его рождения (как это обычно принято). Лучше, если докладчик сначала скажет, какое место занимает этот ученый в истории математики (нельзя ограничиться словом «важное»), или приведет интересную проблему, которую решал этот ученый и т. д. Например, рассказ о Ферма́ естественно начать с вопроса о задачах, еще не решенных в математике, и формулировки последней теоремы Ферма́. Рассказ об А. Н. Крылове лучше всего, пожалуй, начать с вопроса о связи математики с практикой, о его достижениях в этой области (математика — кораблестроение).

5. В докладе необходимо выделить основные положения, основную идею.

Полезно при подготовке доклада ответить себе на вопросы: что я считаю главным в моем докладе? Каким образом я это оттеню во время выступления?

На заседаниях математического кружка речь может идти лишь об *ознакомлении* учащихся с теми или иными вопросами истории математики, а не *о детальном изучении* этих вопросов, к чему школьники, как правило, не подготовлены (исключение следует сделать лишь в отношении немногих особо важных вопросов истории отечественной математики). Основной формой изложения биографии математиков должна быть десятиминутка.

6. Выступление ученика выиграет, если он использует модели, схемы, фотографии, книги, диафильмы и другие иллюстративные материалы. Например, рассказывая в кружке о каком-либо математике, нужно показать его портрет, некоторые его работы, книги и статьи о нем.

§ 7. ОТДЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ТЕХНИКИ ПОДГОТОВКИ И ПРОВЕДЕНИЯ КРУЖКОВЫХ ЗАНЯТИЙ

Представим себе, что вы приступили к подготовке очередного занятия кружка. Вы уже тщательно изучили те вопросы, которые намечены к этому занятию, перерешали все отобранные вами задачи, сами все поняли и в состоянии разъяснить суть дела школьникам. Можно ли считать, что вы готовы к занятию кружка?

Увы, еще нет!

Обратим внимание на некоторые моменты, которые нельзя упустить из виду, если учитель хочет, чтобы занятия кружка было школьникам полезно и интересно.

1. Что в данной теме интересно и что трудно? Уже овладев полностью всем материалом к данному занятию, еще раз дайте себе отчет: какие именно моменты в данной теме особенно важны для школьника? Какие моменты могут или должны его заинтересовать? Какие вопросы могут (или должны) возникнуть у школьника?

2. Как воспримет школьник данную задачу? Вы подобрали для занятия какую-нибудь полезную задачу. Однако на этом работа над задачей не кончается. Покажется ли учащимся эта задача скучной или интересной? Будет ли она им посильна? Какие трудности встанут перед школьниками при ее решении? В состоянии ли учащиеся их преодолеть? Как помочь учащимся справиться с задачей при минимальной помощи со стороны учителя? Трудным задачам, которые «не получаются», обычно должны предшествовать более легкие, подготавливающие учащихся к решению трудных задач.

Для заседания кружка лучше использовать *задачи негромоздкие*, не требующие больших выкладок, но основанные на интересной идее. Если рассматривается задача, которая когда-нибудь была предложена на конкурсе или на олимпиаде, то это должно быть указано: внимание и интерес учащихся к такой задаче возрастает. Существенен порядок, в котором предлагаются задачи.

3. Искусство предложить задачу.

Часто учитель все без исключения задачи зачитывает по имеющемуся у него списку (или из задачника). Занятия пройдут оживленнее и интереснее, если условия хотя бы части задач будут не прочитаны, а рассказаны (учителем или учениками). Умение рассказать условие задачи — это настоящее искусство. Иногда для этой цели нужно перефразировать текст задачи, начать с примеров или частных случаев, придумать для задачи новую фабулу и т. д. Приведем пример.

Руководитель кружка собирается в VII классе предложить задачу: «Доказать, что произведение двух целых чисел, каждое из которых представимо в виде суммы двух точных квадратов[1], также представимо в виде суммы двух точных квадратов». В таком виде задача не заинтересовала учеников. Значительно больший интерес к этой задаче проявили школьники, когда она была предложена в другой форме:

Число 5 можно представить в виде суммы двух точных квадратов ($5 = 2^2 + 1^2$). Число 13 также можно представить в виде суммы двух точных квадратов ($13 = 3^2 + 2^2$). Эти числа (5 и 13) перемножим, получим 65. Можно ли представить это число в виде суммы двух точных квадратов?»

Ученик. Да, $65 = 8^2 + 1^2$.

Руководитель. А можно ли 65 представить еще другим способом в виде суммы двух квадратов?

Ученик. Да, $65 = 7^2 + 4^2$.

Руководитель. Как вы думаете, всегда ли так получается? А именно, пусть мы имеем два целых числа, причем каждое из них можно представить в виде суммы двух точных квадратов. Можно ли также их произведение представить в виде суммы двух точных квадратов? Оказывается, что можно! Докажите это!

Теперь, когда у школьников появился интерес к задаче, они ее без труда решат. Решение опирается на тождество

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \qquad (1)$$

После этого можно заняться углублением полученного решения. Учащимся можно предложить выяснить, нельзя ли представить иным способом то же самое выражение в виде суммы двух точных квадратов. Школьники заметят, что можно воспользоваться тождеством

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2. \qquad (2)$$

Можно затем предложить им продемонстрировать обе возможности на конкретном числовом примере, скажем на числе 365 (число дней в году):

$365 = 5 \cdot 73;\ 5 = 2^2 + 1^2,\ 73 = 8^2 + 3^2,\ 365 = 13^2 + 14^2 = 19^2 + 2^2.$

Наконец, можно обратить внимание на то, что в частных случаях обе формулы (1) и (2) дают одно и то же представление, например, при

$$a = b = c = d = 1.$$

Отобрать задачи для кружкового заседания — это не значит списать из пособий десяток задач на определенную тему.

Для того чтобы хорошо руководить кружком, нужно научиться заменять одну трудную задачу несколькими более простыми

[1] Точный квадрат — это число, которое является квадратом некоторого натурального числа.

задачами, самостоятельно составлять наводящие задачи и вопросы перед решением трудной задачи, научиться интересно рассказывать условие задачи.

4. Приучить школьников самостоятельно формулировать «подготовительные» задачи.

Вы предложили школьникам задачу, а она не выходит. Как быть? Часто удается преодолеть это затруднение, если предложить им самостоятельно придумать (и решить) «подготовительную» задачу — она может представлять собой частный случай предложенной задачи или же она может быть аналогична предложенной задаче, но несколько проще по содержанию.

5. Задачи-«двойники».

Среди членов кружка есть ученики, разные по своей подготовке, по своим знаниям. Нельзя допустить, чтобы учащийся, который раньше решил предложенную задачу, сидел и скучал или мешал другим. Поэтому желательно, чтобы по каждой более или менее сложной задаче у учителя имелся один или несколько дополнительных вопросов или родственных задач («задач-двойников»), которые он может предложить ученикам, решившим задачу раньше других. Такие вопросы могут носить характер дополнительного исследования.

6. Использование ошибок.

Очень оживленно воспринимаются в кружке *«задачи на выявление ошибки»*. Речь идет не только о софизмах, но и об ошибках, допускаемых самими школьниками. Не нужно спешить исправлять каждое ошибочное утверждение школьника — лучше сначала поставить это утверждение на обсуждение всего кружка.

С примерами подобного рода мы уже сталкивались в стенограмме тематического занятия (§ 2 этой главы).

Если школьники даже не допускают ошибок, то все же нередко целесообразно проверить, насколько они «устойчивы» против типичных ошибок.

7. Ценность привлечения местных данных и данных сегодняшнего дня.

Кружковое занятие выигрывает, если в его работе используются *местные данные* (сведения о народном хозяйстве и истории родного края, города, колхоза; сведения о достижениях земляков; названия рек, городов, сел своего края, названия улиц и памятников своего города и т. п.). Использование *данных сегодняшнего дня*, в частности, данные из последних газет и журналов, придает свежесть работе кружка.

Приведем несколько примеров. На заседании кружка, которое проходило в апреле 1966 года, сообщение «Машины, которые умеют вычислять», начиналось так: «Вчера на съезде КПСС президент Академии наук М. В. Келдыш рассказал, что у нас имеются машины, которые выполняют около миллиона арифметических действий в секунду».

Другой пример. Сообщение «Конические сечения» было начато так: «Вы, наверно, читали в газетах, что несколько дней назад советская ракета стала спутником Луны. По какому же пути мчится она теперь вокруг Луны?» И далее идет рассказ о свойствах эллипса.

8. Предварительные задачи к будущим занятиям.

Для того чтобы трудные темы стали для членов кружка более доступными и более интересными, учащихся нужно несколько подготовить к этим темам. Это достигается, во-первых, продуманной последовательностью в выборе тем. Так, например, если намечено на занятиях кружка X класса поставить темы «Геометрия Лобачевского» и «Геометрия на сфере», то лучше сначала рассмотреть «Геометрию на сфере», а потом уже «Геометрию Лобачевского», ибо первая тема облегчает школьникам понимание второй.

Во-вторых, на заседаниях кружка и в заданиях на дом желательно предлагать задачи, подготовляющие учащихся к предстоящей теме. Если, например, намечена тема «Экстремум квадратного трехчлена», то перед этим можно предложить такую задачу: «Найдите значение выражения $2x^2+7$ при x, равном: -5; -2; 5; 1; 2; 4. При каком (действительном) значении x $2x^2+7$ имеет наименьшее значение? Решите аналогичную задачу относительно x^2-2x+2».

9. Иметь в запасе самый занимательный материал.

Нельзя гарантировать, что выступления учащихся по намеченной теме пройдут удачно. Может случиться, что задачи, отобранные руководителем для данного занятия кружка, окажутся трудными или недостаточно интересными для членов кружка. Поэтому руководителю всегда нужно иметь проверенный, несомненно занимательный, интересный и доступный материал, который он может использовать в случае крайней необходимости. Тем самым он сумеет ослабить впечатление от плохого доклада или неудачных задач. Это могут быть занимательные задачи, фокусы, игры, приемы быстрого счета, небольшие сообщения и т. п.

В конце заседания кружка желательно время от времени предлагать учащимся математические развлечения, забавные задачи, софизмы, приемы быстрых вычислений и т. д. Желательно, чтобы на большинстве занятий кружка было рассказано или показано что-либо неожиданное, но в то же время несомненно интересное.

10. О домашних заданиях. Желательно предлагать членам кружка задания на дом, нужно только каждый раз отчетливо представить себе, насколько то или иное задание посильно для учащихся, какие трудности могут возникнуть у них при его выполнении. На первых порах лучше предлагать на дом после каждого занятия кружка не более 2—3 задач. Если окажется, что все члены кружка активно выполняют такие задания, то можно эти задания увеличить. В то же время следует указать учащимся пособия, в которых они смогут найти еще другие задачи по той же теме (полезно указать номера самых интересных задач). Наиболее активные члены кружка, несомненно, воспользуются этими указаниями.

§ 8. ЗАКРЕПЛЕНИЕ МАТЕРИАЛА. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ЗАНЯТИЕ КРУЖКА

Если не проводить продуманно систематического закрепления, то в сознании учащихся мало останется от кружковых занятий. Но как же это сделать? Укажем на некоторые возможности.

1. Учащимся рекомендуется вести аккуратные записи на заседаниях кружка.

2. Материалы, рассмотренные в кружке, фиксируются в журнале кружка и таким образом сохраняются. Членам кружка всегда открыт доступ к журналу.

3. На заседаниях кружка предлагаются задачи (а также развлечения) по темам, которые рассматривались в кружке раньше (в том числе и в прошлые годы).

4. Материалы, разобранные на заседаниях кружка, служат основой при составлении и отборе текстов задач для различных школьных математических соревнований.

5. Учитель поощряет тех членов кружка, которые на уроках, а также при выполнении домашних и контрольных работ применяют знания, полученные в кружке (например, приемы счета, и т. п.).

6. Закреплению рассмотренного в году материала посвящается последнее (в году) заседание кружка. Это заседание кружка должно пройти как *итоговое* заседание. Важную часть такого заседания составляет беседа руководителя о работе кружка за истекший год. Какие наиболее важные вопросы были рассмотрены в году? Чему научились члены кружка в течение года? Какие полезные навыки приобрели они? Что они узнали нового? Проводя беседу, учитель может предложить попутно ряд интересных устных упражнений и задач. На этом же заседании члены кружка решают задачи (главным образом занимательные) по материалу, рассмотренному в году.

Значительная часть заключительного заседания может быть отведена «развлекательной» математике (софизмы, фокусы, логические задачи, математические иллюзии и т. д.). На итоговом заседании естественно находит себе место математическая викторина на тему «Чему я научился в кружке?». Желательно, чтобы члены кружка выступили и поделились впечатлениями о работе кружка.

На этом заседании учителю нужно также кратко рассказать учащимся о перспективах работы кружка в будущем году, указать доступные материалы для самостоятельного изучения летом (для желающих).

Литература о математических кружках. В. Г. Болтянский и И. М. Яглом [2]; Н. Я. Виленкин [3]; С. И. Шварцбурд [1]; М. Б. Гельфанд и В. С. Павлович [1]; Е. К. Серебровская [1]; А. А. Колосов [1].

Глава II

ТЕМАТИКА КРУЖКОВЫХ ЗАНЯТИЙ

В этой главе рассмотрим темы, которые могут быть предметом занятий математического кружка. К большинству из них даны примерные планы; приведены образцы задач для отдельных занятий. Рядом с каждой темой указано, в каком классе (по мнению авторов) ее наиболее целесообразно рассмотреть *впервые*, какую форму проведения занятия (тематическое занятие, десятиминутка, беседа и т. п.) по этой теме стоит предпочесть. Разумеется, все эти указания (как и некоторые другие, о которых скажем ниже) даны *лишь для первой ориентировки* начинающего учителя и ни в коей мере не должны связывать его инициативу.

Вся глава разбита на 16 параграфов. Содержащийся в них список тем не следует рассматривать как обязательную программу для кружковых занятий. Список этот дан с большим запасом: здесь значительно больше тем, чем учитель реально успеет рассмотреть с учащимися в своем кружке. Возможно, что для одного контингента учащихся придется отобрать совершенно иные темы, чем для другого.

По каждой теме указана рекомендуемая литература. Эта библиография, конечно, не претендует на полноту. Как правило, отдавали предпочтение более распространенным работам, в частности, избегали ссылок на книги и статьи, опубликованные более двадцати лет назад или помещенные в редких изданиях.

Для того чтобы облегчить учителю ориентацию в данной главе, мы отмечаем восклицательными знаками (одним, а иногда и двумя) наиболее ценные (для кружковых занятий) темы, книги.

Кружковые занятия принесут учащимся значительно бóльшую пользу, если на каждом занятии школьникам будет указана для внеклассного чтения литература (книга, глава, параграф, задачи), непосредственно примыкающая к этому занятию и дополняющая его. Литература, рекомендуемая для внеклассного чтения, отмечена восклицательными знаками.

Предупредительными звездочками (одной или двумя) отмечены более трудные темы, вопросы, задачи, книги, в частности те задачи, которые предназначены для учащихся более старшего класса.

Запись вида «Часть II, глава 3, § 7» означает, что данная тема рассмотрена в соответствующем параграфе части II настоящей книги.

§ 1. АРИФМЕТИКА НА КРУЖКОВЫХ ЗАНЯТИЯХ

(!) 1. Задачи, решаемые «с конца»

(V—VI классы, тематическое занятие)

Одной из полезных схем поиска решения математической задачи является «схема обращения», или схема решения задачи «от конца к началу». По существу, это есть хорошо известный «аналитический метод решения». Цель данного занятия — ознакомить учащихся с этим приемом еще в курсе арифметики.

Часть II, глава 1, § 2.

Литература. (!) Д. Пойа [1] стр. 152—157; И. И. Александров и А. И. Александров [1]; [!] Б. А. Кордемский [1], задачи 217—219; В. Ф. Широков [1], задачи 67, 68, 72.

2. Переливания, дележи, переправы при затруднительных обстоятельствах

(V—VI классы, тематическое занятие)

Задачи по данной теме очень полезны для развития смекалки школьников. Для решения некоторых задач на переливание можно воспользоваться способом обращения (см. предыдущую тему). В книге Я. И. Перельмана [3] приведен любопытный прием автоматического решения задач на переливание, основанный на применении... бильярдного шарика!

Часть II, глава 1, § 5.

Литература. (!) Б. А. Кордемский [1]; Я. И. Перельман [4], головоломки 23—26, и [3], стр. 233—238; Г. Б. Поляк [1], стр. 79—85.

(!) 3. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель

(VI класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) занимательные задачи, решение которых сводится к нахождению НОК или НОД нескольких чисел; 2) алгоритм Евклида для разыскания НОД двух чисел.

Часть II, гл. 1, § 4.

(!) 4. Числа-великаны и числа-малютки

(V—VI классы, тематическое занятие или две десятиминутки)

Примерное содержание: 1) упражнения на сопоставление наших непосредственных представлений о больших числах с результатами расчета; 2) краткая запись чисел, заканчивающихся большим числом нулей; 3) единицы измерения астрономических расстояний; 4) запись и чтение малых чисел.

Литература. (!) В. Литцман [1]; Д. Д. Галанин [1]; (!) Я. И. Перельман [1], гл. IX—XI и [4], гл. VII; Щ. Еленьский [1].

5. Запись цифр и чисел у разных народов

(V—VI классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) цифры у разных народов (римские цифры; использование букв в качестве цифр у древних греков, древних славян и др.); 2) непозиционные системы записи чисел; 3) особенности нашей записи чисел (десятичная, позиционная); 4) цифра нуль.

Литература. А. К. Сушкевич [1]; И. Я. Депман [6]; Я. И. Перельман [1]; Г. Н. Берман [2], гл. 1; ЭЭМ, [1], т. 1 (статья И. Г. Башмаковой и А. П. Юшкевича).

6. Как умножали и делили в старину

(V класс, десятиминутка)

Литература. (!) Я. И. Перельман [1], гл. III.

(!) 7. Занимательные задачи на проценты

(VI класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) сообщение «Цена одного процента» (желательно для этого сообщения использовать свежие статистические данные); 2) решение занимательных задач; 3) выражение относительной погрешности в процентах.

Часть II, глава 1, § 3.

Литература. И. И. Александров и А. И. Александров [1]; В. Ф. Широков [1].

8. Счет времени

(V—VI классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) рассказ об истории календаря; 2) примеры задач, связанных с календарем и измерением времени; 3) проект упрощения календаря, рассматриваемый Организацией Объединенных Наций; 4) компактный табель-календарь.

Литература. ДЭ, стр. 145—158 (статья Я. И. Шура); Ф. С. Завельский [1]; И. Я. Депман [8], гл. V; М. Б. Балк [3], стр. 48—49.

9. Арифметические ребусы

(V—VI классы, тематическое занятие)

Кто-то написал числа, затем выполнил (и притом правильно) над ними арифметические действия, записал результаты; до вас дошла эта запись в искаженном виде, некоторые цифры оказались замененными звездочками, точками, вопросительными знаками или буквами. Как восстановить по этой записи исходную запись? Такого рода задачи называются арифметическими ребусами. Решение их требует смекалки, умения логически рассуждать и хорошего понимания арифметики. Задача как бы ставит ученика в положение исследователя, распутывающего зашифрованный текст.

Часть II, глава 1, § 8.

Литература. Б. А. Кордемский [1]; Я. И. Перельман [1]; П. Ю. Германович [3], раздел V; Г. Б. Поляк [1].

10. Как возникли простые и десятичные дроби

(V—VI классы, десятиминутка)

Литература. И. Я. Депман [6], стр. 105—110, [8], гл. IV; Г. И. Глейзер [1]; М. Я. Выгодский [1].

11. Как возникла десятичная система мер

(V — VI классы, одна-две десятиминутки)

Литература. (!) И. Я. Депман [1], [2], [8]; Е. Н. Горячкин [1]; Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2].

12. Загадка простых чисел

(V—VI классы, одна-две десятиминутки)

Примерное содержание: 1) числа простые и составные; 2) решето Эратосфена; 3) наличие в натуральном ряду сколько угодно больших интервалов, свободных от простых чисел; 4) бесконечность множества простых чисел; 5) о формулах, дающих простые числа; «числа Ферма»; 6) количество простых чисел в арифметической прогрессии; 7) распределение простых чисел. Работы Чебышева. Постулат Бертрана; 8) представление натуральных чисел в виде сумм простых чисел. Проблема Гольдбаха.

Литература. Г. Н. Берман [4], гл. XI и XII; Г. Радемахер и О. Теплиц [1]; Р. Курант и Г. Роббинс [1]; Б. В. Гнеденко [1], § 14; В. Серпинский [4].

§ 2. ГЕОМЕТРИЯ НА КРУЖКОВЫХ ЗАНЯТИЯХ V—VI КЛАССОВ

Уже в V—VI классах могут быть предложены учащимся на кружковых занятиях такие упражнения, которые значительно облегчат им усвоение дальнейшего курса геометрии. Мы имеем в виду в первую очередь упражнения, которые позволяют школьнику проследить за фигурами в их образовании и изменении, упражнения, которые позволяют школьнику самому, своими руками создавать и изменять те или иные геометрические фигуры.

Рассмотрим несколько таких тем.

1. Геометрические упражнения со спичками

(V класс, тематическое занятие)

Образцы задач: 1. Составьте 2 треугольника из 6 спичек; из 5 спичек.

2. Составьте 4 треугольника из 9 спичек.

3. Как составить из 6 спичек правильный шестиугольник?

4. Составьте 4 равных квадрата из 16 спичек, а теперь — из 15 спичек (14, 13, 12 спичек).

Литература. Б. А. Кордемский [1], гл. 3; Г. Б. Поляк [1].

2. Задачи на разрезание и перекраивание фигур

(V—VI классы, тематическое занятие)

Речь, по существу, идет о задачах на равносоставленные многоугольники. Однако в V—VI классах лучше термин «равносоставленность» не употреблять. Предварительное вычисление площадей отдельных фигур иногда дает ключ к решению задачи. Можно рассмотреть несколько примеров, иллюстрирующих теорему: «Если каждую из двух фигур Φ_1 и Φ_2 можно перекроить в фигуру Φ_3, то фигуру Φ_1 можно перекроить в Φ_2».

Пособия: линейки, карандаши, белая (в клеточку) и цветная бумага, ножницы.

Часть II, глава 1, § 6.

Литература. Б. А. Кордемский и Н. В. Русалев [1]; Б. А. Кордемский [1].

3. Геометрические упражнения с листком бумаги

(V—VI классы, тематическое занятие)

Часть II, глава 1, § 7.

Литература. Б. А. Кордемский и Н. В. Русалев [1].

4. Геометрия и оптические иллюзии

(VI класс, одна-две десятиминутки)

Часть II, глава 1, § 10.

(!) 5. Простейшие графы

(VI класс, тематическое занятие)

Представление о топологических свойствах фигур (то есть о таких свойствах, которые сохраняются, если фигуру деформировать без разрывов и склеивания) доступно ученику, только приступающему к занятиям по геометрии.

На занятии, посвященном данной теме, ученик встретится с некоторыми неразрешимыми задачами (например, невозможность обхода какой-то данной, начерченной линии одним росчерком; неразрешимость задачи Эйлера о мостах и т. п.), с необходимостью доказать неразрешимость этих задач. Все это делает данную тему весьма ценной.

Примерное содержание: 1) что такое граф? Примеры связных плоских графов, которые удается обойти («одним росчерком»); 2) примеры графов, которые нельзя обойти одним росчерком. Доказательство невозможности обхода; 3) задача Эйлера о мостах; 4) обход лабиринтов; *5) графы и сетевое планирование.

Образцы задач: 1. Обойдите одним росчерком фигуры на рисунке 2 («подпись Магомета») и на рисунках 3—6.

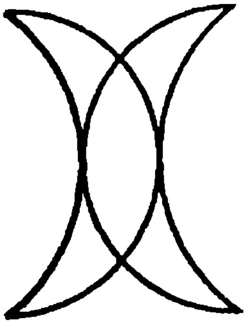


Рис. 2.

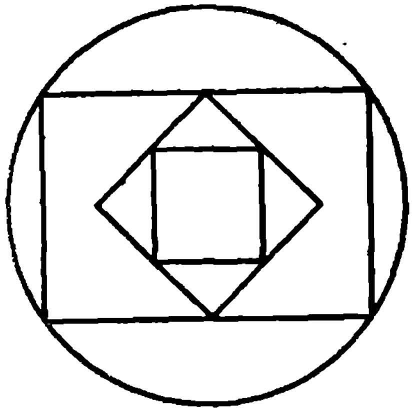


Рис. 3.

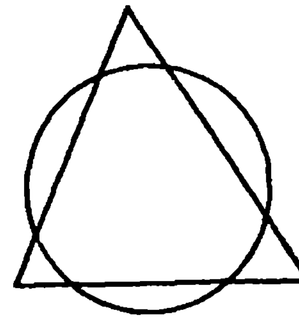


Рис. 4.

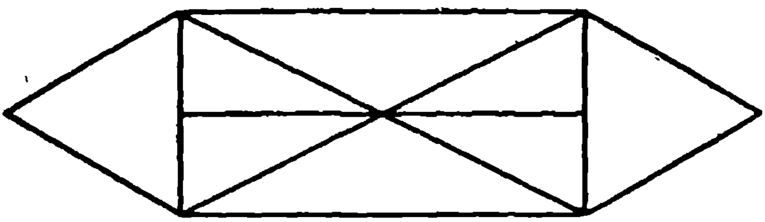


Рис. 5.

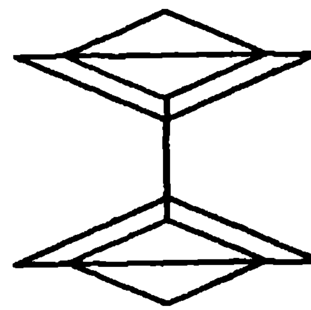


Рис. 6.

2. Три дома и три колодца нужно соединить тропинками так, чтобы каждый дом был соединен с каждым из колодцев, но чтобы тропинки не пересекались. Как показать, что это сделать невозможно?

Литература. (!) О. Оре [1]; Я. И. Перельман [3]; Г. Радемахер и О. Теплиц [1]; Л. И. Головина [1]; И. А. Зайденман и А. Я. Маргулис [1]; Ф. Ф. Нагибин [2].

§ 3. ВОПРОСЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ В КРУЖКАХ V—VI КЛАССОВ

(II) 1. Прикидка

(V—VI классы, две-три десятиминутки)

Часть II, глава 1, § 9.

Литература. М. Б. Гельфанд и В. С. Павлович [1].

(I) 2. Приближенный подсчет

(V—VI классы, тематическое занятие)

Часть II, глава 1, § 9, п. 1.

Литература. (!) В. М. Брадис [1], [2]; М. Г. Васильев [1]; Я. И. Перельман [1], гл. VIII.

3. Упражнения на быстрый подсчет

(V—VIII классы)

Часто приходится наблюдать, что ученик, получивший пример на вычисление, не задумываясь, сразу начинает выполнять указанные действия в указанном порядке, какими бы громоздкими они ни оказались. А между тем нередко бывает, что достаточно было бы только немного изменить порядок действий, вынести какой-нибудь множитель за скобки или проделать несколько других подобных простейших преобразований, опирающихся на основные законы арифметики, и вычисления значительно упростились бы.

Попробуйте предложить ученику VIII класса вычислить $\sqrt{36^2 + 48^2}$. Проверьте, насколько экономными будут его вычисления. Ученик, которому мы предложили этот пример, стал поскорее возводить в квадрат число 36, затем 48, затем сложил результаты и, наконец извлек корень из суммы.

На самом деле можно сделать проще: $\sqrt{36^2 + 48^2} = \sqrt{12^2(3^2 + 4^2)} = \sqrt{12^2 \cdot 5^2} = 12 \cdot 5 = 60$.

Только в результате систематических упражнений у учащихся может выработаться умение в каждом конкретном случае наиболее целесообразно производить вычисления.

Нельзя довольствоваться тем, что при решении той или иной вычислительной задачи ученик не допустил ошибки и получил правильный ответ. Исключительно важно выяснить, насколько проведенные учащимися вычисления экономны. Ни одно неэкономное вычисление нельзя оставить без внимания. Кроме того, необходимо на занятиях кружка время от времени предлагать на 3—4 минуты задачи типа: «Как вычислить *в уме* такое-то выражение?», «Как *проще всего* вычислить такое-то выражение?»

Такого рода упражнения могут быть совсем не связанными с темой данного кружкового занятия. Члены кружка обычно встречают подобные вычислительные упражнения с интересом и даже азартом.

Упражнения. Вычислить устно:

1. $\sqrt{48} \cdot \sqrt{75}$. 2. $\sqrt{1 - \left(\frac{16}{65}\right)^2}$. 3. $34 \cdot 48 + 18 \cdot 12 + 23 \cdot 24$. 4. $\frac{120 \cdot 239 - 119}{119 \cdot 239 + 120}$. 5. $\left(4\frac{1}{5} - 6\frac{4}{5} + 3{,}6\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right)$. 6. Сколько стоит 1 *кг* конфет, если $9\frac{1}{4}$ *кг* стоят 27 руб. 75 коп.? 7. $195 \cdot 6$. 8. $195 \cdot 38$. 9. $\sqrt{\frac{4\frac{1}{2} \cdot 0{,}12 \cdot 2{,}7}{0{,}05}}$. 10. $63 + 29$. 11. $594 + 267$.

12. $158-82$. 13. $42\cdot 99$. 14. $32\cdot 197$. 15. $7\frac{3}{4}-15\frac{2}{13}+12\frac{1}{3}-3+\frac{11}{12}$. 16. $(\sqrt{15ab}-\sqrt{13ab})^2\cdot(\sqrt{15ab}+\sqrt{13ab})^2$, при $a=0{,}05$, $b=9$. 17. Пусть $x=\sqrt{R^2+d^2}-R$ (если R — радиус земного шара, то x — высота, на которую нужно подняться над поверхностью моря, чтобы линия горизонта отстояла от наблюдателя на d километров). Как проще всего вычислить это выражение при $R=6370$ *км*, $d=100$ *км*?

4. Собирательный способ умножения чисел

(V—VI классы, десятиминутка)

См. стенограмму в главе 1, § 3.

5. Занятия со счетами

(V—VI классы, две-три десятиминутки)

Примерное содержание: 1) исторические сведения о возникновении счетов; 2) ознакомление с различными приемами вычисления на счетах (не рассмотренными на уроках); 3) упражнения «Кто быстрее вычислит?» (такие упражнения могут быть предложены и на других занятиях, не посвященных счетам).

Литература. Я. И. Перельман [1]; (!) Н. Е. Кобринский и В. Д. Пекелис [1].

6. Арифмометр

(V—VII классы)

Примерное содержание: 1) упражнения по выполнению арифметических действий на арифмометре (несколько десятиминуток); 2) каким образом удается арифмометру вычислять быстрее человека? Устройство арифмометра Однера и принцип его действия (беседа учителя); 3) если в школе имеются несколько арифмометров, то можно проводить упражнения «Кто скорее вычислит?».

Литература. В. М. Брадис [2]; (!) Н. Е. Кобринский и В. Д. Пекелис [1], стр. 115—125.

7. Простейшие приближенные формулы

(VII класс, десятиминутка)

Литература. В. М. Брадис [1], [2].

8. Предшественники электронных вычислительных машин

(VI класс, беседа учителя или две-три десятиминутки)

Примерное содержание: 1) исторические сведения о счетных приборах и машинах; 2) абак; 3) счеты; 4) машина Паскаля; 5) арифмометры; 6) понятие о счетноаналитических (перфорационных) машинах.

Литература. (!) Н. Е. Кобринский и В. Д. Пекелис [1]; (!) М. С. Тукачинский [1]. Диафильм «Счетная техника», 1961 г. (Автор А. М. Пышкало).

(!!) 9. Современные электронные цифровые машины и их применение

(VI класс, беседа или несколько десятиминуток)

Примерное содержание: 1) постоянный рост объема вычислений, которые приходится сейчас выполнять; 2) появление электронных цифровых машин; их быстродействие, программное управление; 3) некоторые характеристики математических машин наших дней; 4) примеры практического применения таких машин.

Литература. Кинофильм «Покорение чисел» 1960, 1 ч. (Ленинградская студия научно-популярных фильмов); (!) Н. Е. Кобринский и В. Д. Пекелис [1]; М. С. Тукачинский [1]; ДЭ. [1], стр. 427—452 (статьи Ю. И. Соколовского и В. М. Глушкова); Я. И. Перельман [2].

§ 4. МНОЖЕСТВА, АЛГОРИТМЫ, ВЫСКАЗЫВАНИЯ

(V — VIII классы)

Понятия «множество» и «алгоритм» относятся к самым важным понятиям математики сегодняшнего дня. Эти понятия вполне доступны учащимся V—VIII классов. Ниже в этом параграфе приведем перечень тем, которые помогут ученику усвоить эти понятия.

В математике приходится постоянно иметь дело с *высказываниями*. Ниже будут рассмотрены некоторые простейшие вопросы, связанные с образованием высказываний и их доказательством. Знакомство в кружке с исчислением высказываний и более сложными логическими вопросами можно отложить на более поздний срок (см. § 8).

(!!) 1. Множества

(V—VIII классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) разнообразные примеры множеств, предлагаемые руководителем кружка и учащимися; 2) элементы множества, подмножества, знаки включения; 3) объединение, пересечение, разность множеств; примеры; 4) равночисленные множества; примеры на установление равночисленности двух множеств без подсчета числа элементов у каждого из них;* 5) бесконечные множества; примеры равномощных бесконечных множеств (натуральный ряд и множество всех точных квадратов; отрезок и прямая и др.); 6) мощность множества рациональных чисел; 7) мощность континуума;** 8) проблема континуума.

Часть II, глава 2, § 1.

Литература. (!) Н. Я. Виленкин [4]; (!) В. Серпинский [1]; (!) Г. Радемахер и О. Теплиц [1]; Р. Курант и Г. Роббинс [1].

(!) 2. Алгоритмы

(V—VIII классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) примеры однотипных задач; понятие алгоритма; 2) примеры алгоритмов в школьных курсах арифметики, алгебры, геометрии (алгоритм сложения многозначных чисел; алгоритм нахождения НОД и НОК; алгоритм в решении задачи на построение; алгоритм извлечения квадратного корня и др.); формула как алгоритм; 3) более подробный анализ отдельных алгоритмов, расчленение их на отдельные шаги (например, алгоритм Эратосфена для отбора простых чисел; алгоритм обхода шахматной доски конем; алгоритм обхода лабиринта и др.); 4) историческая справка о происхождении термина «алгоритм»; 5) программа для математической машины как разновидность алгоритма.

Часть II, глава 2, § 2.

Литература. Б. А. Трахтенброт [1]; (!) Н. Е. Кобринский и В. Д. Пекелис [1].

3. Теоремы: прямая, ей обратная и противоположная

(VII—VIII классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) высказывания, примеры высказываний; отрицание высказывания; возможность образования более сложных высказываний с помощью логических связок «и», «или», «либо..., либо...», «если..., то ...»; 2) теорема как высказывание, силлогистическая форма записи теоремы; примеры на выделение в теореме условия и заключения; 3) опровержение ложных утверждений; примеры; 4) теоремы, обратные данным, и теоремы, противоположные данным; примеры; 5) если верна теорема, обратная данной, то верна ли данная теорема и верна ли теорема, противоположная данной? Примеры; 6) логические ошибки в доказательствах теорем, основанные на смешении прямой теоремы и обратной (примеры).

Часть II, глава 2, § 3.

Литература. И. С. Градштейн [1]; А. И. Фетисов [1]; Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2], гл. 1, § 1.

4. Доказательство способом «от противного»

(VII—VIII классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) вспомнить пример какого-либо не сложного доказательства теоремы способом «от противного» из школьного курса математики; сформулировать, в чем сущность этого способа доказательства; 2) применить рассуждения «от противного» в «задачах на угадывание чисел», в простейших «доказательствах невозможности» и в других доказательствах теорем.

Часть II, глава 2, § 4.

Литература. И. С. Градштейн [1].

5. Достаточные и необходимые условия

(VIII класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) выделение из математического предложения утверждаемого факта (заключения) и условия; примеры; 2) понятие достаточного условия; примеры; 3) понятие необходимого условия; примеры; 4) примеры условий, одновременно достаточных и необходимых, только достаточных, только необходимых; 5) смысл выражений «те, и только те», «тогда, и только тогда» и т. п.; 6) решение задач, в формулировках которых участвуют термины «достаточно» или «необходимо».

Часть II, глава 2, § 5.

Литература. Б. И. Крельштейн [1]; П. С. Моденов [1].

6. Алгоритмы ускоренных вычислений

(VII—VIII классы, несколько десятиминуток)

Рассматриваемые в начале школьного курса алгебры формулы сокращенного умножения позволяют получить эффективные и увлекательные для учащихся алгоритмы ускоренных вычислений. Перечислим некоторые из них.

Возведение в квадрат чисел, близких к 100, на основании формулы: $(100 \pm a)^2 = (100 \pm 2a) \cdot 100 + a^2$. Аналогичный прием для возведения в квадрат чисел, близких к 1000. Умножение двух трехзначных (или двух двузначных) чисел, близких к 100, на основании тождества:

$x \cdot y = (x + b) \cdot 100 + ab$, если $x = 100 + a$, $y = 100 + b$. Аналогичный прием умножения чисел, близких к 1000. Возведение в квадрат чисел, близких к 50. Возведение в квадрат чисел, близких к 500.

Хотя указанные приемы, несомненно, полезны сами по себе, основная их ценность состоит в том, что они иллюстрируют на раннем этапе изучения алгебры полезность этого предмета. Поэтому необходимо не ограничиваться сообщением того или иного алгоритма для выполнения вычислений, но обязательно дать его алгебраическое обоснование.

Часть II, глава 2, § 6.

Литература. В. А. Утемов [1]; Г. Н. Берман [1].

7. Занимательные задачи на построение

(VII—VIII классы, тематическое занятие)

Решение каждой задачи на построение приводит к некоторому алгоритму. Одна из основных целей данной и двух последующих тем—приучить учащихся к четкой формулировке такого рода алгоритмов.

Некоторые из рассматриваемых на этом занятии задач целесообразно сопроводить полным исследованием.

Желательно сделать занимательной фабулу отдельных задач. В частности, полезно учесть, что школьники VII—VIII классов с интересом решают задачи на «восстановление стертых фигур».

Часть II, глава 2, § 7.

Литература. Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [1], [2]; Д. О. Шклярский и др. [1], ч. 2; Н. Ф. Четверухин [1]; Д. И. Перепелкин [1]; Б. Н. Делоне и др. [1]; Н. А. Глаголев [2]; ЭЭМ, т. IV, стр. 160—204 (статья Н. М. Бескина и др.).

8. Геометрические построения с различными чертежными инструментами

(VII—VIII классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) понятие о построениях только одним циркулем; теорема Мора—Маскерони; 2) конструктивные возможности одной линейки; теорема Понселе—Штейнера; 3) понятие о построениях другими наборами инструментов; 4) решение задач.

Часть II, глава 2, § 8.

Литература. Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [1], [2]; С. И. Зетель [1]; Я. И. Перельман [3]; А. Н. Костовский [1]; ЭЭМ, т. IV, стр. 205—228 (статья Ю. И. Манина).

9. Геометрические построения при наличии недоступных точек

(VII—VIII классы, тематическое занятие)

Часть II, глава 2, § 9.

Литература. Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [1], [2]; И. И. Александров [1]; ЭЭМ, т. IV, стр. 177—181 (статья Н. М. Бескина и др.).

(I) 10. Разыскание точечных множеств на плоскости

(VII—VIII классы, тематическое занятие)

Рассмотренные выше (в темах 1 и 3—5) понятия находят, в частности, реальные применения при решении задач на разыскание точечного множества по характеристическому свойству его точек («задач на геометрические места»). Заслуживает внимания общая схема поиска решения задач на построение «методом геометрических мест»; умение провести рассуждение по такой схеме важно не только для конструктивной геометрии.

Примерное содержание: 1) определение ГМТ; примеры; 2) формулировка двух взаимнообратных предложений, которые необходимо доказать, чтобы убедиться, что фигура является искомым ГМТ; 3) примеры, когда ГМТ являются точка, несколько точек, кусок плоскости; когда ГМТ вовсе не существует; линии, которые определяются как ГМТ (парабола, эллипс и др.); 4) построения методом ГМТ.

Некоторым из рассматриваемых задач желательно придать занимательную фабулу.

Часть II, глава 2, § 10.

Литература. Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [1], [2]; А. А. Стражевский [1]; Д. И. Перепелкин [1]; А. И. Маркушевич [2]. Диафильм «Геометрические места точек на плоскости», 1960 (автор Г. В. Воробьев); (!) Д. О. Шклярский и др. [1], ч. 2; (!) А. А. Леман [1], стр. 83—85.

(II) 11. Понятие о программировании на электронных цифровых машинах

(VII—IX классы, одно или два тематических занятия)

Примерное содержание: 1) краткие сведения о современных математических машинах; 2) команды для электронной цифровой машины; 3) как кодируются числа и команды для электронных цифровых машин; 4) программа — алгоритм, доступный данной математической машине; примеры программ; *5) программы с циклами; *6) переадресация; * 7) пути усовершенствования программирования.

Литература. М. С. Тукачинский [1]; Р. С. Гутер и др. [1]; В. А. Трахтенброт [1]; Б. В. Гнеденко и др. [1].

*12. Алгоритмически неразрешимые задачи

(VIII класс, беседа учителя или десятиминутка)

Примерное содержание: 1) вопрос о существовании решения и вопрос о возможности получения этого решения данными средствами; 2) примеры задач, для решения которых до сих пор не найден алгоритм (десятая проблема Гильберта и др.); 3) примеры алгоритмически неразрешимых задач: решение уравнения пятой степени в радикалах, удвоение куба (только циркулем и линейкой), трисекция угла, построение правильного семиугольника, квадратура круга и спрямление окружности; задача о делении отрезка пополам только линейкой;** 4) понятие о проблеме тождества слов.

Литература. Б. А. Трахтенброт [1]; Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [1]; В. Д. Чистяков [1].

§ 5. НА СТЫКЕ АРИФМЕТИКИ И АЛГЕБРЫ

1. Недесятичные системы счисления

(VII класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) особенности нашей привычной системы записи чисел; 2) запись целых чисел в недесятичных системах счисления; 3) переход от десятичной записи числа к записи в недесятичной системе счисления; 4) фокусы, основанные на таких переходах; 5) понятие о недесятичных записях дробных чисел; 6) понятие об арифметических действиях в недесятичных системах счисления; 7) понятие о применении недесятичных систем счисления в современной машинной математике; двоично-десятичная и другие «смешанные» системы записи чисел.

Часть II, глава 3, § 1.

Литература. (!) С. В. Фомин [1]; (!) Г. Н. Берман [4]; ЭЭМ, кн. I, (статья И. Г. Башмаковой и А. П. Юшкевича); (!) Я. И. Перельман [1], гл. 4 и др.; В. Г. Болтянский и И. М. Яглом [2].

2. Любопытные свойства натуральных и рациональных чисел

(VII—VIII классы, тематическое занятие)

Примерное содержание. Применение простейших понятий и формул курса алгебры VI — VIII классов к установлению некоторых фактов, относящихся к теории чисел.

Часть II, глава 3, § 2.

Литература. В. Серпинский [4].

3. Как возникла алгебра?

(VII—VIII классы, десятиминутка)

Литература. Г. И. Глейзер [1]; ДЭ, стр. 322 — 327 (статья И. Я. Депмана), стр. 408 — 426 (статья В. Г. Болтянского и

Н. Я. Виленкина); М. Я. Выгодский [1]; И. Я. Депман [6], стр. 110—116 и [9]; В. Л. Минковский [1].

4. Абсолютная величина и арифметический корень

(VIII—IX классы, тематическое занятие)

Часть II, глава 3, § 3.

Литература. С. И. Новоселов [1]; И. И. Гайдуков [1].

5. Иррациональные числа

(VIII класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) исторические сведения об иррациональных числах; 2) доказательство иррациональности некоторых алгебраических чисел (например, $\sqrt[3]{7}$) и некоторых чисел, заданных в виде бесконечных десятичных дробей (например, 0,101001000100001..., 0,1357911131517...); 3) доказательство несоизмеримости некоторых отрезков (например, основания и боковой стороны равнобедренного треугольника, у которого угол при вершине равен 36°); *4) формула сложного радикала.

Литература. А. Нивен [1].

§ 6. ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

(II) 1. Чтение графиков

(VII—VIII классы, тематическое занятие)

В наших школах большое внимание уделяется приемам вычерчивания (построения) графиков различных функций. К сожалению, во многих школах еще и сейчас забывают, что график составляется для того, чтобы его читать! Таким образом, теряется практическая ценность графика как компактного и легкообозримого описания некоторого процесса.

Чтение готовых графиков (например, графиков эмпирически установленных зависимостей) должно даже предшествовать вычерчиванию графиков. Во всяком случае необходимо систематически предлагать учащимся задачи на чтение и использование готовых (не ими построенных) графиков, в первую очередь—графиков, заимствованных из различных областей естествознания и техники.

Часть II, глава 4, § 1.

Литература. Р. А. Майер [1]; А. И. Островский и Б. А. Кордемский [1].

(!) 2. Неопределенные уравнения

(VIII класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) понятие о неопределенном уравнении; что значит решить уравнение в целых числах? В натуральных числах? Примеры неопределенных уравнений с двумя неизвестными, которые имеют в области натуральных чисел единственное решение; 2) примеры задач, приводящихся к неопределенному уравнению вида $ax + by = c$. Решение этих задач; 3) всегда ли уравнение $ax + by = c$ имеет целые решения? Как найти общее решение этого уравнения по частному решению? 4) Дальнейшие примеры неопределенных уравнений с двумя неизвестными. Полное решение этих уравнений; 5) решение неопределенных уравнений и систем с тремя и более неизвестными; примеры; *6) понятие о неопределенных (или диофантовых) уравнениях степени выше первой; примеры;** 7) десятая проблема Гильберта.

Часть II, глава 4, § 2.

Литература. А. П. Киселев [1]; (!) Я. И. Перельман [2], гл. IV; А. О. Гельфонд [1]; (!) Д. О. Шклярский и др. [1], ч. I, § 6; В. Серпинский [1].

3. Максимум и минимум квадратного трехчлена

(VIII класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) нахождение максимума или минимума квадратного трехчлена путем выделения точного квадрата (на примерах). Графическая иллюстрация; 2) практические задачи, приводящие к поиску максимума и минимума квадратного трехчлена; 3) краткое изложение рассказа Л. Толстого «Много ли человеку земли нужно». Какую наибольшую площадь мог бы охватить Пахом, если бы бежал по прямоугольнику с тем же периметром? 4) Рассмотрение более сложных примеров поиска максимума и минимума.

Часть II, глава 4, § 3.

Литература. (!) И. П. Натансон [1]; С. И. Зетель [1]; (!) Я. И. Перельман [3], гл. XII, и [2].

4. Решение и исследование алгебраических уравнений и систем

(VIII класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) вспомнить определения понятий «решение уравнения» (или системы), «равносильность уравнений» (систем); 2) использование при решении уравнения предварительного исследования свойств функций, входящих в уравнение; 3) применение соображений симметрии к решению систем.

Литература. В. А. Кречмар [1]; С. И. Шварцбурд [2]; С. И. Новоселов [1]; (!) Д. О. Шклярский и др. [1], ч. I; П. С. Моденов [1]; (!) В. Б. Лидский и др. [1]; (!) В. Г. Болтянский и Н. Я. Виленкин [1]. И. Х. Сивашинский [1] и [3].

5. Метод неопределенных коэффициентов

(VIII класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) косвенное нахождение коэффициентов многочлена с помощью метода неопределенных коэффициентов (два приема: приравнивание коэффициентов при равных степенях и «прием произвольных значений»); 2) применение метода неопределенных коэффициентов к разложению многочленов на множители; 3) разложение рациональной дроби на простейшие. Применение к вычислению сумм; 4) извлечение квадратного корня из многочлена.

Часть II, глава 3, § 5.

Литература. И. Г. Мельников [1]; С. И. Новоселов [1], стр. 56—59; любой курс интегрального исчисления, раздел «Интегрирование рациональных дробей»; В. Г. Болтянский и Н. Я. Виленкин [1].

6. Непрерывное изменение

(VIII класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) примеры величин, меняющихся непрерывно с течением времени (иначе говоря, непрерывных функций от времени); 2) уточнение смысла выражения «величина непрерывно зависит от времени». Графическое изображение непрерывных функций (отсутствие разрывов у графика); 3) разъяснение содержания теоремы: «Если из двух величин $f_1(t)$ и $f_2(t)$, непрерывно меняющихся в течение некоторого отрезка времени $[a, b]$, в начальный момент ($t = a$) первая была меньше второй ($f_1(a) < f_2(a)$), а в конечный момент ($t = b$) вторая стала меньше первой ($f_2(b) < f_1(b)$), то был такой промежуточный момент c, когда эти величины были равны ($f_1(c) = f_2(c)$)» (Это свойство принимается без строгого доказательства.); 4) решение некоторых вопросов о *существовании* фигур, обладающих заданными свойствами.

Часть II, глава 4, § 5.

Литература. И. М. Яглом и В. Г. Болтянский [1], § 3; Штейнгауз [1], стр. 77.

§ 7. ГЕОМЕТРИЯ НА КРУЖКОВЫХ ЗАНЯТИЯХ VII—VIII КЛАССОВ

(I) 1. От Евклида до Лобачевского (пятый постулат и его место в истории геометрии)

(VII класс, десятиминутка или доклад)

Примерное содержание: 1) возникновение геометрии как научной системы; «Начала» Евклида; 2) формулировка пятого постулата, его место в «Началах» Евклида; 3) почему и как пытались доказать пятый постулат? (Пример такого «доказательства»); 4) окончательное решение Н. И. Лобачевским вопроса о месте пятого постулата в евклидовой геометрии.

Заметим, что в этом сообщении не предполагается рассказать учащимся о неевклидовой геометрии Лобачевского — это лучше сделать в IX—X классах.

Часть II, глава 5, § 1.

Литература. Евклид [1]; ДЭ, стр. 293—298 (статья И. Г. Башмаковой). Кинофильм «Загадка пятого постулата», 1963, 2 ч.; В. Ф. Каган [1]; ЭЭМ, кн. IV, стр. 9—48 (статья Б. А. Розенфельда).

2. Симметрия на плоскости

(VI—VIII классы, два тематических занятия)

а) *Осевая симметрия*

Примерное содержание: 1) показ фигур, обладающих осевой симметрией; 2) показ пар фигур, симметричных относительно оси; 3) симметричные фигуры в жизни, в природе, в искусстве; 4) вырезание симметричных фигур из бумаги; 5) подсчет числа осей симметрии некоторых фигур (правильный n-угольник, пара параллельных прямых и др.). Сколько осей симметрии имеют такие буквы: А, Б, В, Ж, Н, О, Т, Ш? 6) Преобразование различных фигур при симметрии; 7) примеры фигур, преобразующихся сами в себя при зеркальном отражении от прямой; 8) применение осевой симметрии к решению задач на доказательство и построение.

б) *Центральная симметрия*

Примерное содержание: 1) показ фигур, имеющих центр симметрии. Вспомнить определение центральной симметрии; 2) показ фигур, имеющих центры вращения различных порядков. Понятие о центре вращения третьего, четвертого, вообще n-го порядка; 3) задачи на построение, решаемые методом центральной симметрии.

Часть II, глава 5, § 2.

Литература. В. Г. Болтянский и И. М. Яглом [1]; Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [1]; Г. Вейль [1]; А. П. Киселев [2];

диафильмы «Осевая симметрия, ее свойства и применение при решении задач», 1965 (автор А. И. Фетисов), «Центральная симметрия», 1966, цветной (автор Ю. Н. Макарычев).

3. Применение понятия центра тяжести к решению геометрических задач

(VIII класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) краткие исторические замечания о применении механических соображений в геометрии; 2) понятия материальной точки, барицентра (центра тяжести) двух материальных точек; архимедово правило рычага; 3) барицентр любого конечного числа материальных точек (определение и основные свойства, находящие применение в геометрии); 4) как Архимед доказал теорему о трех медианах треугольника; 5) решение других задач.

Часть II, глава 5, § 3.

Литература. (1) М. Б. Балк [2], введение и § 1; Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2], § 38; В. А. Успенский [1].

4. Векторный метод в элементарной геометрии

(VIII класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) понятие вектора; геометрическое изображение суммы и разности двух векторов. Сохранение для операций сложения и вычитания векторов правил обычной алгебры чисел; 2) решение геометрических задач с помощью предыдущих понятий; 3) скалярное произведение двух векторов, обзор его свойств (коммутативность, дистрибутивность и др.); 4) решение геометрических задач с использованием понятия скалярного произведения.

Образцы задач. 1. Дан произвольный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. В каждом из треугольников $A_6A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_5A_6A_1$ отмечаются центры тяжести B_1, B_2, ..., B_6. Докажите, что в шестиугольнике $B_1B_2 \ldots B_6$ противоположные стороны равны и параллельны.

2. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Пользуясь таблицами, вычислите угол при вершине треугольника.

Литература. В. Г. Болтянский и И. М. Яглом [1]; Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2], § 39; ДЭ, стр. 397—408 (статья А. М. Лопшица). Диафильм «Векторы на плоскости», 1965 (автор А. М. Пышкало); ЭЭМ, кн. 4, стр. 292—380 (статья В. Г. Болтянского и И. М. Яглома).

5. Теорема Пифагора

(VIII класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) вспомнить формулировку теоремы Пифагора. Значение этой теоремы; 2) Пифагор и его школа (краткое сообщение ученика на 5—7 минут); 3) целочисленные пифагоровы треугольники; 4) различные доказательства теоремы Пифагора (в том числе векторное); 5) некоторые обобщения и аналоги теоремы Пифагора; 6) занимательные задачи и задачи с практическим содержанием, решаемые с помощью теоремы Пифагора.

Часть II, глава 5, § 4.

Литература. (!) В. Литцман [4]; (!) Г. Радемахер и О. Теплиц [1], § 15; (!) А. А. Колосов [1], [2], гл. VII; Г. И. Глейзер [1]; В. Серпинский [3].

6. Теорема Стюарта и ее приложения

(VIII класс, тематическое занятие)

Часть II, глава 5, § 5.

(!) 7. Теорема Птолемея

(VIII класс, тематическое занятие)

Речь идет об одной из самых интересных теорем элементарной геометрии, которую можно рассматривать как естественное обобщение теоремы Пифагора. Теорема Пифагора может быть записана в следующей форме: «В прямоугольнике ($ABCD$) произведение диагоналей (AC и BD) равно сумме произведений противоположных сторон ($AB \cdot CD + AD \cdot BC$)». Остается ли в силе это предложение для любого выпуклого четырехугольника? Да, если около четырехугольника можно описать окружность. И в этом как раз и заключается теорема Птолемея (точнее говоря, его первая теорема). Птолемей использовал ее при составлении необходимых ему для астрономических целей вычислительных таблиц, которые, по существу, являются таблицами синусов.

На занятии можно рассмотреть доказательство теоремы Птолемея и ее применение в геометрии и тригонометрии.

Часть II, глава 5, § 6.

Литература. Б. Н. Делоне и О. К. Житомирский [1]; задачи 247—252.

(!) 8. Механическая теорема Лагранжа и ее геометрические приложения

(VIII класс, тематическое занятие)

Часть II, глава 5, § 7.

Литература. (!) М. Б. Балк [2], § 7; Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2], § 38.

(!) 9. Геометрические задачи на местности

(VIII класс, тематическое занятие)

Часть II, глава 5, § 8.

Литература. П. Я. Дорф и А. О. Румер [1]; Д. М. Смычников [1]; М. А. Знаменский [1]; С. Голицын [1].

10. Как измеряют на практике длины и углы

(VII—VIII классы, доклад)

Литература. Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2], § 24; С. Н. Минчин и А. Е. Шац [1].

11. Практические приемы нахождения площадей

(VIII класс, десятиминутка или доклад)

Литература. Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2], § 30; Д. Ю. Панов [1]; Е. В. Кувчинский [1].

12. Практические приемы нахождения объемов

(VIII—X классы, десятиминутка или доклад)

Литература. Я. И. Перельман [3]; Н. А. Мацко [1]; Г. А. Данилевич [1].

13. Ошибки в геометрических рассуждениях

(VI—VIII классы, несколько десятиминуток)

Литература. В. М. Брадис и др. [1]; Я. С. Дубнов [1].

14. Шарнирные механизмы

(VIII—IX классы, доклад)

Примерное содержание. Рассказ о некоторых шарнирных механизмах, встречающихся в математике (инверсор, пантограф, трисектор и т. д.). Их применение.

Литература. Г. Радемахер и О. Теплиц [1], § 18; Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен [1], гл. V; Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [1].

§ 8. ВОПРОСЫ ЛОГИКИ И ЭВРИСТИКИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ КРУЖКЕ VIII—X КЛАССОВ

(!) 1. Исчисление высказываний и булева алгебра

(VIII—IX классы, одно или два тематических занятия)

Примерное содержание: 1) попытки создания исчислений для «вычисления истины» (Лейбниц, де Морган, Буль, Порецкий, Жегалкин); 2) высказывания: примеры высказываний, их значения истинности; 3) различные операции над высказываниями: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация и др.; их таблицы истинности; примеры; 4) основные законы, которым удовлетворяют операции отрицания, дизъюнкции и конъюнкции (в том числе: распределительные законы, правила де Моргана, правила поглощения и др.); 5) определение булевой алгебры; исчисление высказываний как одна из ее интерпретаций; 6) использование правил булевой алгебры для упрощения сложных высказываний и для решения логических задач; 7) другие интерпретации булевой алгебры (множества, события и др.).

Часть II, глава 7, § 1.

Литература. Л. А. Калужнин [1]; И. Я. Депман [5]; (!) И. М. Яглом [1]; Дж. Кемени и др. [1], гл. 1; (!) Дж. Г. Калбертсон [1], гл. V—VII; В. В. Малинин [1]; (!) Э. Кольман и О. Зих [1]; (!) А. Гржегорчик [1]; А. А. Столяр [1].

(!) 2. Алгебра контактных и релейно-контактных схем

(VIII—IX классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) контактные схемы как одна из интерпретаций булевой алгебры; 2) решение задач на применение булевой алгебры к составлению контактных схем с наперед заданными свойствами; 3) применение булевой алгебры к упрощению контактных схем; 4) понятие о булевой алгебре релейно-контактных схем.

Желательно на занятии демонстрировать *работающие* контактные схемы.

Часть II, глава 7, § 1, п. 4.

Литература. См. литературу к теме 1.

3. Предикаты и кванторы

(IX класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) понятие предиката. Примеры одноместных, двуместных, трехместных предикатов; 2) квантор существования; примеры; 3) квантор всеобщности; примеры; 4) использование логических связок и кванторов для компактной записи математических рассуждений. Примеры; 5) привлечение кванторов к правильному построению отрицаний математических высказываний.

Часть II, глава 7, § 2.

Литература. Л. А. Калужин [1]; А. А. Столяр [1].

(I) 4. Определения в математике

(IX класс, беседа учителя)

Примерное содержание: 1) объем и содержание понятия; 2) определение; требования, предъявляемые к определениям; 3) равносильные определения; примеры доказательства равносильности; 4) типичные ошибки, допускаемые при построении определений; 5) приемы, сходные с определением (объяснение слова, сравнение, указание, описание); * 6) примеры ошибочных определений в курсе стереометрии.

Часть II, глава 7, § 3.

Литература. В. В. Никитин и К. А. Рупасов [1]; Н. М. Бескин [1].

(I) 5. Использование аналогий в математике

(VIII—IX классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) об общих приемах, облегчающих поиск способа решения задачи или способа доказательства теоремы; 2) аналогия в определениях понятий; примеры; 3) аналогия в свойствах фигур; 4) использование аналогии для облегчения поиска способа доказательства теоремы или способа решения задачи; примеры; 5) применение аналогии при разыскании геометрических мест точек.

Часть II, глава 7, § 4.

Литература. Д. Пойа [1], [2]; П. М. Эрдниев [1].

(I) 6. Использование индукции в математике

(VIII—IX классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) что такое индукция? 2) Индукция при поиске математических закономерностей; примеры; 3) индукция при поиске способа решения задачи или способа доказательства теоремы; примеры; 4) использование предельного случая при поиске решения задачи.

Часть II, глава 7, § 4.

Литература. Д. Пойа [1], [2]; Л. И. Головина и И. М. Яглом [1].

7. Математическая индукция

(IX класс, одно или два тематических занятия)

Примерное содержание: 1) предварительные задачи, подготавливающие восприятие метода; 2) необходимость доказательства результатов, подмеченных на частных случаях; 3) сущность метода математической индукции. Принцип математической индукции; 4) решение задач; 5) типичные ошибки, допускаемые учащимися при применении этого метода.

Часть II, глава 7, § 5.

Литература. (!) И. Я. Депман [3]; (!) И. С. Соминский [2]; (!) Р. Курант и Г. Роббинс [1], гл. I, § 2; Д. Пойа [2], гл. VII; Н. Я. Виленкин и др. [1]; Г. В. Дорофеев и др. [1].

8. Принцип выдвижных ящиков

(IX класс, тематическое занятие)

Следующее предложение, равносильное принципу математической индукции, называют «принципом выдвижных ящиков» или «принципом Дирихле»: «Если в n ящиках имеется не меньше, чем $n+1$ вещь, то, открывая эти ящики, мы хотя бы в одном обнаружим не меньше двух вещей». Это предложение порождает определенную схему рассуждения, которая позволяет решить некоторые любопытные задачи.

Образцы задач. 1. В городе с миллионным населением найдутся ли два человека с одинаковым числом волос?

2. Вы выбрали наугад 2000 натуральных чисел и составили всевозможные разности между ними. Будет ли хотя бы одна из этих разностей делится на 1970?

Литература. Н. Б. Васильев и А. А. Егоров [1]; В. Г. Болтянский и И. М. Яглом [2].

§ 9. ПОНЯТИЕ ПЛОЩАДИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ (VIII—IX классы)

1. Равновеликие и равносоставленные фигуры

(VIII—IX классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) задачи на доказательство равносоставленности различных многоугольников; 2) транзитивность равносоставленности; 3) задачи на доказательство равновеликости различных фигур. О квадратуре круга и гиппократовых луночек; 4) понятие о теореме Бойяи—Гервина; *5) равносоставленность и равновеликость многогранников. Понятие о теореме Дена—Кагана.

Часть II, глава 5, § 1.

Литература. Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2], § 36; Д. О. Шклярский и др. [1], ч. 2, ч. 3; В. Г. Болтянский [1]; ЭЭМ, кн. 5, стр. 142—180 (статья В. Г. Болтянского).

2. Применение двоякого выражения площади (или объема) к решению геометрических задач

(VIII—X классы, тематическое занятие)

Часть II, глава 6, § 2.

Литература. (!) Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2], § 34.

3. Теорема Чевы

(VIII класс, тематическое занятие)

Часть II, глава 6, § 3.

Литература. С. И. Зетель [3]; (!) М. Б. Балк [2], § 3—4.

4. Изопериметрические задачи

(VIII класс, десятиминутка или доклад)

Основная изопериметрическая задача ставится так: из всех замкнутых плоских кривых данной длины найти ту, которая ограничивает фигуру наибольшей площади. Искомой линией оказывается окружность. Элементарное доказательство этого факта, принадлежащее Штейнеру, доступно и интересно учащимся VIII класса.

Можно также рассмотреть и другие изопериметрические задачи.

Литература. (!) Я. И. Перельман [3], стр. 279—282; (!) И. М. Яглом и В. Г. Болтянский [1]; (!) Р. Курант и Г. Роббинс [1], гл. VII, § 8—9; (!) Д. А. Крыжановский [1]; Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2], § 40; Д. Пойа [2]; ЭЭМ, кн. 5, стр. 338—347 (статья В. Г. Болтянского и И. М. Яглома).

§ 10. ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ В КРУЖКАХ СТАРШИХ КЛАССОВ

(!) 1. Примеры функций в природе и технике

(IX—X классы, две-три десятиминутки)

Литература. (!) ДЭ, стр. 342—353 (статья Н. Я. Виленкина).

2. Графики функций

Примерное содержание: 1) какой смысл вкладывается в выражение «исследовать функцию элементарными средствами»? График как наглядное изображение результатов такого исследования; 2) примеры параллельного исследования функции и вычерчивание ее графика; 3) привлечение основных геометрических преобразований к построению графиков; 4) графическое решение уравнений и систем уравнений; *5) сложение и умножение графиков.

Литература. (!) Г. Е. Шилов [2]; И. П. Гурский [1]; ЭЭМ, кн. 3 (статья В. Л. Гончарова); (!) И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль [1]; И. Х. Сивашинский [3]; С. И. Новоселов [2].

3. Что такое номограмма?

(IX класс, тематическое занятие или доклад)

Примерное содержание: 1) функциональные шкалы. Что такое номограмма? 2) Абак Декарта; 3) номограммы из выравненных точек; 4) треугольная номограмма Гиббса и ее применение в химии.

Литература. (!) Н. А. Глаголев [1]; А. А. Крамская [1]; М. В. Пентковский [1]; (!) А. А. Колосов [2], гл. X; М. Б. Балк [2], § 10.

4. Некоторые трансцендентные уравнения

(IX—X классы, тематическое занятие)

Часть II, глава 10, § 7.

Литература. В. Б. Лидский и др. [1]; П. С. Моденов [1]; Г. В. Дорофеев и др. [1]; И. Х. Сивашинский [1].

(I) *5. Решение уравнений методом неподвижной точки

(IX—X классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) примеры уравнений, возникающих из практики, которые не могут быть решены способами, известными из обязательного школьного курса математики (например, уравнение Кеплера $x - e \sin x = M$, где e и M — константы); 2) основной дефект графического способа решения — небольшая точность; 3) сущность метода неподвижной точки (иногда его называют методом итераций); условия его применимости, оценка погрешности n-го приближения; 4) примеры решения задач этим методом (в частности, извлечение квадратного корня); 5) представление о других итерационных методах.

Часть II, глава 10, § 8.

Литература. Н. Я. Виленкин [2]; Р. С. Гутер и др. [1]; М. Б. Балк [4],гл. 3, § 3.

§ 11. НЕРАВЕНСТВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

1. Что больше?

(VII—X классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: решение задач на выяснение знака неравенства между двумя функциями или числами.

Часть II, глава 9, § 1.

Литература. Г. Л. Невяжский [1]; Я. И. Перельман [2].

2. Решение неравенств

(IX класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) устные упражнения, предостерегающие учащихся от типичных ошибок; 2) решение более сложных неравенств и систем неравенств.

Литература. П. П. Коровкин [1]; С. И. Новоселов [2]; Г. Л. Невяжский [1].

(II) 3. Что такое линейное программирование?

(IX класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) примеры экономических задач, приводящих к задачам линейного программирования (в частности, транспортная задача); 2) предмет линейного программирования (почему «программирование», почему «линейное»?); 3) вспомогательные задачи на решение систем линейных неравенств; 4) решение с учащимися простейших экономических задач линейного программирования (графический метод); 5) понятие о существовании других методов; 6) примеры экономического эффекта от использования решений крупных экономических проблем методами линейного программирования.

Часть II, глава 9, § 2.

Литература. (!) Б. Е. Бушуев [1]; А. С. Солодовников [1].

4. Доказательство некоторых неравенств

(IX класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) неравенство Шварца — Буняковского; 2) неравенства между средними (средним арифметическим, средним геометрическим и средним квадратическим нескольких положительных чисел); 3) применение этих неравенств к решению задач на максимум и минимум; * 4) применение механических соображений к доказательству неравенств (неравенство Иенсена и др.).

Часть II, глава 9, § 3.

Литература. (!) Э. Беккенбах и Р. Беллман [1]; (!) В. А. Кречмар [1]; (!) П. П. Коровкин [1]; М. Б. Балк [2]; Д. О. Шклярский и др. [1]; В. Б. Лидский и др. [1]; И. Х. Сивашинский [1]; А. А. Леман [1].

5. Решение несовместных систем

(IX—X классы, беседа учителя)

Примерное содержание: 1) неизбежность появления переопределенных систем уравнений в результате большого числа наблюдений; 2) сущность метода наименьших квадратов; 3) примеры.

Часть II, глава 9, § 4.

Литература. Ю. В. Линник [1]; Б. Е. Маргулис [1].

§ 12. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (IX класс)

1. Прогрессии

(IX класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) различные задачи на прогрессии; 2) понятие о рекуррентных (возвратных) последовательностях. Решение рекуррентных уравнений (на занятии кружка можно ограничиться однородными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами, не развивая общей теории); 3) задачи на разыскание пределов последовательностей.

Часть II, глава 10, § 1.

Литература. (!) А. И. Маркушевич [1]; (!) С. И. Гельфанд и др. [1]; (!) Я. И. Перельман [2]; (!) В. А. Кречмар [1], § 7, 9, 10; С. И. Новоселов [1]; Б. А. Кордемский [1]; (!) А. А. Колосов [1], гл. IX; Н. Н. Воробьев [1]; Д. О. Шклярский и др. [1], ч. I; А. А. Леман [1]; В. Б. Лидский и др. [1]; Г. В. Дорофеев и др. [1].

2. Суммирование

(IX класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) суммы, вычисление которых сводится к суммированию прогрессий; 2) употребление знака Σ; 3) понятие о методе конечных разностей; 4) суммирование степеней чисел натурального ряда; * 5) использование клетчатой бумаги для суммирования; 6) вычисление тригонометрических сумм; 7) вычисление сумм с помощью взвешивания.

Часть II, глава 10, § 2.

Литература. С. Е. Ляпин [1]; П. С. Моденов [1]; (!) М. Б. Балк [1]. См. также литературу к предыдущей теме.

(!) 3. Понятие о бесконечных рядах

(IX класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) как сложить все члены бесконечной последовательности? Понятие о бесконечном ряде, о его сходимости и о его сумме; 2) простейшие примеры доказательства сходимости рядов и вычисления их сумм; 3) необходимый признак сходимости; пример; 4) недостаточность необходимого признака; пример (гармонический ряд); 3) несколько любопытных рядов (ряд Лейбница; ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; ряд Меркатора для логарифма и т. п.). Ряды для синуса и косинуса; 4) важность степенных и тригонометрических рядов в современной математике.

Часть II, глава 10, § 3.

Литература. (!) А. И. Маркушевич [5].

4. Как и зачем были изобретены логарифмы?

(IX класс, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) поиски приемов ускоренных вычислений в XVI — XVII веках; 2) сопоставление двух прогрессий

(Ш т и ф е л ь, Б ю р г и, Н е п е р); 3) первые логарифмические таблицы.

Часть II, глава 10, § 4.

Литература. А. А. К о л о с о в [2]; (!) Я. И. П е р е л ь м а н [2].

5. Периодические дроби

(IX класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) доказательство непериодичности некоторых бесконечных десятичных дробей; 2) задачи на определение длины периода дроби; 3) некоторые приемы счета, связанные с рассмотрением периода бесконечной десятичной дроби.

Часть II, глава 10, § 5.

Литература. (!) Г. Р а д е м а х е р и О. Т е п л и ц [1], § 23; Я. И. П е р е л ь м а н [1], стр. 90—96.

6. Цепные дроби

(IX класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) примеры цепных дробей. Общий вид цепной дроби; 2) исторические сведения о цепных дробях (Гюйгенс, Эйлер, Лагранж, Чебышев, Стилтьес и др.); 3) свертывание цепной дроби «снизу вверх» (примеры); 4) примеры разложения обыкновенных дробей в цепные дроби; 5) цепную дробь можно свернуть «сверху вниз» (описание алгоритма для вычисления последовательных неполных частных); примеры; 6) применение цепных дробей к решению неопределенных уравнений вида: а) $ax - by = 1$; б) $ax + by = c$; 7) взаимное расположение подходящих дробей различных порядков, оценка погрешности при замене значения какой-либо цепной дроби ее подходящей дробью; 8) практические применения цепных дробей: задача Гюйгенса о планетарии, нахождение периода повторения солнечных и лунных затмений (сарос); 9) бесконечные цепные дроби; цепные дроби для числа π; 10) цепные дроби и... музыка.

Часть II, глава 10, § 6.

Литература. А. Я. Х и н ч и н [1]; А. П. К и с е л е в [1]; (!) Р. С. Г у т е р и др. [1]; (!) Г. Е. Ш и л о в [1].

7. Число π

(IX класс, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) различные приближения числа π; 2) различные способы задания числа π как предела последовательности; 3) иррациональность числа π. Трансцендентность этого числа; 4) число π и квадратура круга.

Часть II, глава 6, § 5.

Литература. Я. И. Перельман [3]; (!) А. А. Колосов [2]; Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [1].

§ 13. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СТАРШИХ КЛАССАХ

(!) 1. Занимательные комбинаторные задачи

(VIII—IX классы, тематическое занятие)

Примерное содержание. Решение задач на соединения без повторений и с повторениями.

Часть II, глава 8, § 1.

Литература. (!) А. М. Яглом и И. М. Яглом [1], раздел I; С. И. Новоселов [2], гл. VIII (!) С. И. Гельфанд и др. [1]; (!) Н. Я. Виленкин [1]; В. Б. Лидский и др. [1]; И. Х. Сивашинский [1]; В. А. Успенский [2].

2. Занимательное о биноме Ньютона

(IX—X классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) историческое развитие вопроса о разложении выражения вида $(x + a)^n$ по степеням x ($n = 2$; $n = 3$; n—любое натуральное число; n—любое действительное число); 2) формула для бинома Ньютона. Возможность доказательства этой формулы с помощью дифференциального исчисления; 3) решение задач; в частности, доказательство комбинаторных тождеств с помощью биномиальной теоремы; 4) понятие о полиномиальной теореме.

Часть II, глава 8, § 2.

Литература. С. И. Новоселов [1], § 111, 112; А. И. Маркушевич [5]. См. также литературу к теме 1.

(!!) 3. Понятие о теории вероятностей

(IX—X классы, одно или два тематических занятия)

Примерное содержание: 1) понятие о вероятности (определение, примеры); 2) задачи на вычисление вероятностей; 3) теорема сложения; 4) условные вероятности и теорема умножения; задачи; 5) понятие о законе больших чисел.

Часть II, глава 8, § 3.

Литература. (!) Б. В. Гнеденко и А. Я. Хинчин [1]; Л. З. Румшиский [1]; А. И. Никольский [1]; (!) А. М. Яглом и И. М. Яглом [2], раздел I, § 6; В. Е. Гмурман [1]; (!) Я. И. Перельман [4], стр. 120—124 (очерк «Пари»); (!) ДЭ, стр. 452 — 460 (статья Б. В. Гнеденко).

4. Что такое теория игр?

(IX—X классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) чем занимается теория игр; 2) стратегия, платежная матрица, нижняя и верхняя цена игры, решение игры; 3) игры с седловой точкой; 4) смешанные стратегии; 5) связь между теорией игр и линейным программированием; 6) использование математических машин для решения задач теории игр.

Литература. (!) Е. С. Вентцель [1], [2]; Дж. Вильямс [1]; Дж. Мак-Кинси [1]; ДЭ, стр. 466—471 (статья Е. С. Вентцель).

5. Как измеряется информация?

(IX—X классы, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) неопределенность эксперимента. Понятие об энтропии как мере неопределенности. Мера информации, содержащейся в сообщении; 2) решение задач на вычисление информации; 3) о практических применениях теории информации.

Часть II, глава 8, § 4.

Литература. И. М. Яглом [3]; А. М. Яглом и И. М. Яглом [1].

§ 14. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ В КРУЖКАХ IX —X КЛАССОВ

1. Разыскание точечных множеств в пространстве

(IX—X классы, тематическое занятие)

Часть I, глава 1, § 2 (стенограмма занятия) и часть II, глава 11, § 2.

Литература. Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2], § 7; А. А. Стражевский [1]; Д. О. Шклярский и др. [1], ч. 3; А. А. Леман [1]; Б. Н. Делоне и др. [1].

2. Геодезические линии

(IX—X классы, тематическое занятие)

Наглядные пособия: развертки поверхностей параллелепипедов, призм, цилиндров, конусов с нанесенными на них геодезическими линиями; глобус.

Примерное содержание: 1) разыскание геодезических линий на поверхности куба или параллелепипеда (задачи); 2) геодезические линии на боковой поверхности призмы, пирамиды, цилиндра, конуса; 3) понятие о винтовой линии; 4) геодезические линии на сфере.

Иногда задачи на разыскание геодезических линий формулируются как задачи «о пауке и мухе» или как задачи о наиболее экономной электропроводке.

Часть II, глава 11, § 5.

Литература. (!) Л. А. Люстерник [1]; (!) Г. Штейнгауз [1], стр. 83, 85, 104.

3. Различные виды многогранников

(X класс, доклад или беседа)

Примерное содержание: 1) определение многогранника. Понятие простого многогранника. Примеры (показ моделей); 2) звездчатые многогранники, их модели; 3) что такое род многогранника? Примеры многогранников нулевого и ненулевого рода (модели); 4) выпуклые и невыпуклые многогранники; 5) анализ некоторых определений «школьных многогранников» (призмы, усеченной пирамиды и др.).

Литература. Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2], гл. 2; (!) Д. О. Шклярский и др. [1], ч. 3; Д. И. Перепелкин [1]; ЭЭМ, кн. IV, стр. 382—399 (статья В. Г. Ашкинузе); Л.А. Люстерник [2].

4. Теорема Эйлера о многогранниках

Правильные многогранники

(X класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) руководитель кружка раздает учащимся различные модели многогранников (нулевого рода) и предлагает сосчитать для каждого число вершин (B), число граней (Γ) и число ребер (P). Данные сводятся в одну таблицу:

B	Γ	P

и подмечается закономерность (формула Эйлера): $B + \Gamma = P + 2$;

2) доказывается справедливость формулы Эйлера для выпуклых многогранников; 3) формулируется теорема Эйлера для многогранников нулевого рода ($B + \Gamma = P + 2$) и для многогранников

произвольного рода k ($В + Г - Р = 2 - k$). Справедливость этих предложений иллюстрируется на примерах; 4) дается определение топологически правильного многогранника и с помощью теоремы Эйлера устанавливается, что таких может быть только 5 типов; 5) демонстрируются модели метрически правильных многогранников; 6) решаются различные задачи относительно правильных многогранников.

Литература. См. литературу к предыдущей теме. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен [1], § 44; И. Лакатос [1].

5. Полуправильные многогранники

(X класс, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) равноугольно полуправильные (архимедовы) многогранники. Примеры: архимедова призма и антипризма; кеплеров кубооктаэдр и др. Обзор простейших свойств таких многогранников, показ моделей; 2) равногранно полуправильные многогранники (дипирамида и др.); 3) более общие виды многогранников: изоэдры, изогоны; 4) связь с кристаллографией.

Литература. См. литературу к теме 3.

6. Элементы симметрии некоторых пространственных фигур

(X класс, доклад или десятиминутка)

Примерное содержание: 1) понятие плоскости симметрии, центра симметрии, оси симметрии и осей вращения различных порядков; примеры; 2) подсчет общего числа осей вращения различных порядков правильного многогранника путем подсчета общего числа самосовмещений; 3) подсчет числа элементов симметрии тетраэдра, куба и некоторых других фигур.

Литература. См. литературу к теме 3.

7. Решение планиметрических задач на доказательство с помощью тригонометрии

(X класс, тематическое занятие)

Часть II, глава II, § 3.

Литература. С. И. Новоселов [2]; П. С. Моденов [1].

(!) 8. Аксиоматический метод в геометрии и в других математических науках

(IX класс, беседа учителя)

Примерное содержание: Первичные геометрические понятия; аксиомы, их происхождение. Различные модели (интерпретации) евклидовой геометрии. Основные требования, предъявляемые к системе аксиом: непротиворечивость, полнота, независимость.

Литература. (!) ЭЭМ, кн. IV, стр. 9—47 (статья Б. А. Розенфельда); (!) А. П. Киселев [2]; (!) П. К. Рашевский [1]; В. И. Молодший [1].

9. Телесный угол и его применение

(X класс, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) определение телесного угла; 2) что такое стерадиан; 3) вычисление мер некоторых телесных углов; 4) о применении понятия телесного угла в физике.

Литература. Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2], стр. 25—26; Д. О. Шклярский и др. [1], ч. 3, стр. 24—27.

10. Универсальная формула Ньютона—Симпсона

(X класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) понятие о призматоиде; 2) призма, пирамида, усеченная пирамида, призматоид, конус, шар как примеры тел с квадратичным законом изменения площади поперечного сечения; 3) формула Ньютона—Симпсона для объемов таких тел; 4) вычисление объемов некоторых тел с помощью этой формулы (клин, обелиск, шар, шаровой слой).

Литература. (!) Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2], стр. 163—165, 184—186.

11. Теоремы Паппа—Гюльдена

(X класс, тематическое занятие)

Объемы и поверхности некоторых тел вращения можно легко вычислить, если воспользоваться двумя формулами, которые были подмечены еще древнегреческим геометром Паппом и затем были независимо от него найдены швейцарским геометром Гюльденом.

Данное занятие предполагается посвятить доказательству этих формул и применению к решению конкретных задач.

Литература. (!) М. Б. Балк [2]; Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2].

12. Геометрия на сфере

(X класс, обзорная беседа или тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) в чем сходство и различие между прямыми на плоскости и большими окружностями на сфере? 2) Как измеряются расстояния и углы на сфере? 3) Сходство и различие между плоскими и сферическими треугольниками. Сумма углов сферического треугольника, признаки равенства сферических треугольников (в частности, равенство треугольников по трем углам); 4) зависимость между площадью сферического треугольника и суммой его углов; 5) понятие о сферической теореме косинусов и ее применении.

Литература. М. К. Вентцель [1]; ЭЭМ, кн. IV, стр. 518—557 (статья Б. А. Розенфельда).

(!) 13. Неевклидовы геометрии

(X класс, беседа)

Примерное содержание: 1) попытки доказательства аксиомы о единственности параллельной; 2) открытие Н. И. Лобачевским первой неевклидовой геометрии; 3) аксиома Лобачевского. Простейшие следствия из аксиомы Лобачевского. Обзор некоторых свойств геометрии Лобачевского; 4) геометрия Евклида как предельный случай геометрии Лобачевского; 5) вопрос об истинности геометрии Лобачевского. Попытки опытной проверки; 6) интерпретация планиметрии Лобачевского в образах геометрии Евклида; 7) значение открытия Лобачевского; 8) другие геометрические системы.

Часть II, глава 11, § 5.

Литература. ДЭ [1], стр. 311—321 (статья Н. И. Польского); П. С. Александров [2]; А. П. Норден [1]; Б. Н. Делоне [1]; ЭЭМ, кн. 5, стр. 394—475 (статья Б. А. Розенфельда и И. М. Яглома); В. Ф Каган [1]; Г. С. М. Кокстер [1], гл. 16; диафильм «Н. И. Лобачевский», 1960 (авторы проф. А. П. Норден и проф. Б. Л. Лаптев).

(!) 14. Конические сечения

(IX—X классы, десятиминутка или обзорная беседа учителя)

Примерное содержание: 1) как получается эллипс при сечении цилиндра? Модель. Как получаются эллипс, гипербола, парабола при сечении конуса плоскостью? Показ соответствующих моделей, в частности жидкостных (с помощью стеклянной лейки, наполненной слабым раствором медного купороса или другой цветной жидкостью), теневых, деревянных (деревянный конус с различными плоскими срезами); 2) простейшие свойства конических сечений; 3) способы вычерчивания конических сечений с помощью нити. Эллипсограф; 4) конические сечения как орбиты планет и комет, как траектории космических кораблей; 5) применение гипербол в аэронавигации.

Литература. А. И. Маркушевич [2]; Г. Радемахер и О. Теплиц [1], § 8; Г. Штейнгауз [1], стр. 70; ЭЭМ, кн. 5, стр. 557—608 (статья З. А. Скопеца); А. Г. Дорфман [1].

15. Циклоида

(IX класс, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) каким образом порождается циклоида окружностью? 2) Площадь одной арки циклоиды; 3) циклоида как линия *быстрейшего* ската и как линия *постоянного* ската; 4) циклоида на практике (циклоидальные зубчатые колеса и др.); 5) как образуются эпициклоида и гипоциклоида?

Литература. (!) Г. Н. Берман [3]; (!) А. И. Маркушевич [2].

16. Линии постоянной ширины

(IX класс, десятиминутка)

Литература. Г. Радемахер и О. Теплиц [1], § 25; И. М. Яглом и В. Г. Болтянский [1]; Г. Штейнгауз [1], стр. 67.

17. Другие любопытные линии

(IX класс, десятиминутка)

Литература. Г. Штейгауз [1], стр. 68—75, 118—119; А. И. Маркушевич [2]; ДЭ, стр. 287—293 (статья М. В. Потоцкого).

10. Любопытные поверхности

(X класс, одна-две десятиминутки)

Примерное содержание: 1) параболоид вращения и его применение на практике (прожектор и др.); 2) линейчатые поверхности. Однополостный гиперболоид и его применение (зубчатые передачи; строение вышек, например, телевизионных); 3) односторонние поверхности. Лента Мебиуса; 4) эллипсоид, катеноид, геликоид и др. Демонстрация моделей указанных поверхностей.

Литература. Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен [1], гл. I и IV; ДЭ, стр. 287—293 (статья М. В. Потоцкого).

§ 15. ТРИГОНОМЕТРИЯ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Преобразование тригонометрических выражений

(IX класс, тематическое занятие)

Часть II, глава 12, § 1.

Литература. С. И. Новоселов [1]; В. Б. Лидский и др. [1]; П. С. Моденов [1]; Г. В. Дорофеев и др. [1]; И. Х. Сивашинский [1].

2. Аркфункции

(X класс, тематическое занятие)

Часть II, глава 12, § 2.

Литература. См. литературу к теме 1.

(!) 3. Прошлое и настоящее комплексных чисел

(X класс, десятиминутка)

Примерное содержание. Некоторые исторические сведения о возникновении комплексных чисел, о теории функций комплексного переменного, о разнообразных практических приложениях этой теории.

Часть II, глава 12, § 3.

Литература. (!) А. И. Маркушевич [3].

4. Арифметика и алгебра комплексных чисел

(X класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) решение задач на преобразование выражений, содержащих комплексные числа; 2) софизмы, связанные с неправильными преобразованиями выражений, содержащих

$\sqrt{-1}$; 3) применение свойств комплексных чисел к решению некоторых уравнений в целых числах; 4) формула М у а в р а и ее применение.

Часть II, глава 12, § 4.

Литература. В. А. К р е ч м а р [1]; В. М. Б р а д и с и др. [1].

5. Геометрия комплексных чисел

(X класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) применение комплексных чисел к доказательству геометрических теорем; 2) рассмотрение простейших отображений, производимых функциями комплексного переменного; 3) что такое конформные отображения; 4) функция Ж у к о в с к о г о.

Часть II, глава 12, § 5.

Литература. (!) А. И. М а р к у ш е в и ч [3]; З. А. С к о п е ц [1].

6. Гиперкомплексные числа

(X класс, тематическое занятие)

Примерное содержание: 1) существуют ли более общие системы чисел, чем комплексные числа? Изобретение Гамильтоном кватернионов; 2) основные понятия алгебры кватернионов. Определение арифметических действий, таблица умножения единиц, понятие модуля кватерниона; 3) примеры задач на преобразование кватернионов. Простейшие приложения кватернионов; 4) векторы и скаляры как частные случаи кватернионов. Связь векторного исчисления с исчислением кватернионов; 5) дуальные и двойные числа. Различные виды гиперкомплексных чисел.

Литература. И. М. Я г л о м [2]; учебники высшей алгебры (Л. Я. О к у н е в, А. Г. К у р о ш и другие).

§ 16. ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ. ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИКАХ

1. Практическое применение математики

(V—X классы, серия бесед учителя и десятиминуток)

Примерное содержание: 1) математика в быту; 2) значение математики для техники; 3) математика в сельском хозяйстве; 4) математика и космические полеты; 5) математика и оборона нашей страны (математика в артиллерии, математика в авиации, и т. п.); 6) математика и живопись; 7) математика в природе; 8) математика и экономика; 9) математика и астрономия.

Литература. (!) А. Н. Крылов [1] (очерки «Прикладная математика и ее значение для техники», «Значение математики для кораблестроения»); (!) Б. В. Гнеденко [4], [5]; Б. А. Кордемский [1], гл. XV; (!) Н. Е. Кобринский и В. Д. Пекелис [1]; (!) А. А. Колосов [2], гл. XVI; Г. Д. Балк [1]; Б. В. Воробьев [1]; Е. К. Нечаев [1]; П. Н. Законников [1]. Диафильм «Применение геометрии на практике», 1963 (автор В. С. Семаков); В. Л. Минковский [1].

2. Профессия математика

(VIII—X классы, десятиминутка или беседа)

Литература. (!) А. Н. Колмогоров [1]; Н. Г. Чеботарев [1]; (!) Н. Винер [1].

3. Математика в нашей стране

(V—X классы)

Обзорный доклад на эту тему труден даже для учителя. Трудность возникает здесь прежде всего при отборе материала, который должен дать достаточно ясное представление о развитии математики в нашей стране, и в то же время должен быть доступен слушателям. На деле же часто получается в докладе нагромождение имен, неизвестных слушателю, и терминов, непонятных ему. Не менее сложно сделать доклад, посвященный только советской математике.

Значительно проще поставить серию десятиминуток, посвященных отдельным вопросам отечественной математики и отдельным математикам, и лишь после этого заслушать обзорный доклад по всей теме (например, в X классе) — учащиеся будут подготовлены к нему.

Полезно поставить отдельные сообщения о математике у отдельных народов нашей страны, например: «Математика у народов Средней Азии», «Математика у армянского народа» и т. п.

Литература. (!) Б. В. Гнеденко [3]; А. П. Юшкевич [1]; И. Я. Депман [6]; К. А. Малыгин [1]; Г. И. Глейзер [1]; (!) В. Д. Чистяков [2]; В. Л. Минковский [1].

4. Как считали на Руси в старину

(V—VI классы, десятиминутка)

Литература. Б. В. Гнеденко [3]; В. П. Швецов [1]; Г. Н. Берман [2], § 2.

5. Как постепенно менялись русские названия математических понятий

(VIII класс, десятиминутка)

Русская математическая терминология не является чем-то вечным, застывшим. Лет 200—300 назад она весьма сильно отличалась от современной. Русская терминология обогащалась как за счет создания новых названий математических понятий с русскими корнями, так и за счет заимствования некоторых иностранных терминов. Приведем несколько примеров. В 1784 году на русском языке вышел перевод книги «Начала» Евклида, выполненный Никитиным и Суворовым («Евклидовых стихий осьмь книг»). Вместо слова «теорема» употребляется слово «мыслие», вместо «центр круга» — «остие», вместо слова «параллелепипед» — «мимоплоскное», а вместо слова «тело» — «нетощее». В других пособиях того времени вместо слов «плоскость», «тело», «сторона», «определение» употребляются термины: «план», «солид», «бок», «дефиниция». В более старинных книгах циркуль называется кружалом, корень— радиксом и т. д.

Любопытна математическая терминология начала XVIII столетия. Так, например, в знаменитой «Арифметике» Л. Ф. Магницкого слово «цифра» означает «нуль», слово «перечень» — произведение сомножителей, а вместо слова «круг» употребляется слово «колесо».

В книге «Геометрия практика», вышедшей в начале XVIII столетия, отсутствуют термины «стереометрия», «расстояние», «площадь», «объем» — вместо них используются выражения «штирометрия», «дистанция», «суперфиция» и «корпуленция». Один из разделов этой книги, посвященной нахождению недоступных расстояний и высот, называется «О искании дистанций — как далекостей, так и высот».

Другие примеры можно найти в книге Б. В. Гнеденко [3], стр. 34, 38, 58, 59 и др.

6. Л. Ф. Магницкий и его «Арифметика»

(V—VI классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) что нам известно о Л. Ф. Магницком? Его работа в математико-навигацкой школе. Происхождение его фамилии; 2) что это за книга, которую М. В. Ломоносов назвал «вратами своей учености»? Исключительная роль «Арифметики» Магницкого в математическом образовании в России; 3) чтение нескольких отрывков из этой книги. Беглый обзор ее содержания.

Вместе с этой темой можно рассмотреть некоторые задачи из «Арифметики» Магницкого.

Литература. (!) И. Я. Депман [6]; Б. В. Гнеденко [3], А. П. Денисов [1]; В. Л. Минковский [1].

(!) 7. Н. И. Лобачевский — крупнейший русский математик

(VI—VII классы, десятиминутка; IX—X классы, доклад)

Примерное содержание (X класс): 1) биографические сведения о Н. И. Лобачевском. Лобачевский как общественный деятель, как педагог; его общественные взгляды; 2) открытие Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии; отношение современников, роль этого открытия в истории науки; 3) определение функции по Н. И. Лобачевскому, важность именно такого определения; 4) о способе Лобачевского численного решения алгебраических уравнений.

Литература. (!) Б. В. Гнеденко [3]; А. П. Юшкевич [1]; (!) И. Я. Депман [6], стр. 117—124; В. Ф. Каган [1]; П. С. Александров [1]; И. Заботин [1]; А. Ливанова [1]; диафильм «Н. И. Лобачевский», 1960 (авторы А. П. Норден и Б. Л. Лаптев); (!) ДЭ, стр. 492—494 (статья И. Г. Башмаковой).

8. П. Л. Чебышев — великий русский математик

(IX—X классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) основные даты жизни П. Л. Чебышева; 2) исследования Чебышева по теории распределения простых чисел; 3) арифмометр П. Л. Чебышева, его особенности. П. Л. Чебышев как конструктор механизмов; 4) теория и практика в исследованиях Чебышева; 5) что дает «закон больших чисел П. Л. Чебышева» в теории вероятностей; 6) как П. Л. Чебышев с помощью цепных дробей открыл ортогональные полиномы; 7) П. Л. Чебышев — создатель Петербургской математической школы. Ученики Чебышева.

Литература. Е. В. Прудников [1]; ДЭ, стр. 496—498 (статья И. Г. Башмаковой); А. П. Юшкевич [1]; (!) Б. В. Гнеденко [3].

9 Л. Эйлер

(VIII—X классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) крупнейший математик XVIII века; 2) его юные годы. Двадцатидвухлетний академик. Россия — вторая родина ученого; 3) геометрические теоремы Эйлера: теорема о расстоянии между центрами вписанной и описанной окружностей, теорема Эйлера о многогранниках и др. (IX—X классы); 4) задача Эйлера о мостах; 5) об исследованиях Эйлера по математическому анализу (IX класс); 6) комплексные числа в работах Эйлера (X класс).

Литература. См. литературу к теме 3; А. Н. Крылов [1]; Б. В. Гнеденко [3]; ДЭ, стр. 488—490 (статья А. П. Юшкевича).

10. С. В. Ковалевская — первая русская женщина-математик

(V—X классы, десятиминутка)

Литература. (!) И. М. Виноградов [1], стр. 129—137; П. Я. Полубаринова-Кочина [1]; Б. В. Гнеденко [3]; Л. Воронцова [1]; кинофильм «Софья Ковалевская», 1960 (автор сценария Л. М. Воронцова).

11. Академик А. Н. Крылов — выдающийся математик и инженер

(V—VII классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) важность математики для техники; 2) биографические сведения о А. Н. Крылове; 3) «Таблицы непотопляемости» А. Н. Крылова; 4) правило А. Н. Крылова записи приближенных чисел; 5) математика и килевая качка корабля. Другие примеры применения А. Н. Крыловым математики к теории корабля.

Литература. А. Н. Крылов [1]; С. Я. Штрайх [1]; Б. В. Гнеденко [1], [3].

12. М. В. Келдыш

(X класс, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) краткие биографические сведения о М. В. Келдыше; 2) М. В. Келдыш — крупный специалист по теории функций комплексного переменного и ее приложениям; 3) М. В. Келдыш как механик (аэродинамика и др.); 4) Келдыш как руководитель научных учреждений.

Литература. «Вестник АН СССР», 1961, № 6; БСЭ.

13. А. Н. Колмогоров

(IX—X классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) биографические сведения о А. Н. Колмогорове; 2) А. Н. Колмогоров — один из самых разносторонних математиков наших дней; 3) педагогическая деятельность А. Н. Колмогорова.

Литература. Б. В. Гнеденко [2], стр. 67—68.

14. Л. С. Понтрягин

(V—X классы)

Примерное содержание: 1) сведения о жизни Понтрягина; 2) представление о его научных работах по топологии и по теории диференциальных уравнений. «Принцип максимума».

Литература. А. Наркевич [1]; В. Киселев [1].

В зависимости от тематики занятий данного кружка и других конкретных условий (наличие литературы, бюджет времени и т. п.) можно ознакомить учащихся с биографиями других видных математиков нашей страны. Для этой цели учитель может воспользоваться книгой В. Д. Чистякова «Рассказы о математиках», где приведены биографические сведения о многих отечественных математиках (М. В. Остроградский, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, Н. Н. Лузин, О. Ю. Шмидт, П. С. Александров, П. С. Новиков, С. Н. Мергелян и др.). Интересны сообщения о выдающихся молодых математиках (В. И. Арнольд, Ю. И. Манин, С. П. Новиков).

15. Наши земляки-математики

Особенно интересно можно поставить в кружке сообщение о земляках-математиках. Например, в смоленской школе можно в сообщении «Математики-смоляне» рассказать школьникам об академике П. С. Александрове и о профессорах МГУ В. В. Степанове, А. Г. Куроше, В. В. Немыцком, об известном историке математики В. В. Бобынине, о замечательном математике-педагоге Е. М. Пржевальском.

Остановимся теперь на сведениях о математике у отдельных народов за рубежом.

Вполне оправдана постановка в кружке отдельных сообщений о математике у того или иного народа, например «Индийская математика», «Математика у древних греков».

Можно заслушать сообщение и по более частному вопросу, например «Алгебраические задачи у древних индийцев».

(I) 16. Архимед

(VI—X классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) Архимед — величайший математик древнего мира; 2) основные факты из жизни Архимеда. Архимед как патриот; 3) научные достижения Архимеда. Как Архимед решил вопрос о бесконечности множества натуральных чисел (VI класс); 4) аксиома Архимеда в геометрии (VIII класс). Как Архимед дополнил евклидову геометрию; 5) как Архимед доказал теорему о трех медианах треугольника; правило рычага Архимеда.

Архимед — изобретатель метода решения геометрических задач с помощью механики (VIII класс); 6) как Архимед вычислил площадь параболического сегмента и объем шара путем воображаемого взвешивания площадей; Архимед и основные идеи интегрального исчисления (IX класс); 7) полуправильные многогранники Архимеда (X класс).

Литература. В. Ф. Каган [2]; С. Я. Лурье [1]; ДЭ, стр. 472 (очерк И. Г. Башмаковой); И. Н. Веселовский [1].

17. Ф. Виет

(VII—IX классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) риторическая алгебра до Виета. Виет и алгебраическая символика; 2) жизнь адвоката и любителя математики Франсуа Виета (основные факты); 3) формулы Виета для корней уравнения второй степени и более высоких степеней; 4) Виет и задача Аполлония о касании кругов.

Литература. (!) ДЭ [1], стр. 476—478 (очерк М. В. Чирикова).

18. П. Ферма

(VII—VIII классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) что известно о жизни Тулузского юриста Пьера Ферма; 2) теорема, которую еще никто не доказал и не опроверг (последняя теорема Ферма); 3) другие научные результаты Ферма по теории чисел; 4) Ферма и зарождение метода координат; 5) принцип Ферма в оптике.

Литература. (!) Г. Н. Берман [4], гл. XIII; ДЭ [1], стр. 481—482 (очерк И. Г. Башмаковой).

(!) 19. Р. Декарт

(VII—VIII классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) жизнь Декарта, солдата и мыслителя; 2) Декарт и метод координат; 3) исследования Декарта по решению алгебраических уравнений.

Литература. ДЭ [1], стр. 478—480 (очерк М. В. Чирикова); БСЭ.

20. Б. Паскаль

(VIII—X классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) юность Паскаля. Изобретение механической счетной машины; 2) теорема о вписанном шестиугольнике; 3) «треугольник Паскаля» в комбинаторике (X класс). Паскаль — изобретатель метода математической индукции; 4) кривые, которые изучил Паскаль: циклоида, «улитка Паскаля»; 5) последние годы жизни Паскаля.

Литература. К. Рейдемейстер [1]; В. А. Успенский [2].

21. Г. В. Лейбниц

(IX класс, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) жизнь Лейбница — самого разностороннего ученого всех времен; 2) открытие дифференциального и интегрального исчисления. Задача Лейбница о построении касательной. Символика Лейбница; 3) идея Лейбница о создании «логического исчисления»; 4) математическая машина Лейбница.

Литература. ДЭ, стр. 485—488 (статья А. П. Юшкевича).

(!) 22. И. Ньютон как математик

(IX—X классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) значение открытий Ньютона для естествознания; 2) основные даты жизни Ньютона; 3) открытие дифференциального и интегрального исчислений — революция в истории математики; 4) формула бинома Ньютона; 5) бесконечные ряды у Ньютона.

Литература. ДЭ, стр. 483—485 (статья И. Г. Башмаковой); (!) С. И. Вавилов [1].

(!) 23. К. Ф. Гаусс

(IX—X классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) детство и юность сына водопроводчика из Брауншвейга. Гаусс — искусный вычислитель; 2) решение задачи о делении окружности на *n* равных частей; 3) доказательство основной теоремы алгебры; 4) предвычисление положения затерявшегося астероида; 5) Гаусс и неевклидова геометрия;

6) понятие о работах Гаусса по теории чисел и другим разделам математики.

Литература. ДЭ, стр. 490 — 492 (статья И. Г. Башмаковой).

24. Н. Х. Абель

(IX—X классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) задача о решении уравнения пятой степени в радикалах; первый научный результат Абеля; 2) биномиальный ряд — обобщение биномиальной формулы Ньютона; 3) последние годы жизни Абеля.

Литература. О. Оре [2].

(!) 25. Э. Галуа

(IX—X классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) детские и студенческие годы Галуа. Судьба его первых рукописей; 2) Галуа-революционер; 3) смерть в 20 лет; 4) теория групп, созданная Галуа, и задача разрешимости уравнения в радикалах. Значение теории групп и ее обобщений в современной математике.

Литература. ДЭ, стр. 494—496 (статья И. Г. Башмаковой); (!) Л. Инфельд [1]; (!) А. Дальма [1].

26. С. Рамануджан

(IX класс, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) замечательный арифметик нашего столетия; 2) жизнь гениального индийца; 3) особенности творчества Рамануджана.

Литература. В. И. Левин [2]; Ю. М. Гайдук [1].

27. Н. Винер

(VIII—X классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) биографические сведения; 2) Винер и кибернетика; 3) другие работы Винера.

Литература. (!) Н. Винер [1]; В. И. Левин [1].

28. Н. Бурбаки

(IX—X классы, десятиминутка)

Примерное содержание: 1) участник № 4397 Международного конгресса математиков в Москве. Кто он? 2) сведения о группе Бурбаки; 3) научные взгляды этой группы.

Литература. П. Р. Халмош [1], стр. 229—240.

При наличии благоприятных условий желательно ознакомить учащихся с жизнью других видных зарубежных математиков прошлых веков (Лагранж, Клеро, Монж, Гамильтон, Риман, Кантор, Пуанкаре и др.) и нашего столетия (Гильберт, Нейман, Шеннон, Адамар, Борель и др.). Некоторые сведения для таких бесед можно почерпнуть из цитированной книги В. Д. Чистякова и из энциклопедических справочников.

29. Женщины-математики

(VI—X классы, беседа или десятиминутка)

Примерное содержание: 1) женщины-математики в прошлом: Гипатия, Аньези, С. Жермен и другие; 2) С. В. Ковалевская; 3) Эмми Нетер; 4) русские и советские женщины-математики после Ковалевской (Е. Ф. Литвинова, Н. Н. Гернет, С. А. Нарышкина, П. Я. Полубаринова-Кочина, Н. К. Бари, С. А. Яновская, Л. В. Келдыш, О. А. Олейник, О. А. Ладыженская и др.).

Литература. (!) И. Я. Депман [6]; Г. И. Глейзер [1], стр. 192—202. Серия статей в журналах «Математика в школе», 1965, № 2, 5. Диафильм «Софья Ковалевская», 1960 (автор Л. М. Воронцова).

Глава III

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭКСКУРСИИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Математические экскурсии — исключительно интересная, но сравнительно редко применяемая форма внеурочных занятий. Не следует думать, что они сводятся только к геодезическим работам на местности. Во время экскурсии ученик видит, где на практике встречаются и применяются различные геометрические фигуры, изученные им в школе, знакомится с применениями математики в различных областях народного хозяйства. На экскурсии ученик увидит немало случаев, когда приходится использовать известные ему формулы для вычисления тех или иных геометрических величин (длин, площадей, объемов). Хорошо поставленные экскурсии укрепят уверенность учащегося в том, что с математикой действительно сталкиваешься на каждом шагу, что «математика всюду», что она действительно необходима человечеству. У учащихся значительно повышается интерес к этому предмету. Хорошо подготовленные экскурсии приводят к лучшему пониманию учащимися отдельных вопросов курса математики.

Сначала (в § 1) подробно опишем одну такую экскурсию, расскажем о ее организации и проведении (по опыту 6-й средней школы Смоленска). Затем (в § 2) более бегло рассмотрим другие темы для математических экскурсий.

§ 1. ЭКСКУРСИЯ «МАТЕМАТИКА НА ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГЕ» (VIII—IX классы)

Подготовка к экскурсии началась задолго до ее проведения. Вначале учитель ознакомился со специальной литературой по строительству и эксплуатации железных дорог (см. список литературы в конце параграфа), проконсультировался у специалистов-железнодорожников. После этого был составлен список вопросов, которые предполагалось рассмотреть во время экскурсии. Заранее был выбран участок железной дороги для проведения экскурсии, подготовлены измерительные инструменты и необходимые наглядные пособия.

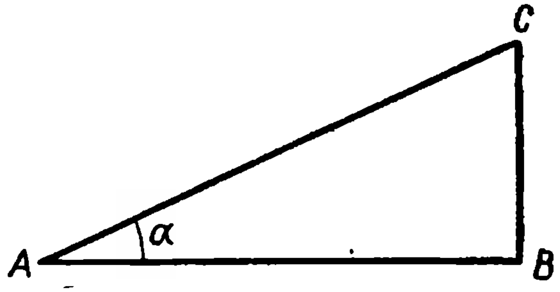


Рис. 7.

Опыт проведения производственных экскурсий показывает, что во многих случаях учителю нецелесообразно перепоручать проведение всей экскурсии по математике инженеру или технику соответствующей специальности, так как последний не обладает педагогическим опытом, слишком много внимания уделяет чисто техническим деталям, не делает достаточного ударения на вопросы, связанные с изучением математики в школе, плохо представляет себе «математические возможности» учащихся. Поэтому при проведении данной экскурсии основная часть вопросов была освещена учителем, а другая часть — работником железной дороги.

Экскурсия проводилась не в виде связного рассказа и показа. Перед учащимися ставились вопросы и задачи, требующие применения математики. Были среди этих вопросов и такие, на которые школьники не могли сразу дать ответ. Важно было, чтобы они задумывались над этими вопросами.

Непосредственно перед экскурсией учащимся было очень кратко сказано о цели экскурсии и ее общем плане, а также о мерах предосторожности на железнодорожном пути.

В начале экскурсии несколько слов было сказано об истории создания данной дороги.

1. С чего начинается строительство дороги? Сначала составляют план будущей дороги на очень подробной топографической карте. При этом проектировщики стремятся к тому, чтобы путь был по возможности прямолинейным, горизонтальным, без больших спусков и подъемов. Один из первых вопросов, возникающих перед изыскателями при перенесении плана железной дороги на местность, таков: к а к н а з е м л е п р о в е с т и п р я м у ю л и н и ю?

Учащиеся знакомы с провешиванием прямых. Один из них рассказывает, как это делалось в школе. Для более точной установки вех в вертикальном положении применяют прибор т е о д о л и т, который используется также для измерения углов. Учащиеся знакомятся с применением теодолита (некоторые сведения о нем были сообщены раньше, еще до экскурсии).

2. Можно ли теперь — после того как на местности был выбран и провешен прямолинейный участок для железной дороги — прокладывать на нем рельсы? Нет, нельзя. Земная поверхность неровная. На пути встречаются рвы, ямы, бугры, по которым поезд пройти не сможет. Необходимо, чтобы подъемы и спуски были по-

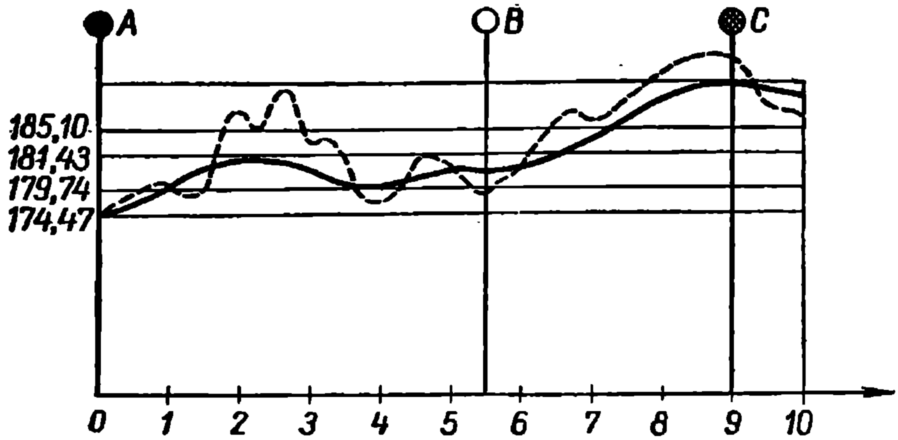


Рис. 8.

логими, не превышали определенных пределов. **Уклон пути** определяется как тангенс угла наклона отрезка пути *AC* к горизонту (рис. 7). Этот уклон на железных дорогах не должен превышать 0,020, а на магистральных дорогах — даже 0,012.

Для определения величины уклона применяют способ **нивелирования**. Ученикам был показан прибор **нивелир**. Они познакомились с его установкой и применением. С помощью нивелира и реек учащиеся определили уклон на данном участке пути (рейки ставятся на головку рельса). Способ нивелирования используют также для определения уклонов при сооружении водоотводных канав, где величина уклона должна быть не менее двух-трех тысячных.

3. На основании результатов, полученных при нивелировании участка трассы будущей железной дороги, можно построить график, который называется **продольным профилем железнодорожного пути**. Учащимся был показан начерченный профиль участка пути *AC* (рис. 8). Было указано, что по оси абсцисс откладываются расстояния точек от определенного пункта (в масштабе 1 : 100 000), а по оси ординат — высоты точек над уровнем моря (в масштабе 1 : 1000). Сплошная линия обозначает продольный профиль участка железной дороги, пунктирная — продольный профиль того же участка до прокладки железной дороги.

По данному графику ученикам было предложено несколько вопросов, например:

1. Какая из трех станций *A*, *B*, *C* расположена ниже?

2. На каком расстоянии от станции *A*, на данном участке железной дороги, поезд проходит через самую высокую точку?

3. В каких местах поезд двигается по горизонтальному участку пути?

Профиль пути составляется для того, чтобы знать, где снять грунт, а где насыпать грунт, чтобы выровнять трассу, так как с увеличением уклона увеличивается сопротивление, испытываемое

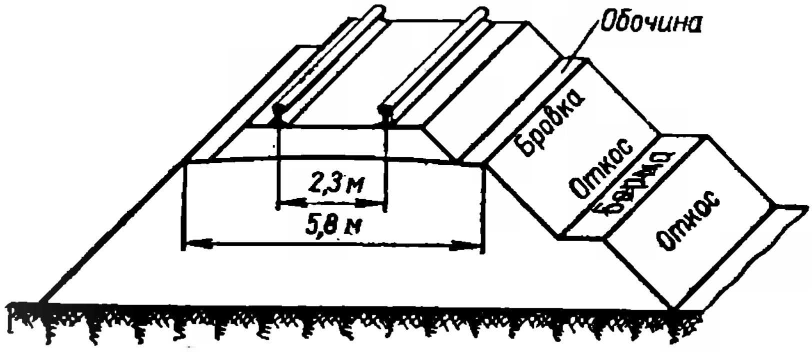


Рис. 9.

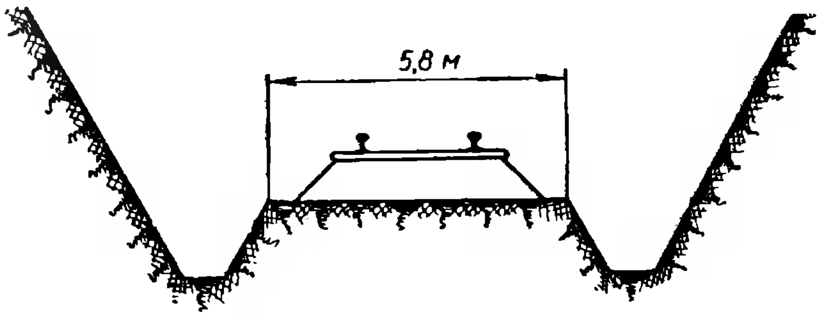


Рис. 10.

поездом на подъеме. Это сопротивление на горизонтальном участке пути составляет 2 *кг* на тонну. При уклоне вверх, равном 0,001, это сопротивление увеличивается в 1,5 раза, а при уклоне, равном 0,008, сопротивление в 5 раз больше, чем на горизонтальном участке пути. Отсюда ясно, что большой уклон пути не позволяет повысить вес поезда и скорость его движения.

4. Кроме продольного профиля дороги, вычерчивают еще поперечные профили наиболее характерных участков пути (рис. 9).

Продольные и поперечные профили используются при подсчете объема земляных работ, необходимых для прокладки дороги. А это очень важно для определения стоимости строительства дороги. Дело в том, что при строительстве железной дороги на каждый километр пути на равнинной местности приходится в среднем около 10—12 тыс. $м^3$ земляных работ и до 50 тыс. $м^3$ в гористой местности.

Стоимость земляных работ даже на равнинной местности в среднем составляет 25%, а в горных районах до 60% всей стоимости строительства железной дороги.

Школьникам были показаны схемы поперечных сечений насыпи и выемки, даны разъяснения к чертежу (рис. 9 и 10).

Затем ученики познакомились с «верхним строением пути» (то есть с верхней частью железнодорожного полотна: б а л л а с т, ш п а л ы, р е л ь с ы); провели измерения, необходимые для определения объема шпалы, измерили расстояние между соседними шпалами.

5. Перед учениками была поставлена и такая задача: *как определить объем балласта на 1 км железнодорожного пути?* Способ для определения объема был предложен школьниками. Площадь поперечного сечения балласта, имеющего форму равнобедренной трапеции, следует умножить на длину участка железнодорожного пути; из полученного объема вычесть объем шпал.

Но как определить площадь поперечного сечения? Ни нижнего основания, ни высоты этой трапеции непосредственно измерить нельзя. Школьникам было сообщено, что угол при основании трапеции всегда выбирается таким, чтобы его тангенс был равен $\frac{2}{3}$. Зная это, ученики сообразили, что для вычисления площади трапеции достаточно измерить верхнее основание и боковую сторону. Вычисления были проведены дома.

6. На шпалы уложены рельсы длиной 25 *м*. Можно ли рельсы укладывать один за другим вплотную? Нет, нельзя. При повышении температуры металл расширяется и рельсы удлиняются. Поэтому между рельсами оставляют промежутки-зазоры. В то же время желательно, чтобы величина зазора была по возможности меньше для более плавного движения поезда, для уменьшения износа колес и пути. Величина зазора при минимальной температуре для данной местности не должна превышать 21 *мм*. Так как величина зазора меняется при прохождении большого числа поездов, то ее постоянно проверяют.

Как же проверить величину зазора? Линейку прикладывать неудобно, да и точного результата таким измерением не получишь.

Для определения величины зазора применяется специальный прибор, который называется мерным клином (зазорник). Ученикам был показан этот прибор (рис. 11). Мерный клин вставляется между рельсами не сверху, а сбоку, так как в верхней части между рельсами в результате движения поездов образуются небольшие наплывы металла.

Школьники подметили, что устройство прибора основано на свойстве подобных треугольников (основания пропорциональны боковым сторонам). Два ученика измерили величину нескольких зазоров. Один ученик взялся сам изготовить мерный клин.

7. На железной дороге важно также знать расстояние между рельсами (ширину колеи). Это расстояние должно быть постоянным и равным 1524 *мм* на прямолинейном участке пути для нашей дороги. Допускаемые отклонения —2 *мм*, + 6 *мм*. По слишком узкой колее поезд не пройдет; если же колея слишком широкая, поезд сойдет с рельсов. Но при эксплуатации железной дороги путь все время претерпевает изменения. Поэтому время от времени проверяют, какова ширина колеи. Учащиеся измерили ширину колеи, пользуясь рулеткой. Но такой способ неточен; кроме того, он практически непригоден, если нужно проверить изменение ширины колеи на большом участке

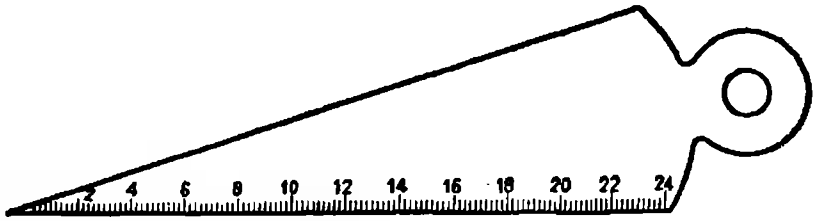


Рис. 11.

пути. Здесь на помощь опять приходят математика и техника. Существует специальный путеизмерительный вагон системы Лященко. Двигаясь со скоростью 45 *км* в час, он записывает графически показания по ширине колеи (в виде зигзагообразной линии). Учащиеся убедились еще раз, как важно уметь читать график, чтобы обнаружить участки на железной дороге, требующие исправления. Приборы, установленные в этом вагоне, одновременно записывают в виде графиков и другие показания, например, на сколько одна «рельсовая нить» расположена выше или ниже другой.

8. После рассмотрения этих вопросов школьники пошли к месту закругления железной дороги. Им рассказали, что не может путь всегда проходить по прямой линии, хотя к этому стремятся при строительстве. Могут встретиться преграды: болота, озера, строения, населенные пункты и др. Приходится изменять направление железной дороги. На поворотах дороги делают закругления. Основной участок закругления имеет форму дуги окружности.

При строительстве железной дороги радиусы закругления задаются заранее. При эксплуатации систематически проверяют состояние этого участка. Важно, чтобы радиус был постоянным, чтобы кривизна пути не менялась.

Как же определить радиус закругления уже построенной железной дороги? Учащиеся ответили на этот вопрос, сославшись на теорему из курса геометрии VIII класса об отрезках диаметра и хорды, проведенных в одной окружности через одну и ту же точку (рис. 12). Измерив хорду AB и стрелку CD, можно записать:

$$\frac{AB^2}{4} = (2R - CD) \cdot CD,$$

если $AB = S$ и $CD = h$, то $R = \frac{S^2 + 4h^2}{8h} = \frac{S^2}{8h} + \frac{h}{2} \approx \frac{S^2}{8h}$.

Переход пути с прямолинейного участка на круговой происходит не сразу. Между этими участками устраивают переходный участок. Форма дороги на этом участке определяется по специальным линиям, которые называют **переходными кривыми**.

9. Учащиеся определили скорость проходящего поезда, зная время, в течение которого проходил поезд мимо них, длину вагона и число вагонов. Они также выяснили, каким образом можно вы-

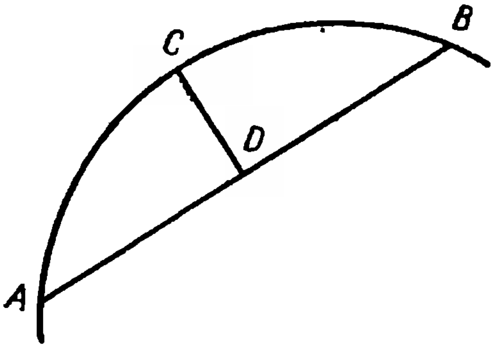


Рис. 12.

числить скорость поезда днем, если находиться внутри него (по железнодорожным столбам, расставленным через каждый километр пути), и как определить скорость поезда ночью (по стуку колес на стыках рельсов, учитывая, что длина рельса равна 25 *м*).

10. Каждый поезд движется строго по расписанию. Проводники, машинисты, пассажиры пользуются расписанием, но железнодорожному диспетчеру нужно следить за движением сразу многих поездов, знать, где они находятся в различные моменты времени. Здесь значительно удобнее пользоваться графиком движения поездов. Школьникам был показан такой график для участка Москва — Смоленск. Было указано, что это графики зависимости расстояния, пройденного поездом, от времени, прошедшего с начала суток. На таком чертеже имеются графики движения всех поездов, проходящих по данному участку пути за сутки.

Еще в начале экскурсии одному ученику было предложено заметить время прохождения поездов. Им было записано время прохождения одного товарного и одного пассажирского поезда. Ученики проверили, проходили ли поезда в соответствии с графиком.

На обратном пути школьники зашли посмотреть измерительный вагон системы Лященко. Учащимся было предложено дома произвести вычисления по тем заданиям, которые предлагались во время экскурсии.

Школьники поняли, как широко применяют математику в железнодорожном деле, в том числе и те разделы математики, которые изучаются в школе.

Занятие математического кружка. Многих вопросов, связанных с использованием математики на железной дороге, школьники не смогли рассмотреть во время одной экскурсии.

Эта работа была продолжена на очередном занятии математического кружка.

Сначала заслушали сообщения учащихся о результатах, проведенных ими дома вычислений по материалам экскурсий.

1. На экскурсии, пользуясь теоремой из курса геометрии, школьники смогли определить радиус закругления уже построенной железной дороги.

А как отмечали линию расположения будущей железной дороги при строительстве на этом участке пути?

Ведь надо, чтобы закругление проходило строго по дуге окружности одного радиуса (исключая переходные участки в начале и конце закругления). Величина радиуса от 600 *м* до 4000 *м*. Такого большого циркуля нет, да и пользоваться им было бы невозможно.

Оказывается, для построения таких кривых пользуются методом координат. Определяют координаты точек дуги окружности через каждые 10 *м*.

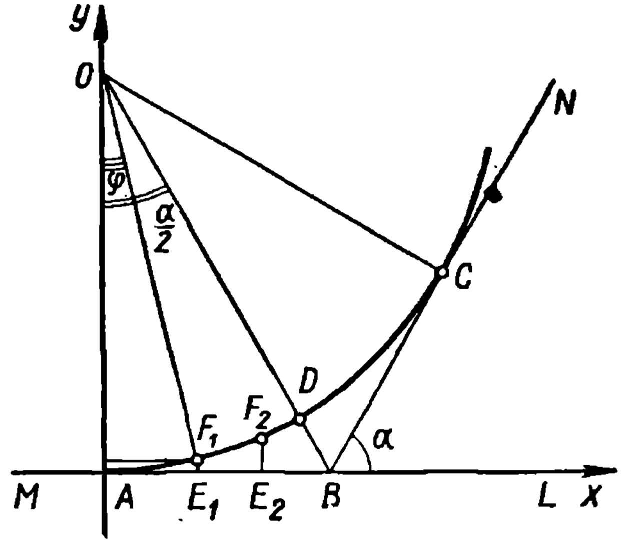


Рис. 13.

На рисунке 13 первоначальное направление дороги определяется прямой MB. В точке B дорога должна повернуть на некоторый угол α, после чего она будет иметь направление BN. Величина угла α обычно известна, она выбирается в зависимости от конкретных условий, характера данной местности и т. п. Однако поезд по ломаной линии идти не может. Нужно чтобы переход с одного прямолинейного участка на другой осуществлялся плавно. Для этой цели часть ломаной MBN заменяют дугой окружности; радиус этой окружности задается заранее. Между прямолинейными и круговыми участками устраивают переходные участки пути, имеющие форму специальных так называемых переходных линий.

По двум отмеченным направлениям BM и BN от B откладывают равные отрезки BA и BC и считают точку A началом дуги, а точку C — концом ее. Ниже будет найдено, какими должны быть длины отрезков BA и BC. Пусть: O — центр дуги ADC, R — ее радиус. Дуга ADC касается прямых BN в точке C и BM — в точке A.

Соединим O с A, B с C.

$$\angle AOC = \angle LBC = \alpha; \text{ отсюда } \angle AOB = \frac{\alpha}{2}; \quad BA = BC = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Нетрудно определить положение точки D — середины дуги AC.

$$BD = OB - OD = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}} - R.$$

Теперь построим точки F_1, F_2, $F_3 \ldots$, расположенные на дуге AD через равные промежутки k (например, $k = 10$ *м*). Строим систему координат следующим образом: за ось абсцисс принимаем прямую AB, за ось ординат — прямую AO. Найдем сначала координаты (x_1, y_1) точки F_1. Обозначим угол AOF_1 через φ. Вычислим этот угол. Из свойств центральных углов следует:

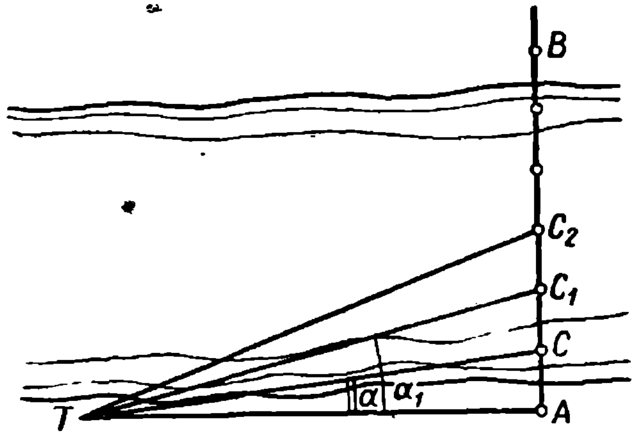


Рис. 14.

$\varphi = \frac{180° \cdot k}{\pi R}$; $AE_1 = x_1 = R \sin\varphi$; $E_1F_1 = y_1 = R - R\cos\varphi = R(1 - \cos\varphi)$.

Аналогично находятся координаты (x_2, y_2); (x_3, y_3); ... точек F_2, F_3, ..., например $x_2 = R \sin 2\varphi$; $y_2 = R(1 - \cos 2\varphi)$ и т. д. На практике не производят каждый раз таких вычислений, а пользуются готовыми таблицами (например, таблицами Федорова).

2. Нередко железная дорога пересекает реки. Тогда возникает необходимость о п р е д е л и т ь ш и р и н у р е к и, д л и н у б у д у щ е г о м о с т а. Для этого применяют способ определения расстояния до недоступной точки. Ученики вспомнили различные способы для определения расстояний до недоступной точки, рассмотренные на уроках геометрии (в частности, способ с применением формул тригонометрии для прямоугольного треугольника).

Но прежде чем построить мост, надо знать, каких размеров и какой формы сделать подводное сооружение для моста. А для этого нужно начертить поперечное сечение реки в том месте, где будут строить мост. Как же провести нивелирование под водой? Ранее разобранный способ нивелирования на земной поверхности не подходит. Школьникам было сообщено, что раньше для вычерчивания поперечного сечения реки поступали так: продвигаясь на лодке по реке в заданном направлении, через определенные промежутки времени (или через одинаковое число гребков) останавливались и измеряли *лотом* глубину.

Такой способ был не точен, так как отрезки пути, пройденные лодкой за одинаковые промежутки времени, неодинаковы. Стали использовать другой, более точный способ с применением теодолита и формул тригонометрии (рис. 14). Лодка движется в направлении AB. Под прямым углом к AB на берегу реки отмеряют определенное расстояние — базис AT. В точке T устанавливают теодолит. В момент опускания лота дается сигнал с лодки, которая находится, например, в точке C. Теодолитом отмечают угол α. Расстояние AC легко определить:

$$AC = AT \operatorname{tg} \alpha.$$

То же самое повторяют, когда лодка находится в другом пункте, например C_1, и определяют расстояние AC_1 и т. д.

Заметим, что аналогично можно поступить и в случае, когда $\angle BAT = \beta \neq 90°$, тогда AC можно вычислить по формуле $AC = \frac{b \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ (формула сообщена без доказательства).

3. Во время экскурсии учащиеся убедились, как важно диспетчеру уметь читать графики. На занятии кружка школьникам были заданы вопросы, связанные с чтением железнодорожных графиков. (Часть II, гл. 4, § 1, задача 8.)

4. Перед постройкой железной дороги составляют план ее на подробной топографической карте. И здесь, при вычерчивании планов различных участков дороги, поперечных и продольных сечений, используют приборы, изученные в VIII классе. Это делительный циркуль и пантограф, которые применяются для увеличения или уменьшения плана. Поперечный масштаб тоже используют часто для того, чтобы более точно отложить десятые доли последнего деления. А на экскурсии учащиеся убедились, как важна точность в железнодорожном деле.

5. На занятии кружка учащимся были предложены для решения арифметические задачи. Ниже приводится одна из них.

В 1955 году на одной железной дороге использовались в основном паровозы с к.п.д., равным 7%. К 1965 году все паровозы заменили тепловозами с к.п.д., равным 28%. Сколько процентов топлива при этом сэкономлено?

Ученики сначала ответили неправильно: 28% — 7% = 21%. И как они были удивлены, когда после проделанных вычислений получили верный ответ: экономия топлива составила 75%!

В заключение учащимся коротко сообщили о фабрике механизированного учета при управлении железной дороги. Школьники предложили организовать экскурсию на эту фабрику.

Литература. 1) М. А. Чернышев. Устройство, содержание и ремонт пути. М., Трансжелдориздат, 1957. 2) «Справочник изыскателя железных дорог», М., Трансжелдориздат, 1948. 3) К. М. Добросельский, И. И. Николаев, М. А. Чернышев, В. А. Шиловский. Общий курс железных дорог. М., Трансжелдориздат, 1956.

§ 2. ТЕМАТИКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЭКСКУРСИЙ

Приведем теперь образцы других тем для математических экскурсий и образцы вопросов, которые можно рассмотреть по каждой отдельной теме.

1. Математика в парке (в поле, в лесу, у реки и т. п.). Наблюдение различных геометрических фигур в природе (например, клумба в виде круга, в виде эллипса). Составление планов (парка, земельного участка). Провешивание прямой AB, если местность неровная и из точки A точка B не видна. Решение более трудных задач на построение и на вычисление на местности (см. часть II, гл. V, § 8). Понятие о задаче Потенó (см. часть II, гл. II, § 10, задача 14). Нахождение объема дерева на корню.

Литература. Я. И. Перельман [3]; П. Я. Дорф и А. О. Румер [1]; С. Голицын [1]; М. А. Знаменский [1]; Д. М. Смычников [1]; Диафильм «Измерения на местности в курсе геометрии восьмилетней школы» (автор — А. П. Громов).

2. Математика в сельском хозяйстве. Нахождение емкости бочки, ведра, силосной башни, силосной ямы; объема стога сена, скирды, кучи зерна; кубатуры различных построек (например, амбара). Определение живого веса скота. Геометрия пчелиной ячейки.

Литература. См. литературу к теме 1; Н. А. Мацко [1]; Г. А. Данилевич [1].

3. Математическая экскурсия на промышленное предприятие. Где и как применяются различные геометрические фигуры в заводской практике? Различные измерительные приборы, используемые на заводе (кронциркуль, нутромер, штангенциркуль, микрометр и др.). Значение точности в измерениях; понятие допуска. Графики и номограммы в технике. Производственные чертежи. Вычислительная техника и ее место в работе инженера и техника; вычисления на логарифмической линейке. Определение емкости котлов, баков, цистерн и т. п. Вычисление кубатуры отдельных помещений. Математика при расчете различных передач. Как применяется решение систем уравнений к расчету электрических цепей? Математика и рациональный раскрой материалов. Применение пантографа в заводских условиях.

Литература. Б. А. Кордемский и Н. В. Русалев [1], послесловие, гл. II и III; Д. Г. Бутко [1].

4. Математика в строительстве (домов, мостов и др.).

Применение отвеса в строительстве. Чтение чертежей проекта здания. Измерительные работы при разбивке фундамента здания. Подсчет объема земляных работ. Расчеты, связанные с применением грузоподъемных машин.

5. Экскурсия в картографическое бюро.

Знакомство с картографическими проекциями. Пантограф, его применение при вычерчивании карт.

6. Экскурсия в вычислительное бюро (института, завода, банка, статистического управления, управления железной дороги).

Знакомство с различными вычислительными и учетными машинами.

7. Экскурсия в математический кабинет университета или педвуза. Показ различных математических моделей, приборов и машин, сопровождаемый достаточно подробным объяснением.

§ 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Математический кружок может оказать большую помощь учителю в оборудовании математического кабинета. В то же время (и это главное) моделирование приносит большую пользу самим

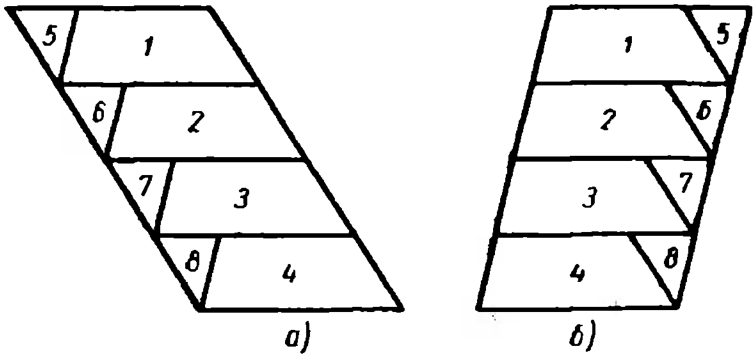


Рис. 15.

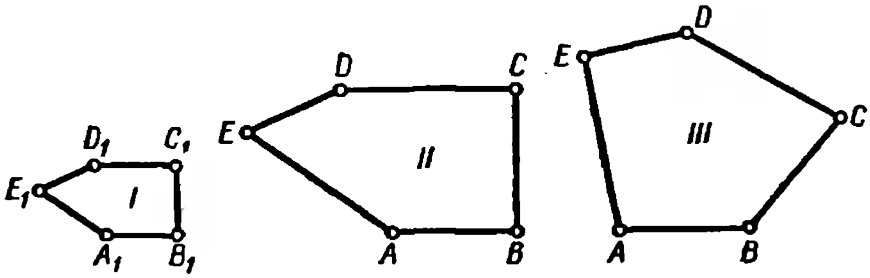


Рис. 16

школьникам, ибо изготовление моделей способствует более глубокому усвоению учащимися школьного курса математики и того материала, который изучается в кружке. Школьник приобретает полезные навыки практического характера, учится клеить, сваривать, выполнять столярные работы и т. п.

Прежде чем сделать модель, школьнику приходится продумать технологию ее изготовления, продумать, какие элементы модели находить путем измерения, а какие — вычислением. От этой подготовительной работы зависит не только качество модели, но и простота ее изготовления.

Во многих школах моделирование уже стало обязательной частью учебного процесса. Однако обычно ученики изготовляют только простейшие модели к отдельным задачам стабильного задачника или к теоремам школьного курса геометрии.

В кружке можно пойти значительно дальше. Модели могут быть изготовлены в качестве иллюстраций к докладам и сообщениям, в качестве иллюстраций к отдельным задачам, рассматриваемым в кружке. Имеет смысл ставить изготовление моделей в качестве основной темы отдельного занятия. Например, можно поставить тему «Изготовление картонных моделей многогранников».

Мы не будем подробно останавливаться на методике изготовления моделей, так как этот вопрос достаточно хорошо разработан в литературе (см. конец параграфа). Ограничимся лишь перечислением некоторых видов работ по моделированию, которые можно рекомендовать для кружка.

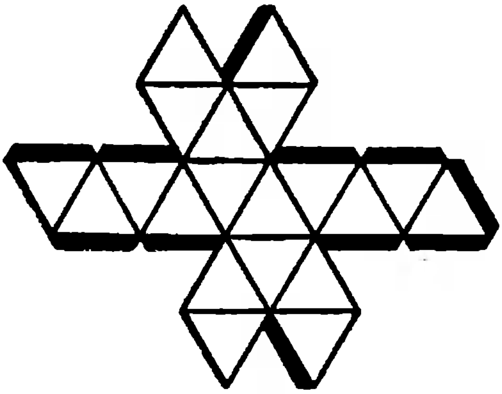


Рис. 17.

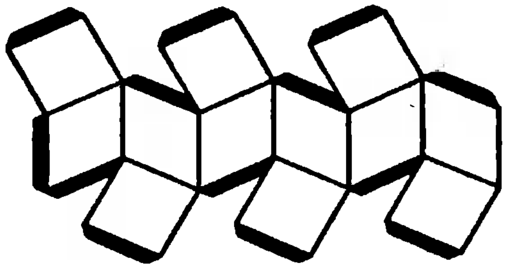


Рис. 18.

1. *Модели для иллюстрации равносоставленных фигур*. Например, модель, иллюстрирующая равносоставленность двух параллелограммов с равными основаниями и равными высотами, состоит из набора определенного числа равных трапеций и треугольников. Располагая их одним способом (рис. 15,*а*), получим первый параллелограмм; складывая их же иначе (рис. 15,*в*), получим второй параллелограмм.

2. *Шарнирные модели многоугольников*. Пример: модель для иллюстрации того, что два одноименных многоугольника, у которых соответственные стороны пропорциональны, не обязательно подобны. На рисунке 16 вы видите два подобных многоугольника; стороны многоугольника (II) в два раза больше соответственных сторон многоугольника (I). В вершинах A, B, C, D, E — шарниры. Многоугольник II сожмем (рис. 16, III). Стороны многоугольников I и III по-прежнему пропорциональны, но соответственные углы у них уже не равны.

3. *Модели шарнирных механизмов и нешарнирных инструментов* (пантограф, трисектор, инверсор и др.; прямой угол, центроискатель и др.).

4. *Приборы для простейших геодезических работ* (эккер, астролябия, вехи, мерная лента, эклиметр, рейки, ватерпас и др.).

5. *Картонные модели многогранников и круглых тел* (модели правильных, полуправильных и звездчатых многогранников; непростых многогранников и др.; модели, иллюстрирующие различные сечения многогранников плоскостью; набор моделей на тему «Сечения куба плоскостью»; модели-иллюстрации к различным задачам на разыскание геодезических линий).

Модель многогранника проще всего изготовить из плотной бумаги (типа ватман) или тонкого прочного картона. Целесообразно сначала вычертить развертку (выкройку) всей модели или нескольких ее крупных частей. Стороны многоугольников надрезаются (не насквозь), после чего можно сгибать начерченную поверхность по ребрам. У ребер, которые на развертке граничные, рекомендуется оставить кромку (небольшая полоска, примыкающая к многоугольнику). По кромкам склеивают грани.

На рисунках 17 и 18 изображены развертки правильного икосаэдра и ромбического двенадцатигранника. Построение грани последнего ясно из рисунка 19. Здесь $AC = BC = AB$, $CD \perp AB$, $AF = BF = CD$; $AH = BH = CD$; $AFBH$ — искомый ромб.

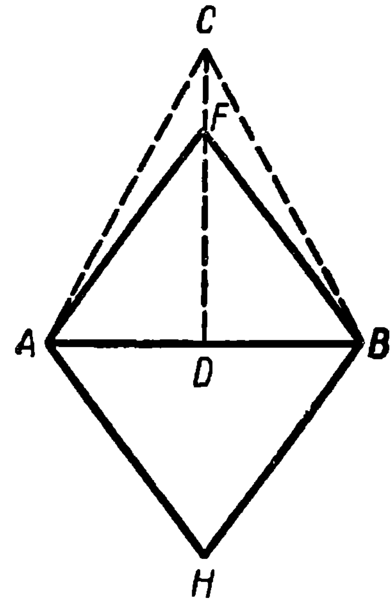


Рис. 19.

После того как многогранник склеен, рекомендуется окантовать ребра и на каждую грань наклеить многоугольник такой же формы, но из цветной бумаги и несколько меньших размеров. В результате ярко выделяются ребра многогранника. Чтобы грань не коробилась, желательно предварительно оклеить ее внутреннюю поверхность таким же многоугольником, как и снаружи. Чтобы сделать видимой внутренность многогранника (оси симметрии, сечения, вписанные тела и т. п.), достаточно вырезать в каждой его грани подобный ей многоугольник. На рисунке 20 видна модель правильного тетраэдра, вписанного в куб.

6. *Каркасные модели* (металлические или деревянные) много-

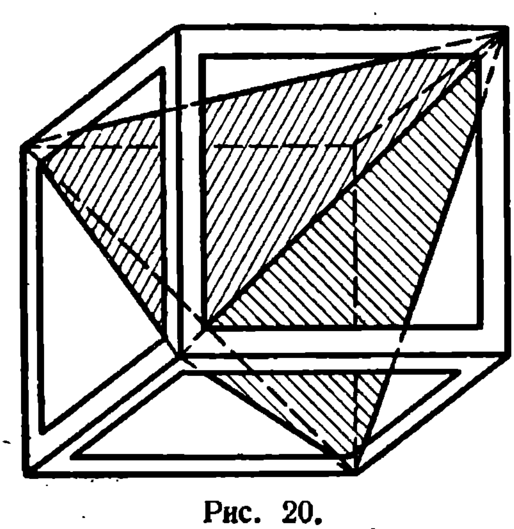


Рис. 20.

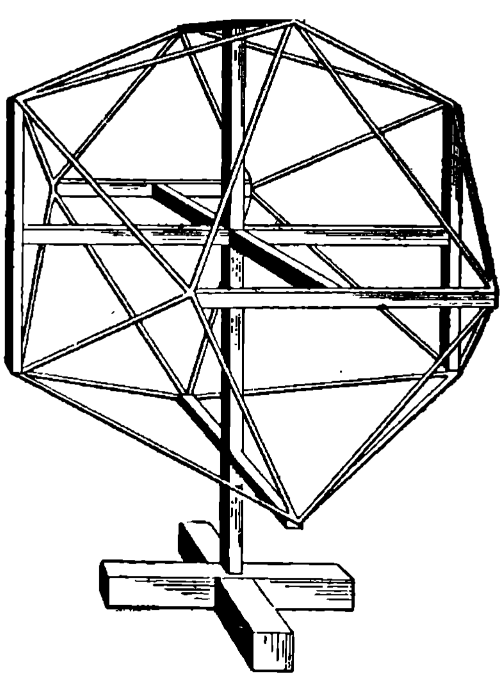


Рис. 21.

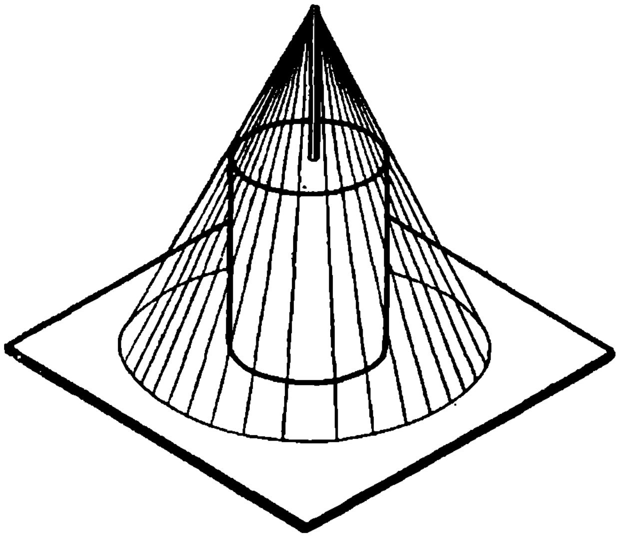


Рис. 22.

гранников и круглых тел. Пример приведен на рисунке 21 (икосаэдр).

Такие модели удобны, когда нужно показать сечение многогранника, какую-либо линию на сечении или фигуру, вписанную в многогранник (например, куб, вписанный в октаэдр). Каркасные модели особенно выгодны при ознакомлении учащихся со свойствами параллельной или центральной проекции. В этом случае предполагается рассмотреть теневые фигуры, которые образуются на экране при проектировании на него какой-либо каркасной фигуры.

7. Большого внимания заслуживают *модели, создаваемые и изменяемые во время доклада или сообщения*. Таковы *жидкостные и теневые* модели конических сечений (гл. II, § 14, тема 14); модели симметричных фигур, образуемых с помощью листка бумаги и ножниц; лист Мебиуса, склеиваемый и разрезаемый во время доклада, и многие другие.

8. Члены кружка могут изготовить интересные и полезные модели из стекла или плексигласа, из папье-маше и гипса, а также деревянные (сплошные) и нитяные модели. Заслуживают также внимания комбинированные картонно-нитяные и стеклянно-нитяные модели, которые позволяют рассматривать фигуры внутри многогранника или круглого тела. Ограничимся простым примером, изображенным на рисунке 22: в конус (из цветных ниток) вписан цилиндр (картонный, тоже цветной, но другого цвета).

Литература. М. И. Каченовский [1]; М. М. Лиман [1].

Глава IV

ВНЕКЛАССНОЕ ЧТЕНИЕ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОЧИНЕНИЯ

§ 1. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЖЕЛАЮЩИХ

Мы рекомендуем начинающему учителю (независимо от того, будет ли он вести математический кружок или нет) уже с первых недель своей работы в школе систематически предлагать учащимся на дом *задания для желающих*. Такие задания—прекрасное средство для повышения у учащихся интереса к математике, улучшения их навыков в решении задач, своеобразный стимул к повторению пройденного. Это, пожалуй, наиболее доступная начинающему учителю форма дополнительной работы с хорошо успевающими учащимися.

Вначале можно предложить одну-две простые занимательные задачи (вовсе не самые занимательные из известных учителю задач). Такие задачи нужно предлагать и в дальнейшем. Подобрать их можно по книгам Я. И. Перельмана, Е. И. Игнатьева, Б. А. Кордемского и других. Совсем не обязательно, чтобы эти задачи были связаны с изучаемой темой. Однако основной частью заданий для желающих должны быть негромоздкие задачи повышенной трудности, примыкающие к изучаемому на уроках материалу. Таких задач немало в сборниках В. Б. Лидского и др. [1], Г. В. Дорофеева и др. [1], И. Х. Сивашинского [1], [3], Д. О. Шклярского и др. [1], Б. И. Делоне и О. К. Житомирского, К. С. Барыбина и П. С. Исакова, В. А. Кречмара и в других задачниках. Учителю нужно *накапливать* такие задачи, *заранее распределять их по урокам*. Решение некоторых задач, предлагавшихся для желающих, целесообразно рассмотреть на уроке, а учащихся, справившихся с этими задачами, поощрить соответствующей оценкой.

В качестве задания для желающих можно предложить учащимся самостоятельно провести доказательство какой-либо теоремы школьного курса, отличное от рассмотренного на уроке (например, теоремы Пифагора — часть II, гл. V, § 4). Исходные пункты, идею такого доказательства может наметить сам учитель. Полезно также включить в задания для желающих задачи, примыкающие к материалу *прошлых* лет (например, арифметические задачи повышенной трудности в VIII и IX классах).

Невозможно указать универсальный рецепт, как часто предлагать задания для желающих. Для начала советуем учителю ограничиться одной-двумя задачами в две недели.

Следует также регулярно предлагать индивидуальные задания учащимся, проявляющим повышенный интерес к математике. Разумеется, эти задания (в отличие от заданий отстающим) даются лишь желающим, с учетом их развития, знаний, интересов и запросов.

В качестве индивидуального задания может быть предложено: а) решение цикла задач по определенной теме (например, задачи на построение методом переноса); б) ответ на вопросы по какой-либо математической книге; в) изготовление моделей отдельных фигур и т. п. Индивидуальным заданием является математическое сочинение (см. § 3).

§ 2. ВНЕКЛАССНОЕ ЧТЕНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Привить вкус и навыки к чтению математической литературы — одна из самых важных задач внеклассной работы по математике. Чтение математической книги или статьи представляет значительные трудности для неискушенного читателя. В чем заключаются эти трудности?

Прежде всего в сжатости изложения материала. Сжатость изложения проявляется, в частности, в том, что нередко рассматривается сразу общий случай, хотя для понимания сущности дела неопытному читателю было бы лучше рассмотреть сначала несколько частных случаев.

Нередко автор не объясняет, *как* он *догадался* о решении той или иной задачи, о доказательстве той или иной теоремы, от каких простейших случаев и частных соображений он отталкивался, какими формулами пользовался.

Часто опускаются второстепенные выкладки, вместо них появляются слова: «отсюда легко получить», «нетрудно увидеть». Проведение выкладок предоставляется читателю.

Перечисленные особенности математических работ обычно способствуют *четкости* изложения. Однако начинающий читатель видит здесь прежде всего *сухость*.

Для чтения математической работы требуется определенный навык к *логическому мышлению*. В математических статьях и книгах нет расчленения всего рассуждения на простейшие, элементарные умозаключения; нет, разумеется, и логических пауз, логических ударений, характерных для устной речи. Этим, видимо, объясняется, что многие учащиеся с большим трудом воспринимают то, что написано в математической книге, хотя довольно легко усваивают тот же материал «на слух» — по объяснению преподавателя.

Предложения в математической книге часто выражают определенную связь между геометрическими фигурами, а чтобы представить себе эту связь, требуется *развитое пространственное воображение*.

Работа над математической статьей или книгой состоит не только в прочтении того, что в ней написано, но и в восстановлении того, что в ней опущено.

Некоторый минимум навыков к чтению математической литературы ученик получает на уроке и при выполнении домашних заданий (работа с учебником, задачником и т. п.).

Работа учителя по организации внеклассного чтения. Учитель всегда имеет возможность на уроке или на занятии кружка привлечь внимание учащихся к тем или иным книгам по математике или ее истории. Например, рассказывая в IX классе о числе π и задаче о квадратуре круга, учитель указывает, что много интересных сведений можно найти в «Занимательной геометрии» Я. И. Перельмана (страницы такие-то) или в книге Ф. Рудио «О квадратуре круга» (страницы такие-то). При этом он показывает учащимся названную книгу. Всегда найдутся учащиеся, которые пожелают ознакомиться с рекомендованной литературой.

Следует систематически поощрять тех учащихся, которые в своих ответах используют сведения из рекомендованных им книг. Учеников нужно предупредить заранее о возможности такого рода поощрения. Нужно *предлагать* учащимся в порядке выполнения индивидуального задания *подготовку исторических справок* (например, о Декарте и Виете — в VIII классе, о Ньютоне — в X классе, об изобретении логарифмов — в IX классе и др.) или доказательство отдельных теорем по тем или иным книгам или статьям. Если учитель следит за появлением свежих популярных статей и книг по математике, то он всегда имеет возможность порекомендовать своим учащимся подходящую для них новинку.

К рекомендации книг и статей нужно подходить с большой осторожностью. Если мы порекомендуем книгу, которая трудна для учащихся, и при этом никаких разъяснений не сделаем, то в следующий раз ученик не обратит внимания на наши рекомендации. Мало только назвать какую-либо книгу для чтения. Желательно также указать, какие трудности могут возникнуть у школьников при чтении этой книги и как их обойти или преодолеть; указать, на какие места (главы, страницы) обратить особое внимание, что опустить совсем, что — при первом чтении; показать книгу школьникам; рассказать (или зачитать) отрывок из нее; посоветовать, как и где ее можно достать, а в некоторых случаях помочь достать.

Большие возможности по привитию учащимся вкуса и интереса к математической литературе дает математический кружок. *На занятиях кружка* можно время от времени ставить небольшие *сообщения* учеников о *новых книгах*, устраивать коллективные чтения беллетристических рассказов, очерков и фрагментов, связанных с математикой (например, рассказ А. П. Чехова «Репетитор», отрывки из «Живой математики» Перельмана и др.). В конце каждого заседания кружка нужно *указать* учащимся литературу по теме этого заседания.

В математической *стенгазете* целесообразно систематически помещать краткие *рецензии* на *рекомендуемые книги* и статьи или аннотации к ним, в частности к новинкам. Эти аннотации помещаются часто под заголовками: «Прочти эту книгу», «Интересная статья», «Новая книга о русском математике» и т. п. Заголовок обычно диктуется содержанием книги.

Помещая заметку в стенгазету по тому или иному вопросу, желательно указывать в конце одну-две книги (или статьи) для дополнительного чтения. В газете стоит также помещать заметки об учащихся, систематически читающих математическую литературу.

Порекомендовав учащемуся какую-либо книгу по математике, учителю нужно затем *побеседовать* с ним *об этой книге*, в случае необходимости почитать с ним отдельные отрывки, *помочь разобраться в более трудных местах* книги. В ходе бесед с учеником учитель выясняет, к каким вопросам математики ученик имеет большую склонность. Учитель сможет тогда предложить ученику определенную последовательность в чтении математической литературы. Если ученик справляется с литературой, непосредственно примыкающей к школьной программе, учитель может ему порекомендовать перейти к чтению отдельных книг по вопросам высшей математики.

Не всегда ученики в состоянии достать рекомендованную книгу; поэтому при математических кружках организуются *математические библиотечки*. Ими ведают специально избранные из числа членов кружка библиотекари. Часть книг для библиотечки берется на время из разных библиотек, часть книг — это книги, принадлежащие учащимся и учителю и предоставляемые библиотечке на время. Некоторые книги — подарки учеников или учителей библиотечке.

Полезно хотя бы в некоторые книги математической библиотечки вложить список вопросов для самопроверки. Составление такого вопросника можно поручить учащимся.

Важное место в повышении интереса к книге имеют конференции, кружковые занятия, пионерские сборы, посвященные математической книге, например: «Что мне понравилось в такой-то книге», «Какую интересную математическую книгу я читал». На такой конференции можно организовать викторину по содержанию тех или иных математических книг (или статей).

Повышению интереса к математической книге способствуют *конкурсы, посвященные книгам* по определенному вопросу.

Можно, например, провести конкурсы по таким темам: «Выдающиеся математики», «Математики в нашей стране», «Знаменитые теоремы геометрии» и др. Весь круг вопросов разбивается на несколько частей (скажем, на четыре-пять частей). По каждой части предлагается примерно одинаковое число вопросов и задач. Каждая серия вопросов помещается на отдельном плакате (или в отдельном номере математической стенгазеты). Промежуток между опубликованием отдельных серий — две-три недели. Каждый вопрос печатается вместе с сопроводительным текстом и с рисунком. Перед появлением очередной серии вопросов вывешиваются также ответы на вопросы предыдущей серии и фамилии учащихся, приславших правильные ответы. Для того чтобы ответить на какой-либо вопрос, ученику придется порыться в литературе. Он узнает много нового. Желательно, чтобы подобного рода конкурсы также были организованы молодежными газетами, областными или республиканскими управлениями радиовещания.

В каждом классе желательно *вывесить красиво оформленный список книг и статей* (с аннотациями) для внеклассного чтения по математике. Аннотацию можно начать с какой-либо задачи, помещенной в книге, с интересного факта, описанного в книге и т. д. Списки помещаются под заголовками: «Что читать по математике?», «Читал ли ты эти книги?» и др.

§ 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОЧИНЕНИЯ

Некоторые учителя каждому ученику своего класса предлагают выполнить за две-три четверти сочинение на математическую тему. В других школах математические сочинения пишут только члены кружка, причем лучшие сочинения помещаются в математическом журнале кружка. К сожалению, нередко выполнение такой работы сводится к тому, что ученик списывает из рекомендованной ему книги тот текст, который касается темы его сочинения. Это объясняется часто тем, что ученику предлагается тема без всяких дополнительных разъяснений, рекомендуется только один источник и т. п.

Наиболее интересны и ценны те сочинения, при составлении которых ученик выполнил некоторые исследования, подметил свойства тех или иных фигур, самостоятельно доказал какие-либо математические предложения, хотя бы несложные. Обширные возможности в этом направлении дают задачи на построение, задачи на решение и исследование систем уравнений с буквенными коэффициентами и др.

Заслуживают внимания темы, рассчитанные на то, что учащийся самостоятельно откроет или докажет давно известные факты (известные другим, но не учащемуся), например «Теорема Птолемея и ее приложения».

Учителю нужно не только продумать список литературы, который он собирается предложить учащемуся, но и наметить последовательность, в которой эти пособия будут указаны ученику. Если в литературе имеется полное изложение рассмотренной темы, то, порекомендовав ученику сразу всю литературу, мы только ограничим его творческие возможности.

Некоторые темы следует предлагать без всякой литературы, давая ученику лишь первые необходимые указания. Так, например, предлагая тему «Теорема Птолемея», нужно дать формулировку теоремы и кое-какие указания относительно идеи ее доказательства. Доказательство даст сам ученик.

В течение работы учащегося над сочинением учителю нужно обсудить с этим учеником уже выполненную часть работы и в случае необходимости дать ему указания, как проводить работу дальше.

Учителю во всяком случае нужно себе представить план работы, прежде чем предлагать эту работу ученику.

Приведем теперь несколько примеров тем для ученических сочинений (темы 1—4 заимствованы из книги С. Е. Езриля [1]):

1) построение треугольника по положению некоторых его точек (например, гл. II, § 4, т. 7); 2) свойства треугольника, углы которого образуют арифметическую прогрессию; 3) свойства вписанного в окружность четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями; 4) описанный параллелограмм; 5) теорема Стюарта и ее приложения; 6) теорема Птолемея и ее приложения; 7) свойства тетраэдра, аналогичные свойствам треугольника и четырехугольника; 8) построение треугольника, вписанного в окружность, по следам некоторых линий треугольника на окружности; 9) элементы симметрии правильных многогранников; 10) число окружностей, равноудаленных от n точек на плоскости; 11) число сфер (или плоскостей), равноудаленных от n точек; 12) искусственные приемы, применяемые при решении нелинейных систем уравнений; 13) определение радиуса шара, касающегося других данных шаров и данных плоскостей (составить самостоятельно несколько задач и дать их решение); 14) математические задачи на шахматной доске (обход шахматной доски различными фигурами; различные расстановки фигур на шахматной доске и т. п.); 15) построение четырехугольника по трем сторонам и двум углам (с полным исследованием); 16) геодезические линии на параллелепипеде (самостоятельно придумать и решить несколько задач типа задачи «О пауке и мухе»).

Очень интересны сочинения, посвященные изучению отдельных геометрических преобразований. Это могут быть классические преобразования (различные виды движений, центральное подобие, инверсия, аффинное преобразование или его частные случаи и т. п.). Можно предложить также почти не изученные преобразования. Например: «Даны две точки A и B. Каждой точке P сопоставляется точка P' пересечения высот (или медиан и т. п.) треугольника APB. Изучить это преобразование». При изучении преобразования нужно выяснить, во что преобразуются те или иные фигуры, какие фигуры преобразуются сами в себя, как может быть применено преобразование к решению задач на построение, к доказательству теорем и т. д.

Глава V

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПЕЧАТЬ

§ 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТЕНГАЗЕТА

Для выпуска математической стенгазеты не обязательно наличие математического кружка. Иногда математическая стенгазета выпускается в период организации кружка, когда нужно привлечь внимание учащихся к кружку. Специальный номер математической стенгазеты выпускается (независимо от наличия кружка) к школьному математическому вечеру.

Однако мы будем ориентироваться на тот наиболее важный и наиболее реальный случай, когда газета выходит как орган кружка. Основная цель такой газеты — пропаганда математических знаний среди учащихся, не состоящих в кружке, повышение их интереса к математике, привлечение их к кружку, освещение опыта работы кружка. Материалы, помещаемые в стенгазете, должны быть также интересны и для членов кружка. Известную часть газеты занимают материалы, которые не рассматриваются на заседаниях кружка. Газета как бы дополняет кружковые занятия.

Школьникам, выпускающим газету, эта работа приносит большую пользу, так как приходится подбирать материалы для газеты, а для этого они знакомятся с различными книгами, выбирают из них нужный материал, отделяют самое главное, литературно обрабатывают отобранное. Все это благотворно сказывается на расширении математического кругозора учащихся, на их навыках чтения математической литературы, на их речи и грамотности.

Название газеты. Уже само название газеты должно привлечь к ней внимание учащихся. Поэтому лучше не давать газете название «Юный математик», ставшее шаблонным. Можно привести немало примеров, когда школьники удачно выбирали названия для своих газет. Вот несколько таких названий: «Давайте поспорим», «Алтригар»[1], «В мире математики», «Математика и жизнь», «Арксинус», «Архимед» и др.

Кто выпускает стенгазету? Обычно выделяется постоянная редколлегия (редактор, секретарь, художник и другие), которая

[1] Расшифровывается так: алгебра — тригонометрия—геометрия — арифметика.

собирает (увы, с большим трудом) заметки у членов кружка и более или менее регулярно выпускает газету. Опыт показал, что это не единственная и, пожалуй, не лучшая форма организации выпуска математических стенгазет. В некоторых кружках нет постоянной редколлегии. Члены кружка разбиваются на группы (скажем, по классам), и каждая из этих групп выпускает свой номер стенгазеты. Например, 1-й номер выпускают учащиеся из IX А класса, 2-й — из IX Б класса, 3-й — из IX В класса и т. д. Это вызывает соревнование (каждая группа отстаивает честь своего класса и старается выпустить газету лучше, чем другая группа). Так как каждая группа выпускает газету сравнительно редко, то эта работа привлекает учащихся своей новизной и не приедается им. Для окончательной проверки качества выпускаемой газеты иногда выделяется один из членов бюро кружка. Выпускать газету нужно регулярно, не реже одного раза в полтора-два месяца.

Основные разделы газеты. Содержание стенгазеты должно быть разнообразным, в противном случае она очень скоро надоест учащимся.

Укажем разделы, которые желательно иметь в стенгазетах (конечно, не все разделы в одном номере). Названия этих разделов можно не указывать в газете.

1. *Математическая жизнь в нашей школе* (наш кружок; недостатки в его работе; что было на заседаниях кружка; о математическом вечере, прошедшем или предстоящем; о математической олимпиаде или турнире; связь с другими кружками; помощь кружкам младших классов и т. п.).

2. *Математическая жизнь в нашей стране* (выдающиеся советские математики; доступное изложение их достижений; новые советские счетные механизмы и т. п.).

3. *Краткое изложение некоторых математических вопросов.* Больших выкладок или подробных доказательств теорем нужно избегать. Но нужно делать ссылки на литературу, где эти доказательства можно найти. Можно в нескольких номерах газет помещать целую серию заметок (по одной заметке из серии в каждом номере), связанных общностью темы, например: «*Тайны натурального ряда*» (решенные и нерешенные задачи теории чисел, например: «Проблема Гольдбаха», «Загадка простых чисел», «Последняя теорема Ферма», «Совершенные числа» и др.), «*Искусство быстро вычислять*» (часть II, гл. II, § 6). «*Математика и жизнь*» (о практических приложениях математики).

4. *Биографии* выдающихся математиков (основные даты, один-два ярких эпизода, фотографии).

5. *Заметки по истории математики* (небиографического характера), например: «Как люди научились считать», «Как умножали в старину», «Квадратура круга» и др.

6. *Краткие сообщения интересных фактов по математике и ее истории* (помещаются под общим заголовком: «Знаешь ли ты, что...»

или «Известно ли тебе...», или под другими подобными названиями). Лучше, чтобы эти сообщения были связаны общностью темы, например: «Счетная техника», «Русская математика». Приведем пример.

.Знаешь ли ты, что...

...Арифмометр, который можно сейчас встретить в любой бухгалтерии, был изобретен около 100 лет назад (в 1874 году) русским инженером В. Т. Однером.

... Опытный вычислитель без арифмометра выполняет в среднем за смену до 300 арифметических действий, с помощью арифмометра до 2000 действий, а советская электронная счетная машина БЭСМ-6 совершает за одну секунду до 1 500 000 арифметических действий.

... Одна счетная машина БЭСМ-6, которой управляют три человека в смену, заменяет 1 000 000 вычислителей.

... Для составления карт приходится иногда решать системы алгебраических уравнений с большим числом неизвестных. Систему в 800 уравнений с 800 неизвестными счетная машина БЭСМ-6 решает за 10 минут. 1000 опытных вычислителей справились бы с этой задачей лишь за 4 месяца.

... Современные электронные счетные машины производят вычисления не в привычной для нас десятичной системе счисления, а в двоичной системе счисления.

7. *Наш словарь.* В живой форме объясняется смысл и происхождение какого-либо математического термина (например, «цифра», «алгебра», «номограмма» и др.).

8. *Наш календарь.* Очень краткое (одна-две фразы) сообщение по истории математики.

9. *«Геометрические иллюзии»* (часть II, гл. I, § 10).

10. *Занимательные задачи,* софизмы, парадоксы, арифметические ребусы; задачи, предлагавшиеся на различных олимпиадах или конкурсах (с указанием, где и когда были предложены). Обычно они помещаются под заголовком «Уголок смекалки», «Подумай» и т. п. или под заголовком, диктуемым условием той или иной конкретной задачи.

Газета может объявить конкурс на решение задач. Желательно в газете опубликовать ответы к ранее предложенным задачам, а также фамилии учащихся, представивших решения.

11. *«Математические» стихотворения* (о математике и математиках).

12. *Математический юмор.* Можно использовать забавные случаи, имевшие место на заседаниях кружка или на уроках математики.

Приведем пример. На уроке ученице нужно было сократить дробь $\frac{\sin 2x}{2\sin x}$. Она «смело» сокращает: $\frac{\sin 2x}{2\sin x}$ «Сколько же получится?» — «Ничего не получится. 0»(?!). Этот случай послужил темой для коротенькой заметки.

Темой заметки «Как ребята обращаются с единицей» послужат типичные ошибки шестиклассников: $1 - 1 = 1$, $0 - 1 = 0$, $1 : 1 = 0$ и т. п.

13. *Высказывания о математике* (см. конец этой главы).

14. *Библиографический отдел* (о новых и старых книгах и статьях).

15. Раздел: «*Ответы на вопросы читателей*» (например, под общим заголовком «Спрашивай — отвечаем»).

Оформление газеты, Так как сделать красивый заголовок — весьма кропотливое дело, то можно сохранить один заголовок для всех номеров. Газету неплохо украсить метким высказыванием о математике (боковица).

Сами члены кружка могут изготовить постоянную рамку для газеты (желательно застекленную). Заметки лучше не наклеивать, а вставлять в газету, с тем чтобы их можно было потом вынуть и сохранить. Составление альбома из таких заметок поручается одному из членов кружка.

Незачем помещать в газету большую передовую статью. Предпочтения заслуживают мелкие заметки в 8—15 строк. Желательно, чтобы заметки были напечатаны на машинке.

В каждом номере должно быть не менее двух-трех фотографий, рисунков или чертежей. Можно, в частности, помещать фотографии победителей математических олимпиад, а также фотографии и рисунки математических приборов и т. д. Приведем описание некоторых стенгазет.

I. Стенгазета кружка VI классов

Заголовок — «Смекалка». Орган математического кружка VI классов средней школы № 27. Боковица: «Математика — это гимнастика ума» (М. И. Калинин).

Заметки: 1) «Сергей Мергелян» (фото С. Н. Мергеляна); 2) «Наш кружок» (фото «На занятии кружка»); 3) «Как это сделать?» (две задачи: а) как разделить 7 яблок поровну между 12 мальчиками, не разрезая ни одно яблоко на 12 частей? б) как из девяти восьмерок составить 100?; 4) «Трудная штука — деление» (как делили в старину); 5) «Наш словарь» («Цифра»); 6) «Сообрази!» (ч. II, гл. I, § 1, задача 4); 7) «Сложите 100 чисел» (как маленький Гаусс сложил в уме 100 чисел; примеры для читателей газеты: вычислить в уме а) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99 - 100$, б) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{9 \cdot 10}$).

II. Газета кружка VIII классов

Заголовок: «Математика на каждом шагу». Орган математического кружка VIII классов школы № 6. Боковица: «Математику уже потому учить нужно, что она ум в порядок приводит» (М. В. Ломоносов).

З а м е т к и: 1) «Русские женщины-математики» (фото П. Я. Полубариновой-Кочиной); 2) «Трисекция угла» (рисунок трисектора); 3) «Готовимся к олимпиаде» (фотография: члены кружка — победители прошлогодней олимпиады); 4) «В чем ошибка?» (софизм: «Всякий треугольник — равнобедренный»; чертеж); 5) «Франсуа Виет» (краткая биография; портрет Виета); 6) «Логическая задача».

Часть II, глава 1, § 1, задача 1.

§ 2. ЖУРНАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА. ДРУГИЕ ФОРМЫ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПЕЧАТИ

Журнал. На занятиях кружка не все учащиеся полностью усваивают рассматриваемый материал. Некоторые школьники допускают ошибки в записях; другие забывают почти все то, что рассматривалось на заседаниях кружка. Чтобы предоставить учащимся возможность еще раз вернуться к вопросам, рассмотренным в кружке, целесообразно вести журнал кружка.

В журнал заносится все наиболее важное, о чем было рассказано в кружке: тексты (или тезисы) докладов и сообщений, все рассмотренные задачи, в том числе предложенные на дом. В журнале указываются также фамилии учащихся, изложивших свои решения задач у доски. Если задача, предложенная на дом, не разобрана на заседании кружка, то в журнал вносится текст решения, составленного одним из членов кружка и проверенного руководителем. В журнал помещаются отдельные задачи, предложенные учащимися, и все оригинальные самостоятельные исследования учащихся, в частности лучшие математические сочинения. В журнал могут быть включены отдельные статьи историко-математического или математического характера, составленные учащимися, а также интересные выписки из книг и журналов. Разумеется, журнал должен быть красиво оформлен, написан четким почерком, снабжен рисунками и фотографиями. Для выпуска журнала лучше создать скользящую редколлегию, как и при выпуске газеты. *Отдельные номера журнала можно вывешивать на специальной доске (как стенгазету).*

Другие формы школьной математической печати

«Уголок математики» в общешкольной или классной стенгазете. Здесь обычно помещаются задачи (преимущественно занимательные) и небольшие заметки по математике и ее истории.

Математическая фотогазета. В ней помещаются фотографии выдающихся математиков, фотографии моделей, старинных книг по математике, фотографии победителей математических соревнований и т. д. Каждая фотография снабжается кратким объяснительным текстом. Иногда в такую фотогазету включают рисунки (например, геометрические иллюзии, чертежи многогранников и т. п.).

Монтажи фотографий и рисунков. Фотомонтажи обычно бывают на определенную тему, например «Творцы математики». «Выдающиеся математики нашей Родины» и т. п. На большом листе бумаги располагают фотографии. Под каждой помещается краткая биография ученого.

Можно выпустить монтажи рисунков (или фотографий), посвященных какому-то одному и тому же математическому вопросу, например «Классификация многогранников» или «Теорема Пифагора».

Альбомы. Относительно содержания альбомов можно повторить все то, что было сказано относительно монтажей. Заслуживает внимания изготовление альбома «Замечательные теоремы геометрии» (теоремы, не входящие в обязательный школьный курс, например теоремы Чевы, Менелая, Дезарга, Паппа, Птолемея и др.), «Применения математических машин» и т. п.

Высказывания о математике. Интересные высказывания о математике могут быть использованы в математических беседах учителя, на занятиях математических кружков, при проведении других видов внеурочных занятий. В школе можно повесить отдельные плакаты с высказываниями выдающихся людей о математической науке.

Приведем некоторые высказывания о математике.

К. Маркс: «Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой»[1].

Ф. Энгельс: «Как и все другие науки, математика возникла из практических нужд людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики».

«Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления».

Ф. Энгельс: «Для диалектического и вместе с тем материалистического понимания природы необходимо знакомство с математикой и естествознанием». («Анти-Дюринг». К. Маркс, Ф. Энгельс. Сочинения, изд. 2, т. 20, стр. 10—11).

В. И. Ленин: «Напрасно думают, что она (фантазия) нужна только поэту. Это глупый предрассудок! Даже в математике она нужна, даже открытие дифференциального и интегрального исчислений невозможно было бы без фантазии» (В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 45, Госполитиздат, 1964, стр. 125).

М. И. Калинин: «Во-первых, математика дисциплинирует ум, приучает к логическому мышлению. Недаром говорят, что математика — это гимнастика ума...

---

[1] Цитируем по статье П. Лафарга «Воспоминания о Марксе» — Сборник «Воспоминания о Марксе и Энгельсе». М., Госполитиздат, 1966, стр. 66.

...Во-вторых, и это, пожалуй, будет вам ближе, — диапазон практического применения математики огромен. Какую бы науку вы ни изучали, в какой бы вуз ни поступали, в какой бы области ни работали, если вы хотите оставить там какой-нибудь след, то для этого везде необходимо знание математики. А кто из вас не мечтает теперь стать моряком, летчиком, артиллеристом, квалифицированным рабочим в различных отраслях нашей промышленности, строителем, металлургом, слесарем, токарем и т. д., опытным полеводом, животноводом, садоводом и т. д., путейцем, паровозным машинистом, торговым работником и т. д.? Но все эти профессии требуют хорошего знания математики».

Ж. Фурье (известный французский математик XIX век): «Глубокое изучение природы—самый плодотворный источник математических открытий».

В. П. Чкалов: «Полет — это математика».

М. В. Ломоносов: «Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит».

«Химия — правая рука физики, математика — ее глаз».

«Все, что без этого было темно, сомнительно и неверно, математика сделала ясным, верным и очевидным».

А. С. Пушкин: «Вдохновение нужно в поэзии, как в геометрии».

Галилео Галилей: «Великая книга природы написана математическими символами».

Леонардо да Винчи: «Никакое человеческое исследование не может быть названо истиной, если оно не проходит через математические доказательства».

К. Ф. Гаусс (крупнейший немецкий математик XIX века): «Математика — царица наук, а арифметика — царица математики».

К. Вейерштрасс (известный немецкий математик XIX века, учитель С. В. Ковалевской): «Математик, который не является в известной мере поэтом, никогда не будет настоящим математиком».

С. В. Ковалевская (первая русская женщина-математик): «Многие, которым никогда не представлялось случая более узнать математику, считают ее наукой сухой. В сущности же это наука, требующая наиболее фантазии, и один из первых математиков нашего века говорит совершенно верно, что нельзя быть математиком, не будучи в то же время поэтом в душе».

Д. И. Писарев (известный русский критик XIX века): «Математика — наука великая, замечательнейший продукт одной из благодарнейших способностей человеческого разума».

С. Л. Соболев (академик-математик, Герой Социалистического Труда): «В коммунистическом обществе профессия математика станет одной из самых распространенных. К этому нужно готовиться уже сейчас».

Глава VI

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВЕЧЕРА

§ 1. ПОДГОТОВКА ВЕЧЕРА

В школе, пожалуй, наиболее удобно проводить математические вечера для учащихся параллельных классов. Иногда проводятся вечера для школьников VIII—IX классов и V—VII классов. В некоторых городах пединституты и дома пионеров организуют городские математические вечера.

Подготовка математического вечера — очень кропотливое дело. Поэтому начинающему учителю лучше ориентироваться на проведение одного такого вечера в течение года.

Подготовку к вечеру нужно начать заранее, лучше всего за полтора-два месяца до вечера. Для руководства всей подготовительной работой выделяется комиссия, в которую входит учитель математики и несколько (4—5) учащихся. Члены комиссии, посоветовавшись с другими учащимися и взвесив возможности, составляют план вечера и выделяют для каждого участка ответственного и исполнителей (с их согласия, конечно). Комиссия устанавливает крайний срок, к которому вся подготовительная работа должна быть завершена. Проверку качества подготовки каждого выступления тоже следует поручать учащимся, хотя за всем придется следить самому учителю.

В процессе подготовки к вечеру нужно предоставить максимальные возможности для самодеятельности учащихся, для проявления их самостоятельности и инициативы.

Учитывая то, что основная цель вечера — повышение интереса к математике, желательно привлечь к его организации как можно больше учащихся. Если ученику будет поручена подготовка какого-то номера программы, то его интерес к вечеру значительно возрастет.

За несколько дней до вечера вывешивается красочное объявление о месте и времени проведения вечера и его программе. (В некоторых школах такое объявление иногда составляется в виде ребуса.) На вечер обычно приглашаются учащиеся других классов той же школы или параллельных классов соседней школы. Желательно, чтобы пригласительные билеты были со вкусом оформлены.

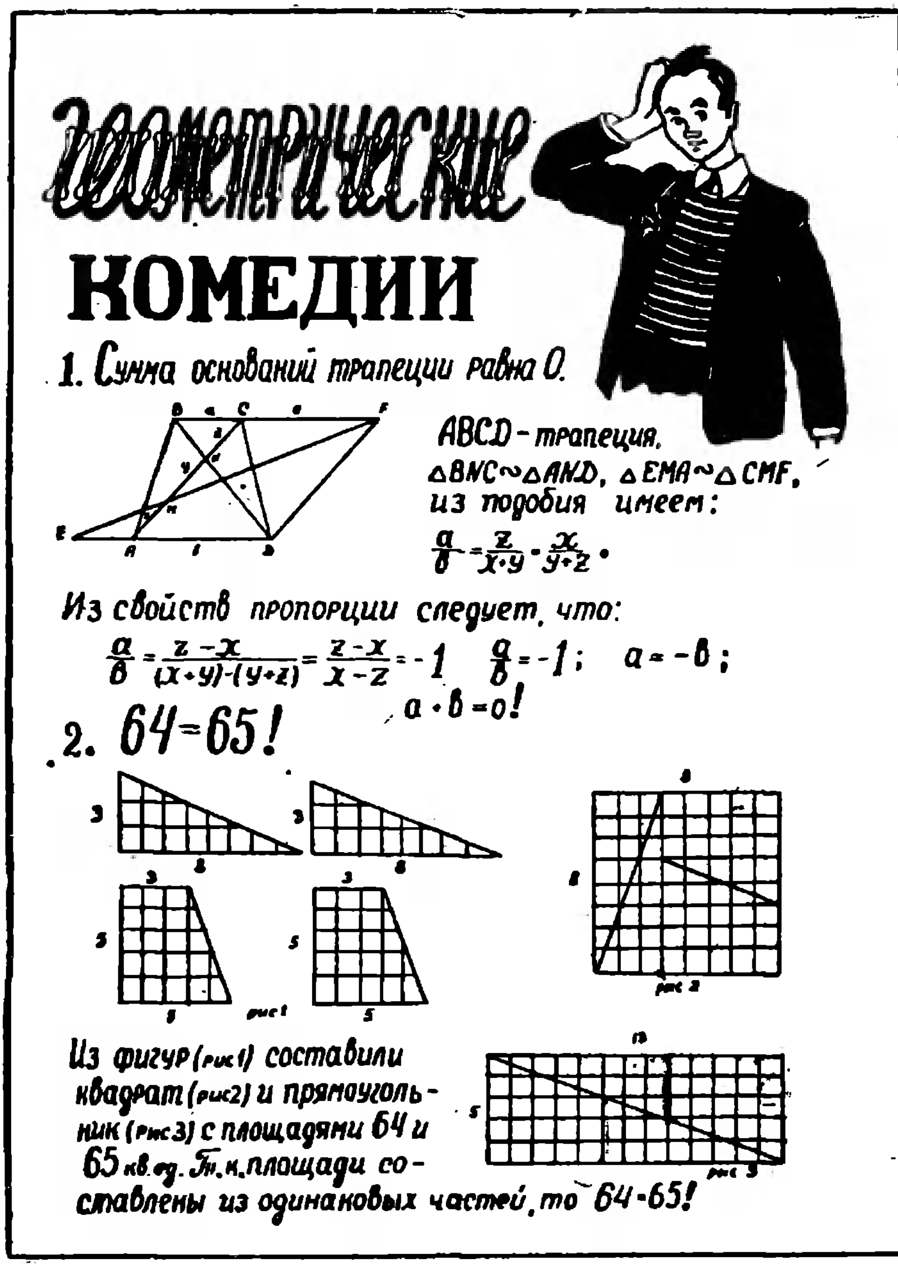


Рис. 23.

(Можно, например, изготовить крупный билет-оригинал размером, скажем, 40 *см* × 25 *см*, вместить в него два-три рисунка или фотографии математиков и затем сфотографировать его на небольшие карточки.)

Программа вечера должна быть разнообразной как по форме, так и по содержанию. Нельзя не учитывать (особенно при подготовке вечера V—VII классов) тягу детей к яркому, красочному, таинственному и загадочному. С другой стороны, недопустимо, чтобы в сознании учащегося то интересное, забавное, занимательное, с чем он знакомится на вечере, противопоставлялось тому, что он изучает

Рис. 24.

на уроках. Следует тактично, соблюдая меру, но достаточно настойчиво и последовательно подчеркивать тесную связь между программным материалом и вопросами, рассмотренными на вечере. Например, если показывается на вечере какой-нибудь прием быстрого счета, то должно быть указано (хотя бы без детальных выкладок), что при выводе этого приема используется такая-то формула школьного курса алгебры и т. п.

Длительность вечера — обычно два-три часа.

Оформление зала. К вечеру выпускается специальный номер математической стенгазеты. Желательно к вечеру приурочить выпуск фотомонтажа. Нужно подготовить выставку книг и статей, связанных с темой вечера. Некоторые книги или статьи следует раскрыть на той странице, где имеется оригинальное высказывание, интересная мысль, любопытный факт, увлекательная задача. Для выставок не обязательно использовать закрытые стенды. В Смоленске, например, на городских математических вечерах в пединституте книги, отобранные для выставки, располагались на нескольких столах. Ученик мог получать у дежурного на 10—20 минут любую книгу с выставки для просмотра.

Рис. 25

Зал (или класс), где проводится вечер, украшают (соблюдая меру) портретами выдающихся математиков, а также плакатами математического содержания: высказывания выдающихся людей о математике (желательно с портретом автора высказывания, а также, в случае необходимости, с краткими сведениями об авторе); задачи-шутки; софизмы; геометрические иллюзии; задачи (например, подготовительные задачи к олимпиаде, логические задачи, математические ребусы и т. д.).

Большинство плакатов следует снабдить занимательными рисунками, привлекающими к себе внимание учащихся. Такие рисунки можно в случае необходимости скопировать из книг по занимательной математике (например, из книг Перельмана, из книги «Пять минут на размышление» и др.), из «Пионерской правды», из журналов «Техника — молодежи», «Знание — сила», «Затейник» и др. Очень удобным средством для снятия увеличенных копий и рисунков является э п и д и а с к о п. Оригинал помещают в эпидиаскоп и в качестве экрана берут чистый лист бумаги. На этом листе мы увидим увеличенное изображение оригинала. Остается только обвести карандашом контуры этого изображения и раскрасить его красками.

Задачи, софизмы, иллюзии помещают под заголовками: «Подумай», «Сообрази», «Кто прав?» и т. д. На рисунках 23—25 приводятся образцы плакатов.

§ 2. СОДЕРЖАНИЕ ВЕЧЕРА

Нельзя указать обязательной, «стандартной» программы математического вечера. Часто в программу включают: рассказы, беседы, сообщения, доклады на математические или историко-математические темы; математические софизмы, фокусы, развлечения, игры, задачи (в частности, математическую викторину); инсценировки, стихи, беллетристические рассказы, связанные с математикой; математическую светогазету.

Рассказы, беседы, сообщения, доклады о математике. Обычно вечер начинается с доклада на математическую или историко-математическую тему. Заслуживают предпочтения такие темы, в которых любой присутствующий ученик мог бы разобраться «без бумаги и карандаша», то есть темы, не связанные со сколько-нибудь значительными выкладками. Большой доклад для вечера часто целесообразно разбить на несколько мелких частей (длительность 7—10 минут) и каждую часть поручить отдельному докладчику.

Некоторые темы для докладов, бесед, рассказов и сообщений приведены выше в гл. II.

Приемы счета. Ряд важных приемов счета перечислен выше (гл. II, § 3). Укажем здесь еще несколько эффектных приемов, которые можно показать на математических вечерах:

1. Умножение любого пятизначного числа на 99999. «Назовите любое пятизначное число. Я его быстро умножу на 99999». (Ученик с места называет 64728.) Ответ. $64728 \cdot 99999 = 6472735272$.

Объяснение. Названное учеником число (64728) уменьшено на 1 (64727), и к результату приписываются дополнения каждой цифры (этого результата) до 9. Прием вытекает из того, что умножение числа на 99999 равносильно умножению числа на 100000 (то есть приписываются к нему пять нулей) и последующему вычитанию из результата самого числа.

2. «Назовите любое двузначное число, кратное 9. Я его быстро умножу на 12 345 679». (Ученик назвал 54.) Ответ. $12\,345\,679 \cdot 54 = 666\,666\,666$.

Объяснение. Делим число, названное учеником, на 9, получаем однозначное число и выписываем его подряд 9 раз.

3. Быстрое умножение чисел на 142 857 (период дроби $^1/_7$ или на период $^1/_{17}$ и т. п. (часть II, гл. 10, § 5).

4. «Возведите в куб любое двузначное число. Смотрите, не ошибитесь! Я в уме извлеку из результата кубический корень». (Ученик назвал, скажем, 328 509.) Ответ. $\sqrt[3]{328509} = 69$.

Объяснение. Я помню кубы 9 первых натуральных чисел: $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$. Замечаю, что куб каждого из крайних двух из этих девяти чисел (1 и 9) и средних трех (4, 5, 6) оканчивается той же цифрой, какой записывается само число, а куб каждого из остальных четырех чисел — дополнением этой цифры до 10. Число 328 509 оканчивается цифрой 9. Значит, и его кубический корень оканчивается девяткой. Кроме того, $6^3 = 216 < 328$, $7^3 = 343 > 328$. Значит, первая цифра 6.

Математические софизмы. На вечере можно предложить со сцены негромоздкий софизм. Приведем пример.

Спичка вдвое длиннее телеграфного столба! «Каждый скажет, что телеграфный столб, конечно, длиннее спички. А я берусь доказать, что каждая спичка длиннее телеграфного столба, и притом ровно вдвое!

Действительно, пусть a — длина спички (в дециметрах), b — длина столба (тоже в дециметрах). Обозначим $b - a$ через c, так что $b - a = c$, $b = a + c$. Перемножим эти равенства почленно. Получим: $b^2 - ab = ca + c^2$. Вычтем из обеих частей bc.

Получим
$$b^2 - ab - bc = ca + c^2 - bc,$$
$$b(b - a - c) = c(a + c - b),$$
$$b(b - a - c) = -c(b - a - c).$$

Отсюда $b = -c$, но $c = b - a$, так что $-c = a - b$.

Таким образом, $b = a - b$, $a = 2b$.

Но что такое a? Длина спички. А b? Длина столба. Итак: спичка вдвое длиннее телеграфного столба, ч. т. д.!»

Тому же софизму можно было бы придать другую фабулу, например: «В наперстке вмещается вдвое больше воды, чем в ведре»; «Горошина вдвое тяжелее земного шара» и т. п.

Задачи на вечере. Математический вечер не следует превращать в вечер решения задач. Однако занимательные задачи в разных формах желательно на вечере предлагать учащимся. Каковы же эти формы?

1. *Чтение задач с эстрады.* Обычно для этой цели отбираются задачи с занимательной фабулой, преимущественно арифметические или логические, решение которых выполнимо в уме. Много таких задач есть в книге «Математическая смекалка» Б. А. Кордемского, в книгах Я. И. Перельмана и П. Ю. Германовича. С эстрады можно предложить задачи, обычно предлагаемые для викторины (гл. VII, § 3).

После того как условие задачи прочитано, ученики с мест предлагают свои решения этой задачи. Так можно предложить две-три задачи.

2. *Инсценировки задач с занимательной фабулой.* Один из учащихся читает текст задачи «от автора», а несколько других ребят представляют собой действующих лиц и выполняют то, что им полагается делать по тексту задачи. В конце ученик, читающий текст от автора, формулирует, что же нужно найти.

3. *Инсценировка процесса решения задач.* На сцену выходят два учащихся, и один предлагает другому задачу с негромоздким условием. Второй делает попытки решить задачу, допуская при этом ошибки. Постепенно он добирается до правильного решения. Иногда в их разговор могут включаться зрители.

4. *Математическая викторина.* Не следует предлагать на вечере викторину длительностью более 25—30 минут. Учащиеся обычно сильно устают от большой викторины и мало интересуются всем последующим.

5. *Задачи на плакатах.* Можно вывесить красиво оформленные задачи.

Инсценировки. Художественное чтение. В художественной литературе имеются произведения, которые могут быть использованы (целиком или частично) для инсценировок и художественного чтения на математических вечерах. Вот некоторые из них: 1) А. П. Чехов «Репетитор» (рассказ). Инсценировка имеется в книге Е. К. Серебровской «Опыт внеклассной работы по математике». См. также «Занимательную арифметику» Я. И. Перельмана; 2) Д. И. Фонвизин «Недоросль»; 3) Л. Н. Толстой «Много ли человеку земли нужно» (математический анализ рассказа дан в «Занимательной геометрии» Я. И. Перельмана; см. также журнал «Математика в школе», 1952, № 3, стр. 50); 4) Н. Носов «Витя Малеев в школе и дома» (инсценировку см. в книге Е. К. Серебровской); 5) Васильченко «Мужицкая арифметика» (рассказ); 6) К. Чапек «Что видел поэт?» (рассказ). 7) Я. И. Перельман «Рассказы о числах-великанах» (в книге «Живая математика»). 8) Т. Сикорская и С. Болотин «Властелин солнца» («Затейник», 1946, № 1). 9) М. Романенко «Живая геометрия» («Затейник», 1951, № 4).

Математические стихотворения. Хороших «математических» стихотворений (то есть связанных с математикой) немного, но и те, за редкими исключениями, мало пригодны для чтения с эстрады. Приведем для примера одно сравнительно удачное стихотворение. Оно взято из старого издания книги В. Литцмана [1]. Стихотворение следует читать в несколько ироническом тоне.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙКА

О, как мучительно тяжел
Был путь науки нашей!
Был ученик несчастный зол,
Сердилися папаши.
Теперь все ужасы прошли —
Придумана линейка!

О, школьник, где бы ты ни жил,
Отныне не робей-ка!
Вещица эта так мала —
Сложи и спрячь в кармане.
Но с нею стала жизнь мила —
Не то, что было ранее.

Несколько задач в стихах можно найти в следующих пособиях: В. Литцман [2]; В. А. Игнатьев [1]; И. Я. Депман [6] и [8], в «Сборнике задач по алгебре» П. А. Ларичева (ч. II), в журнале «Математика в школе» № 3 за 1969 г.

Для математического вечера можно использовать также стихотворения, имеющие отдаленное отношение к самой математике, но затрагивающие вопрос об изучении школьниками этого предмета. Сюда можно отнести (для V и VI классов) стихотворения «Лешенька, Лешенька» и «Арифметика» (см. А. Барто «Веселые стихи», М., Детгиз, 1957), Г. Валикова «Кто поможет?» («Пионерская правда» от 14 декабря 1954 года).

Математические фокусы нередко используются на математических вечерах. Большинство математических фокусов связано с «угадыванием» чисел. Математической основой такого фокуса чаще всего является некоторое алгебраическое тождество. Каждый раз, рассматривая математический фокус, необходимо довести до учащихся математическую сущность фокуса (не только показать, что и как получится, но и почему так получится). Без этого образовательная ценность фокуса незначительна. Лучше всего, если учащиеся сами найдут тождество, на котором основан фокус. В основном разгадывание подобного рода фокусов доступно учащимся VI—VII классов. Придумывание забавной, занимательной фабулы — дело воображения учителя и учащихся. В качестве неизвестных (задуманных) чисел лучше брать числа *именованные*. Неизвестное число может быть: годом рождения, возрастом, номером ботинок, датой и т. д. Чем неожиданнее наименование, тем фокус забавнее.

Фокусы на «угадывание» чисел можно разбить на две категории: 1) «угадывается» результат некоторых операций, произведенных над задуманным числом; в этом случае результат не зависит от величины задуманного числа; 2) «угадывается» задуманное число; при этом сообщается отгадчику результат некоторых операций, которые были произведены над задуманным числом.

«Угадывание» результата вычислений. В простейших случаях желательно, чтобы ученик-отгадчик производил в уме нужные алгебраические операции с неизвестными (задуманными) числами. В более сложных случаях лучше пользоваться готовой формулой (тождеством). Приведем примеры.

1. Что говорит отгадчик

Вслух	Себе
Задумай число (любое).	x
Прибавь 4.	$x+4$
Умножь все на 3.	$(x+4)\cdot 3 = 3x+12$
Прибавь 3.	$(3x+12)+3 = 3x+15$
Теперь результат удвой.	$(3x+15)\cdot 2 = 6x+30$
Вычти 12.	$(6x+30)-12 = 6x+18$
Результат раздели на 6.	$\frac{6x+18}{6} = x+3$
Вычти задуманное число.	$x+3-x=3$
Результат умножь на 4.	$3\cdot 4 = 12$
Ты получил 12.	

Фокус основан на тождестве:

$$\left\{\frac{[(x+4)\cdot 3+3]\cdot 2-12}{6}-x\right\}\cdot 4 = 12$$

2. «Задумай однозначное число, удвой его, прибавь 1, умножь на 5, вычти 2, прибавь 301, зачеркни среднюю цифру, к остатку прибавь 3. Ты получил 37».

Последовательно выполненные операции можно записать формулой (x — задуманное число):

$$(2x + 1) \cdot 5 - 2 + 301 = 3 \cdot 100 + 10x + 4 = \overline{3x4}.$$

Первая цифра 3, вторая x, третья 4. Если зачеркнуть среднюю, то получим 34. А $34 + 3 = 37$. В данном примере, после того как зачеркивается неизвестная цифра x, отгадчик уже знает, что его товарищ, задумавший число, написал 34. После этого он может с полученным числом производить любые операции, например прибавить 3, отнять 17, умножить на 2 и т. д. Результат все равно ему будет известен. Аналогично обстоит дело во многих последующих примерах.

3. «Задумай любое трехзначное число, но чтобы крайние цифры были различными. Напиши его в обратном порядке (например, если задумал 386, то напиши 683). От большего числа отними меньшее. Какова крайняя правая цифра? (Пусть цифра 7.) Ты получил 297».

Объяснение. Пусть задуманное число $\overline{xyz}$. Переписав цифры в обратном порядке, получим $\overline{zyx}$. Пусть для определенности $x > z$ тогда $\overline{xyz} > \overline{zyx}$.

$$\overline{xyz} - \overline{zyx} = 100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 100(x - z) + (z - x) = 100(x - z - 1) + 100 - (x - z) = 100(x - z - 1) + 90 + (10 - x + z).$$

Число единиц $(10 - x + z)$, число сотен $(x - z - 1)$. В сумме получаем $(10 - x + z) + (x - z - 1) = 9$. Итак, в результате средняя цифра 9, а крайние цифры в сумме составляют 9. Если оказалось, что самая правая цифра 7, то, следовательно, сотен $9 - 7$, то есть 2. Ответ: 297.

4. «Задумай любое трехзначное число, крайние цифры которого отличаются между собой больше, чем на 1. Напиши цифры этого же числа в обратном порядке. Теперь у тебя два трехзначных числа; отними от большего меньшее. Ты получил новое трехзначное число. Подчеркни его. Цифры этого числа напиши в обратном порядке. Сложи полученное число с подчеркнутым. Ты получил 1089».

Объяснение. Пусть $\overline{xyz}$ — задуманное число. Положим для определенности, что $x > z$. Мы видели (см. пример 3), что $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 100(x - z - 1) + 90 + (10 - x + z)$.

Фокус основан на тождестве:

$$[100(x - z - 1) + 90 + (10 - x + z)] + [(10 - x + z) \cdot 100 + 90 + (x - z - 1)] = 1089.$$

5. $\dfrac{(2x+1)^2}{x(x+1)} = 4 + \dfrac{1}{x(x+1)}$. Частное равно 4, остаток 1.

Почти во всех рассмотренных до сих пор примерах ведущему нетрудно заставить учащегося, задумавшего число, получить любое наперед заданное число. Этим пользуются для проведения эффектных фокусов.

Угадывание задуманных чисел. Приведем примеры.

6. Операции, которые предлагается провести, ясны из формулы:

$$\{[(x+2)\cdot 3-5]\cdot 3+x\}\cdot 2=10\cdot 2x+6.$$

Если известен результат, то легко вычислить x. (Отбросить последнюю цифру (6) и оставшееся число разделить пополам.) Например, предлагаем выполнить над числом (x) окон вашей квартиры указанные действия. Вы сообщаете, скажем, такой результат: 46. Угадываем: в вашей квартире 2 окна (4 : 2).

7. Пусть x — любое натуральное число (для простоты лучше, если оно однозначное).

$$[(x\cdot 5+2+2)\cdot 4+2]\cdot 5+2=100x+92.$$

Если известен результат, то нетрудно найти x. (Зачеркнуть последние 2 цифры.) Отгадчик может провести фокус иначе: не спрашивать результата и предложить зачеркнуть первую цифру. Тогда он знает, что получается 92.

8. $$\left(\frac{x\cdot 2+y}{2}+2\right)\cdot 4-2y=4x+8.$$

x — неизвестное число (например, номер дома), y — произвольное число (лучше четное). Зная результат, легко найдем x (сводится к уравнению $4x+8=d$, где d — сообщаемый результат).

9. Угадывание двузначного числа (например, возраста или номера ботинок). Действия ясны из тождества $x\cdot 10-y\cdot 9=10(x-y)+y$ (x — искомое число, $y\cdot 9$ — любое число, кратное 9 и меньше, чем 90; оно неизвестно отгадчику). Результат сообщается. x находим из тождества $x=(x-y)+y$ ($x-y$ — число десятков сообщенного результата, y — число единиц).

Например, сообщается число 327. Тогда $x=32+7=39$.

10. Угадывание двух однозначных чисел (x, y), например, числа очков на домино.

$$(x\cdot 5+2)\cdot 2+y=10x+y+4.$$

Результат сообщается. Отбрасываем от него 4 и подсчитываем $10x+y$. Отделяем десятки и единицы.

Пусть, например, сообщено число 17.

$$10x+y=13;\quad x=1;\quad y=3.$$

11. Угадывание трех однозначных чисел (x, y, z), например номера этажа (подвальный этаж считается за нулевой), числа окон в комнате и числа братьев. Пользуемся тождеством

$$\{[(x\cdot 5+2)\cdot 2+y]\cdot 5+2\}\cdot 2+z=100x+10y+z+44.$$

Результат сообщается отгадчику. Вычитая из него (в уме) 44, узнаем, чему равно $100x+10y+z$ (x — число сотен, y — десятков, z — единиц).

Пусть x — номер этажа, y — число окон в комнате, z — число братьев. Пусть отгадчику сообщен результат 354, $354-44=310$. Отгадчик говорит: «Вы живете на третьем этаже, в вашей комнате одно окно. Братьев у вас нет».

Большое число других фокусов можно найти в книгах: М. Гарднера [1], В. Литцмана [2], М. Б. Балка [3].

Математические игры. «Хоп». Играющих двое или больше. Играющие поочередно называют последовательные числа натурального ряда (1, 2, 3, 4, ...), но вместо чисел, кратных 3, кратных 7, и чисел, оканчивающихся на 7 и 3, нужно говорить «хоп». Тот, кто сбивается, выбывает из игры. Выигрывает последний оставшийся. Эта забавная игра доступна ученикам V класса, но обычно заинтересовывает даже десятиклассников. Она допускает как упрощения, так и усложнения.

Кто возьмет последнюю спичку? Число играющих: два человека. Имеется определенное количество (n) спичек или каких-либо других предметов. Каждый игрок должен взять из этого количества не меньше k спичек, но не больше, чем p спичек. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку (n, k, p — целые числа).

Пример. (Игра «Одна, две, три».) $n=15$, $k=1$, $p=3$. Проигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Как должен играть первый (кто начинает), чтобы заведомо выиграть? (После его ходов число всех взятых спичек должно быть равно одному из чисел: 2, 6, 10, 14, а число оставленных — соответственно 13, 9, 5, 1.)

Светогазета. Если в школе имеется эпидиаскоп, то неплохо организовать для вечера математическую светогазету. В светогазету можно включить: 1) интересные рисунки или документы из истории математики (например, заглавный лист «Арифметики» Магницкого с соответствующими комментариями); 2) фотографии математиков с краткими сообщениями о них; 3) забавные иллюстрации к математическим софизмам, парадоксам, логическим задачам (например, «Ахиллес и черепаха», «Земля и апельсин» и др.); 4) забавные случаи на уроках математики или на кружковых занятиях; юмористические рисунки «Как наши ребята учат математику» и т. п. Рисунки нужно сопровождать словесными объяснениями.

Рисунки для светогазеты частично воспроизводятся по книгам; часть рисунков изготовляется учащимися.

Ведение математического вечера. В некоторых школах ведет вечер учитель (или вожатый, или студент-практикант). Он объявляет об очередном выступлении и дает краткое введение к нему.

Например: «Вы сейчас прослушали рассказ о двоичной системе счисления. Интересный фокус, основанный на этой системе счисления, покажет ученик Н.».

Лучше, если ведут вечер ученики-конферансье. Они не только объявляют об очередных предстоящих выступлениях, но и сами исполняют некоторые интермедии, главным образом шуточного характера. Материал для таких интермедий можно найти, например, в книгах: В. Литцман [2]; М. Б. Балк [3].

Обычно вечер состоит из двух отделений, между которыми устраивается перерыв на 10—20 минут. Во время перерыва, а также до начала вечера школьники могут ознакомиться с экспонатами и плакатами. Одни решают задачи-шутки, другие читают стенгазету и т. д. В зале и соседних комнатах специально выделенные школьники организуют математические игры, дают разъяснения учащимся относительно геометрических фигур, которые перед ними выставлены, показывают учащимся, как производить действия на арифмометре и т. д.

§ 3. ПРИМЕРЫ ПРОГРАММ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЕЧЕРОВ

Пример 1. Вечер VIII—IX классов.

I отделение. Рассказы о советских математиках. (Вступительное слово учителя «О советской математике»; сообщения трех учащихся (о А. Н. Крылове, М. В. Келдыше и С. Н. Мергеляне) — 35 минут. Викторина — 25 минут.

Перерыв — 15 минут.

II отделение. Стихотворение «Логарифмическая линейка». Инсценировка из произведения Д. И. Фонвизина «Недоросль». Быстрое умножение чисел на 99999. Софизм «Спичка вдвое длиннее телеграфного столба». Интермедия. Задача с эстрады. Математический фокус. Сообщение итогов викторины.

Пример 2. Вечер X классов.

I отделение. Рассказы о замечательных линиях и поверхностях с демонстрацией моделей (выступления пяти школьников)— 40 минут. Софизм «64 = 65!» — 10 минут. «Компактный табель-календарь» — 10 минут. Перерыв — 15 минут.

II отделение. Математическая викторина. Интермедия. Быстрое извлечение кубического корня. Математические фокусы. Сообщение итогов викторины.

Пример 3. Вечер VIII классов.

I отделение. Различные системы счисления (рассказы учащихся) — 28 — 30 минут. Фокусы, связанные с различными системами счисления, — 25 минут.

Перерыв — 15 минут.

II отделение. Арифметические задачи с эстрады — 20 минут. Софизм «Прямой угол равен тупому» — 10 минут. Стихотворение «Теорема Виета» — 5 минут. Инсценировка рассказа А. П. Чехова «Репетитор» — 20 минут.

Пример 4. Вечер VI классов.

I отделение. Рассказы из истории арифметики (по книге И. Я. Депмана «Рассказы о математике») — 25 минут.

«Как быстро умножить двузначные числа, близкие к 100» — 10 минут.

Два фокуса на «угадывание» чисел — 15 минут.

Перерыв — 10 минут.

II отделение (50 минут). Инсценировка «Властелин Солнца». Задачи на смекалку (две задачи с эстрады). Стихотворения «Кто поможет?» и «Лешенька, Лешенька». Игра «Хоп» (на сцене). Арифметический фокус.

Иногда имеет смысл проводить вечера не математические, а физико-математические, механико-математические и т. д. Так, например, уместно поступить, когда вечер посвящается какому-либо выдающемуся ученому, который был не только великим математиком, но и физиком или астрономом и т. п. (например, Архимед, Ньютон, Эйлер, Чебышев, Крылов и другие). Вот примерная программа физико-математического вечера, посвященного И. Ньютону (IX и X классы):

I отделение. Рассказы о Ньютоне (жизнь Ньютона; Ньютон — математик, физик, астроном).

II отделение. Демонстрация физических опытов. Задачи Ньютона. Математические развлечения.

К вечеру выпускается газета, посвященная Ньютону, подготавливается выставка книг и статей Ньютона и о нем, плакат с высказываниями Ньютона и о нем, его портрет.

Литература. В. Д. Чистяков [2]; Е. К. Серебровская [1]; В. Литцман [2]; Б. А. Кордемский [1]; Я. И. Перельман [4]; Ф. Ф. Нагибин [1]; М. Б. Гельфанд и В. С. Павлович [1]; М. Гарднер [1]; А. Я. Котов [1].

Глава VII

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОСТЯЗАНИЯ

§ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

В 1934 году Ленинградским университетом по инициативе группы преподавателей-математиков (проф. Б. Н. Делоне, проф. Г. М. Фихтенгольц и другие) была проведена первая в нашей стране математическая олимпиада школьников. Этот почин был подхвачен математическими коллективами многих других городов. Уже в следующем (1935) году математическая олимпиада была проведена в Москве. В настоящее время городские математические олимпиады проводятся (главным образом по инициативе университетов и педвузов) ежегодно и во многих других городах нашей страны: в Ленинграде, Новосибирске, Киеве, Львове, Волгограде, Смоленске, Омске, Казани и др. Математические олимпиады проводятся и в отдельных школах. В последнее время проводятся областные, краевые, республиканские и всесоюзные математические олимпиады. Эти олимпиады послужили примером и для ряда зарубежных стран. В течение нескольких лет проводятся республиканские математические олимпиады в европейских социалистических странах. Ежегодно победители этих олимпиад собираются на международную математическую олимпиаду. В последние годы математические олимпиады стали проводиться и в некоторых капиталистических странах (Голландия, Англия).

Математическая олимпиада приносит пользу лишь тогда, когда она является заключительным этапом целого комплекса внеклассных мероприятий (лекции, математические вечера, кружковая работа, в частности решение подготовительных задач в математических кружках и т. п.). Если же олимпиаде не предшествует развернутая внеклассная работа по математике, то она может скорее принести вред, чем пользу, скорее оттолкнет учащихся от математики, чем привлечет к ней.

Олимпиада не только итог внеурочной работы за год, но и прекрасный стимул для развертывания такой работы.

Имея перед собой перспективу участвовать в конце учебного года в олимпиаде, школьник охотно идет в математический кружок, где разбирают подготовительные задачи к предстоящей олимпиаде и задачи, предложенные на прошлых олимпиадах. Учителя математики развертывают внеурочную работу, чтобы подготовить своих учеников к олимпиаде.

Полезна такая подготовка и самим учителям. Известно, что немало учителей, особенно начинающих, плохо справляются сами с нетиповыми задачами по элементарной математике. Готовя школьников к олимпиаде, они будут учиться и сами.

Особенно ценны, на наш взгляд, областные олимпиады. Как показывает, например, опыт, областные олимпиады могут серьезно способствовать налаживанию внеклассной работы в сельских школах. Работа по подготовке и проведению такой олимпиады — хорошая школа для студентов — участников семинара по внеклассной работе при пединституте, а также для студентов — членов институтских математических кружков.

Здесь будем говорить только о *внутришкольных* олимпиадах.

Для руководства всей подготовительной работой нужно уже в начале учебного года выделить оргкомитет. В состав его входят обычно два-три учителя математики и несколько учеников — представителей математических кружков.

Оргкомитет проявляет инициативу в организации математического вечера, лекций и других внеклассных мероприятий внутри школы, отбирает задачи для олимпиады и для подготовки к ней (подготовительные серии), отбирает победителей олимпиады и т. д.

Наиболее подходящее время для олимпиады — февраль — начало апреля. Школьную олимпиаду лучше провести в два тура; это позволяет отметить успехи большого числа школьников (попасть на второй тур —это уже успех), что имеет педагогическую ценность. Эти два тура могут проходить как отборочный и первый туры областной или городской олимпиады (если такая проводится). Каждый тур лучше всего провести раздельно для школьников непараллельных классов (отдельно для X классов, отдельно для IX классов и т. д.). Каждый тур длится примерно три часа.

Незачем гнаться за большим числом участников олимпиады; важнее, чтобы было много «болельщиков», чтобы большее число учащихся знало условия олимпиадных задач, заинтересовалось их решением, пробовало на этих задачах свои силы.

Поэтому после каждого тура олимпиады следует вывесить в школах текст задач, чтобы все школьники могли с ними ознакомиться. На разбор задач, который необходимо провести после олимпиады, также следует приглашать не только участников олимпиады.

Жюри олимпиады (в состав которого оргкомитет включает нескольких учителей) проверяет работы участников олимпиады и присуждает победителям второго тура премии и грамоты (в грамоте указывается, что ученик получил I, II или III премию или похвальный отзыв), а также отмечает тех учащихся, которые успешно прошли второй тур. Не следует выделять только нескольких победителей.

Вполне нормально, если число премированных составляет 5 — 10% общего числа участников, получают похвальные отзывы 8—12% учащихся, отмечаются в решении жюри 12—15% всех учащихся — всего около трети общего числа участников второго тура. Ход подготовки и результаты олимпиады целесообразно освещать в школьной печати. Итоги желательно обсудить на методобъединении учителей-математиков.

Отбор задач для олимпиады необходимо начать заблаговременно, задолго до олимпиады, проводить его с учетом того, какие задачи предложены учащимся для подготовки к олимпиаде. Всей этой работой ведает специально выделенный член оргкомитета (учитель). К отбору задач для олимпиады привлекаются также другие учителя математики.

Для каждого класса составляются отдельные олимпиадные задания (отдельно для X классов, отдельно для IX классов и т. д.).

Задачи, предлагаемые на олимпиаде, не требуют знаний, выходящих за рамки школьной программы. Обычно это задачи, требующие для своего решения проявления смекалки, самостоятельной мысли, хорошего пространственного воображения, известных навыков к логическому мышлению, а также твердого и неформального знания основных понятий и методов школьного курса математики. Задачи с громоздкими решениями, чисто тренировочные, требующие лишь формального применения теорем и формул, обычно не включаются в олимпиадные задания. Так, например, не встретишь в олимпиадных заданиях типовую вычислительную задачу по геометрии с применением тригонометрии.

В олимпиадное задание следует включить также одну задачу, доступную всем или почти всем ее участникам. Участник олимпиады, не решивший ни одной задачи, нередко теряет уверенность в своих силах, а иногда и интерес к математике. Во избежание такого положения и предлагается включить одну более доступную задачу. В списке задач она часто стоит первой. Но и такая задача должна содержать «изюминку», так что более сообразительный ученик может, заметив эту «изюминку», решить задачу быстрее и рациональнее.

В олимпиадное задание целесообразно включать задачи, которым еще мало уделяют внимания в школьной практике, например задачи на разыскание ГМТ в пространстве и на плоскости, на метод полной индукции. Само собой разумеется, что подобного рода задачи должны также содержаться среди подготовительных задач. В олимпиадное задание можно включить и вопрос по истории математики, например: «Что вы знаете о Лобачевском (о Чебышеве, о выдающихся советских математиках, и т. п.)»?

Интересны также задачи такого типа: «Располагая такими-то инструментами (например, линейкой с делениями, транспортиром и т. п.), вычислите объем такого-то данного вам геометрического тела» (или «площадь такой-то данной вам фигуры» и т. п.).

При оценке решений таких задач учитывается прежде всего, насколько рационально выбраны величины, которые находятся путем измерения, и насколько рационально проведены вычисления с приближенными числами.

Приведем примеры олимпиадных заданий.

IX класс, I тур.

1. Пароход отправился в полдень из Ленинграда в Кронштадт, а в 12 мин. пополудни вышел ему навстречу другой пароход из Кронштадта. Первый пароход прибыл в Кронштадт в 1 час 30 мин. пополудни, второй в Ленинград в 2 часа пополудни. Когда пароходы встретились? (Решить арифметически.)

2. Докажите, что в произведении $(1+x+x^2+\dots+x^{100})(1-x+x^2-x^3+\dots+x^{100})$ после раскрытия скобок и приведения подобных не останется членов, содержащих x в нечетных степенях.

3. В параллелограмме острый угол равен 30°, а диагонали равны c и d ($c<d$). Найдите его площадь.

4. Сколько может быть прямых углов в выпуклом многоугольнике? (Ответ обосновать.)

X класс, II тур.

1. Постройте треугольник по основанию a, высоте h и радиусу R описанной окружности. Проведите исследование задачи.

2. Четыре вершины квадрата со стороной a служат центрами четырех кругов радиуса a. Найти площадь общей части этих кругов.

3. Докажите, что наибольшие значения выражений $(\log_5 6)^{\sin x}$ и $(\log_6 5)^{\cos x}$ равны между собой.

4. Сколько существует плоскостей, равноудаленных от четырех данных в пространстве точек?

5. Что вы знаете о П. Л. Чебышеве?

§ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТУРНИРЫ И КОНКУРСЫ

Командные соревнования по математике можно провести между параллельными классами одной и той же школы. Для этого в начале года учащихся извещают, что через 1—2 месяца состоится математический турнир VIII классов. Еще лучше, если сами учащиеся одного из классов вызовут остальные классы на турнир. Всей подготовительной работой ведает отдельный комитет, в который входят учителя, математики, классные руководители, некоторые учащиеся. Отбор задач проводится учителями математики. В течение некоторого времени учащиеся готовятся к турниру. Примерно за две недели до назначенного срока в каждом классе выделяется группа из 3—5 человек, которая составляет команду этого класса. Для отбора команды всем учащимся класса (желающим) можно предложить несколько задач и выбрать тех учеников, которые лучше справились с этими задачами. Столько же учащихся выделяется в остальных VIII классах. Каждый член команды получает определенный номер (№ 1, 2 и т. д.). В определенный день (например, вечером в будний день или в воскресенье) собираются в школу все члены команд. В несколько торжественной обстановке открывается турнир. Все первые номера располагаются в одном и том же классе, где в присутствии учителя (или самим учителем) им сообщается текст турнирного задания. Аналогично обстоит дело со всеми вторыми, третьими и т. д. номерами. На решение задач отводится определенное время (скажем, 2 часа). Та команда, которая лучше всех справится с предложенными заданиями (наберет больше очков, чем остальные), объявляется победителем турнира. Такое объявление желательно сделать в торжественной обстановке, в присутствии всех учащихся тех классов, которые участвовали в турнире, а также руководства школы. Совершенно необходимо разобрать решения задач. Желательно премировать победителей. Итоги турнира должны быть освещены в школьной печати. В математической газете можно поместить фотографии победителей.

Лучше проводить турнир не в течение одного дня, а в несколько туров. В таком случае все задание разбивается на части, в каждой части — одна или две задачи (или задача и вопрос). Каждый тур проводится отдельно и длится около часа (или меньше). После каждого тура в школе вывешиваются результаты тура и тексты предложенных задач. Такая разбивка всего турнира на туры обычно приводит к повышению интереса учащихся к турниру, к более подробному обсуждению турнирных заданий учащимися. Проигравшим командам надо дать перспективу «отыграться», указав, например, на предстоящую в конце года олимпиаду и т. д. Математические турниры могут быть проведены также между пионерскими отрядами, звеньями, параллельными классами двух (или нескольких) школ, между математическими кружками различных школ или даже различных городов. В последнем случае каждая команда может решать турнирные задачи в своем городе.

В задание для участников турнира можно, помимо задач, включить также вопросы по истории математики.

Турнир можно проводить и на определенную тему, например: «Геометрические построения», «Рациональные приемы вычисления» и др.

Любителям математики может быть предложено в течение сравнительно большого промежутка времени (недели, месяца) выполнить определенное задание. Учащийся имеет право выполнить это задание где и когда хочет, лишь бы в срок. Такой вид состязания называется математическим конкурсом. Победителем конкурса объявляется тот, кто лучше других справится с этим заданием. Часто темой конкурса является решение всякого рода задач. Они предлагаются иногда учителем и вывешиваются в классе. Все задание желательно разбить на несколько частей (серий), по 3—5 задач в каждой серии. На решение задач каждой серии отводится, скажем, неделя. Полное решение каждой задачи оценивается в определенное число очков. Отбор победителей лучше производить по числу набранных очков. Подобного рода конкурсы проводятся иногда молодежными газетами (например, «Пионерской правдой»), а также школьными стенгазетами. Темой конкурса могут быть некоторые вопросы истории математики, изготовление моделей и составление задач. Конкурсы могут сыграть немалую роль в привитии учащимся вкуса к внеклассному чтению (гл. IV, п. 3). Полезны конкурсы на лучшее математическое сочинение учащихся.

§ 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВИКТОРИНЫ

Это одна из наиболее легко организуемых форм математических соревнований. Математическую викторину можно провести на математическом вечере, на общешкольных и классных вечерах, посвященных математике, на некоторых заседаниях математического кружка.

Техника проведения викторины. В викторине может принять участие каждый желающий. Предлагают обычно 6—12 вопросов и задач. Викторина проводится по-разному в зависимости от числа участников.

Первая форма. Каждый вопрос или задача зачитывается учителем или школьником, проводящим викторину. На обдумывание ответа дается несколько минут. Отвечает тот, кто первый поднимет руку. Если ответ неполный, то можно предоставить возможность высказаться еще и другому участнику викторины. За полный ответ присуждается два очка, за неполный, но удовлетворительный — одно очко. Побеждают те участники (2—4 человека), которые набрали больше всего очков. Некоторые задачи и вопросы только зачитываются, условия других задач могут быть записаны на доске. Так проводить викторину удобно, если участников немного (до 50—60 человек). Если же участников больше (100—200 человек), то приходится прибегнуть к другой форме проведения викторины.

Вторая форма. Тексты всех вопросов и задач выписываются (предварительно) на доске или на отдельных плакатах или раздаются школьникам написанными на отдельных листах. Каждому участнику выдается лист бумаги, на котором он записывает ответ и краткое объяснение к каждому вопросу и задаче, а также свою фамилию, имя, класс. Этот лист он сдает в жюри викторины. Через определенный срок после начала викторины (например, через 30 минут) прием листков от участников викторины прекращается. Жюри проверяет решения и выявляет победителей викторины.

Победителям выдаются небольшие призы (чаще всего — книги по математике). Крайне желательно, чтобы предложенные на викторине задачи и вопросы были хотя бы частично разобраны. Значение викторины не следует переоценивать. Умение быстро решить легкие задачи викторинного типа еще не свидетельствует об умении справиться с трудными задачами. Нельзя превращать викторину в олимпиаду. Олимпиада — более ответственная форма соревнования. Длительность викторины — не более 25—30 минут.

Содержание викторины. Задачи для викторины должны быть с легко обозримым содержанием, не громоздкие, не требующие сколько-нибудь значительных выкладок или записей, в большинстве своем доступные для решения в уме. Задачи типовые, решаемые обычно на уроках, неинтересны для викторины. Помимо задач, в викторину можно включить также различного рода вопросы по математике и по истории математики. Приведем некоторые образцы таких вопросов: 1) назовите двух выдающихся советских математиков. Что вы знаете о них? 2) Что вы знаете о таком-то ученом? 3) Что такое... (например, номограмма, циклоида, планиметр)? 4) Какие слова можно опустить в такой-то фразе, формулировке? (Пример: «Можно построить треугольник со сторонами a, b, c, если каждый из отрезков a, b, c меньше суммы двух других отрезков, но больше их разности». Последние четыре слова можно опустить. В качестве других примеров можно взять из «Геометрии» А. П. Киселева определения параллельных прямых, подобия треугольников, параллельности прямой и плоскости и др.); 5) можно ли так говорить? (Пример. Ученик сказал: «Перпендикуляр, восстановленный к середине прямой AB, равноудален от концов прямой A и B». Какие дефекты в этой фразе?) В викторину включают также задачи-шутки. Викторины могут быть посвящены целиком какой-то одной теме, например, приемам рациональных вычислений, арифметическим задачам на соображение, тригонометрии и т. д. Пожалуй, лучше всего предлагать комбинированные викторины. Приведем образцы задач для викторин.

Задачи.

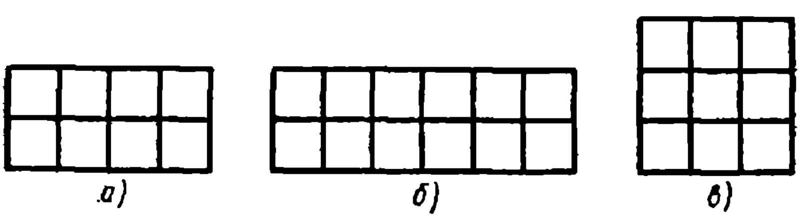


Рис. 26

1. Сколько квадратов видите вы на каждом из рисунков 26, *а*), *б*), *в*)?

2. Сколько имеется треугольников на рисунке 27, *а*), *б*), *в*)?

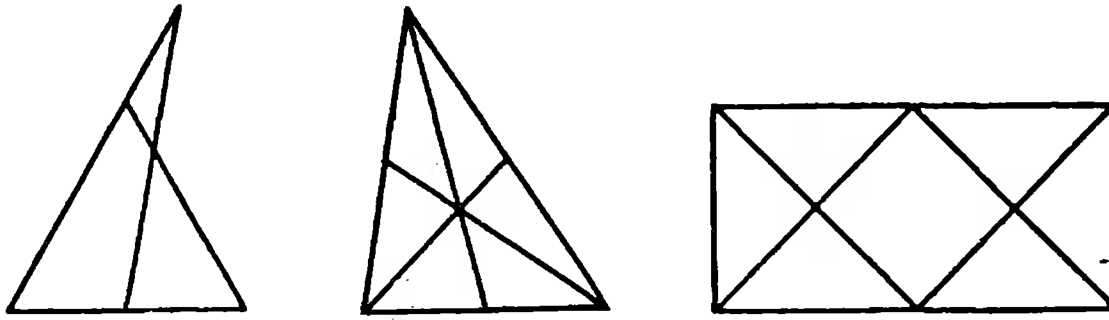
3. Сколько углов (меньших 180°) видите вы на рисунке 28?

4. Сколько углов (меньших 180°) на рисунке 29?

5. Сколько треугольников на рисунке 30?

6. Сколько вы видите на рисунке 31 квадратов, треугольников, трапеций?

7. Андрей живет на пятом этаже, а Костя живет в том же доме вдвое выше, чем Андрей. На каком этаже живет Костя?



а) б) Рис. 27. в)

8. Автомобиль ехал из Смоленска в Вязьму. Первая часть пути содержит столько километров, сколько минут автомобиль потратил на остальной путь. Остальной путь содержал столько километров, сколько минут затратил автомобиль на первую часть пути. Какова средняя скорость автомобиля?

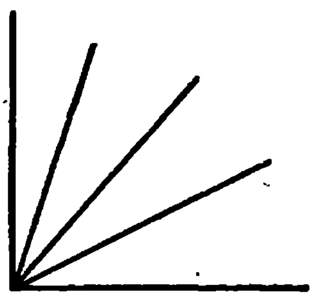


Рис. 28.

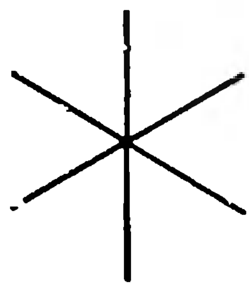


Рис. 29.

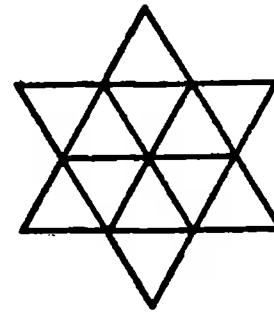


Рис. 30.

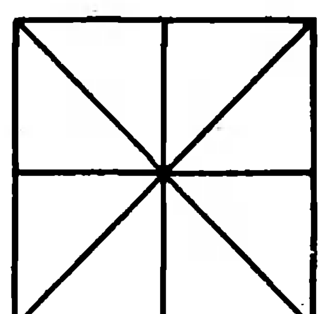


Рис. 31.

9. Не производя деление, скажите, делится ли 2613456 на 36? А на 72?

10. Я задумал пятизначное число, отнял от него единицу и получил четырехзначное. Какое число я задумал?

11. Может ли в пропорции каждый из средних членов быть меньше каждого из крайних?

12. Может ли дробь, у которой числитель меньше знаменателя, равняться дроби, у которой числитель больше знаменателя?

13. Чему равна разность $|a|-a$? (Написать без знака $|a|$.)

14. а) Возможен ли треугольник со сторонами 6, 12, 18? б) А со сторонами 7, 8, 11? в) Будет ли этот треугольник остроугольным, прямоугольным или тупоугольным?

15. Я живу на шестом этаже, а мой друг Терентий — подо мной на третьем этаже. Возвращаясь домой, мне приходится прой-

ти 60 ступенек. Сколько ступенек проходит Терентий, когда он возвращается домой?

На вопросы № 16—21 ответить быстро.

16. Машина перевозит зерно с элеватора на вокзал. На машину можно погрузить 5 *т*. Всего нужно перевезти 22 *т* зерна. Сколько рейсов с элеватора на вокзал сделает машина?

17. Из листа жести вырезали два кружка диаметром в 2 *см* и 10 *см*. Во сколько раз второй кружок тяжелее первого?

18. Из березы выточено два шара диаметрами в 2 *см* и 10 *см*. Во сколько раз второй шар тяжелее первого?

19. Посмотрите на крышку спичечной коробки. Она имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Изменится ли объем этого параллелепипеда, если сдвинуть верхнюю его грань относительно нижней?

20. В равнобедренном треугольнике один угол равен 100°, второй 40°. Какой из них лежит при основании?

21. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 100 *см*, вторая 40 *см*. Какая из них служит основанием?

В задачах № 21—28 вычисления выполните устно.

22. Вычислите: а) 91^2-81^2; б) 100^2-97^2; в) 98^2-96^2; г) $25\cdot 17$; д) $26\frac{2}{3}$ % от 30.

23. Найдите произведение:

$$\left(1+\sqrt{c}\right)\left(1+\sqrt[4]{c}\right)\left(1+\sqrt[8]{c}\right)\left(1+\sqrt[16]{c}\right)\left(1-\sqrt[16]{c}\right)$$

при $c=2$.

24. Вычислите: $\frac{1}{a-3}+2+\frac{1}{3-a}-\frac{2a-2}{a}$, если $a=0{,}01$.

25. Что больше:

а) $\frac{99}{100}$ или $\frac{100}{101}$? б) $\frac{30}{283}$ или $\frac{12}{113}$?

в) $\frac{18}{115}$ или $\frac{90}{573}$? г) $\frac{49}{148}$ или $\frac{121}{362}$?

26. Вычислите: $\operatorname{ctg} 5°\cdot\operatorname{ctg} 10°\cdot\operatorname{ctg} 15°\ldots\operatorname{ctg} 80°\cdot\operatorname{ctg} 85°$.

27. Что больше: а) $\sin 20°$ или $\cos 80°$? б) $\sin 260°$ или $\cos 260°$? в) $\sin 40°\cdot\sin 50°$ или 0,5? г) $\sin 40°$ или $\sin 140°$?

28. Что больше: 25^{125} или 125^{25}?

29. Вдоль беговой дорожки равномерно расставлены столбы. Бегун-марафонец бежит с постоянной скоростью. Старт был дан у первого столба. Через 6 минут он был уже у шестого столба. Через сколько минут после старта будет он у двенадцатого столба?

30. Ежедневно ровно в 12 часов дня из Москвы в Иркутск отправляется поезд. В то же время из Иркутска в Москву также отправляется поезд. Каждый из них прибывает на место назначения ровно через четверо суток. Сколько поездов маршрута Иркутск—Москва встретил пассажир, выехавший из Москвы в Иркутск?

31. Первую половину пути мотоциклист проехал со скоростью 30 *км* в час, вторую — со скоростью 60 *км* в час. Какова его средняя скорость?

32. Как тремя прямыми разделить данный треугольник на 4 равных треугольника? А шестью прямыми на 9 равных треугольников?

33. Что больше: а) число x или его квадрат? Или его куб? б) Число или его квадратный корень? в) a или $2a$? Может ли оказаться, что $a < -a$?

34. При каких целых значениях x дробь $\frac{x+9}{x+5}$ будет целым числом?

35. В токарном цехе вытачиваются детали из свинцовых заготовок: из одной заготовки одна деталь. Стружки, получившиеся при выделке шести деталей, можно переплавить и приготовить из них еще одну заготовку. Сколько деталей можно получить из 36 заготовок?

36. У меня 100 метровых поленьев, а у моего товарища 100 трехметровых поленьев. Мы с ним распилили мои дрова на полуметровые чурки за один день. Сколько потребуется нам дней для распиловки дров моего товарища на полуметровые чурки?

37. Могут ли стороны пятиугольника быть равными 1 *м*, 2 *м*, 4 *м*, 8 *м*, 16 *м*?

38. Кочан капусты на $\frac{4}{5}$ *кг* тяжелее $\frac{4}{5}$ этого кочана. Сколько весит кочан?

39. Расстояние от Смоленска до города x пассажирский поезд прошел за 3 часа, а скорый — за 2 часа. За 1 час скорый поезд проходит на 20 *км* больше пассажирского. Сколько километров от Смоленска до города x?

40. Через два года мальчик будет вдвое старше, чем он был два года назад. Девочка через три года будет втрое старше, чем три года назад. Кто старше: мальчик или девочка?

41. Существует ли угол x такой, что $\sin x \cdot \cos x = \sin 40°$.

З а д а ч и-ш у т к и.

42. Две дюжины помножить на три дюжины. Сколько будет дюжин?

43. В полдень из Москвы отправился курьерский поезд в Ленинград со скоростью 80 *км* в час. В то же время из Ленинграда в Москву отправился пассажирский поезд со скоростью 40 *км* в час. Какой поезд при встрече находится на большем расстоянии от Москвы?

44. 5 рыбаков за 5 часов распотрошили 5 судаков. За сколько часов 100 рыбаков распотрошат 100 судаков?

45. На лесопильном заводе каждую минуту машина отпиливает от бревна кусок в 1 *м*. Через сколько минут она распилит бревно в 6 *м*?

46. Что дороже: кило гривенников или полкило двугривенных?

47. В корзине 3 яблока. Как их поделить между тремя товарищами, так, чтобы одно яблоко осталось в корзине?

48. «Знаете ли вы пропорции? Конечно, знаете. Один табурет весит 3 *кг*, а 2 таких табурета?»—«6 *кг*». — «Правильно. Петух, стоя на одной ноге, весит 2 *кг*. Сколько он весит, стоя на двух ногах? Ответить быстро!»

49. Тройка лошадей пробежала 30 *км*. По скольку километров пробежала каждая лошадь?

50. Двенадцать разделили пополам, получилось семь. Как это могло случиться?

51. У меня в левом кармане столько же денег, сколько в правом. Из левого кармана я теперь перекладываю в правый одну копейку. На сколько после этого станет больше денег в правом кармане, чем в левом?

52. а) Какой знак нужно поставить между 6 и 5, чтобы получить число, которое больше, чем 6, и меньше, чем 5? б) А между 5 и 6, чтобы получить число, которое меньше 6 и больше 5?

53. Дело происходило в столовой. Во время обеда за одним столом 2 отца и 2 сына съели 3 апельсина, а за другим столом 3 сына и 3 отца съели 4 яйца. Как это могло случиться, если известно, что каждый съел либо целый апельсин, либо целое яйцо?

54. Турист решил поскорее добраться из села A в село B. Первую половину пути он ехал на машине в 10 раз быстрее, чем шел бы пешком. Вторую половину пути он ехал на волах в 2 раза медленнее, чем шел бы пешком. Сколько времени он выгадал от того, что ехал, а не шел?

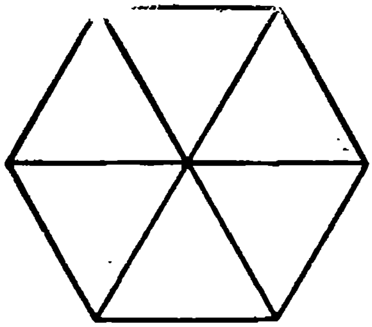


Рис. 32.

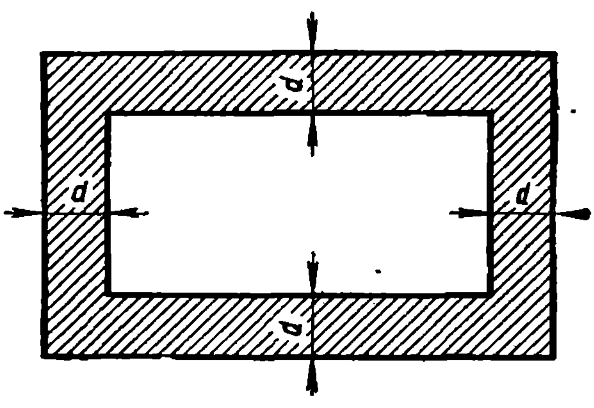


Рис. 33.

Приведем в качестве примера вопросы для одной викторины:

1. Может ли оказаться, что x больше $10x$?

2. Велосипедист поднимался в гору со скоростью 10 *км* в час и проехал таким образом 1 *км*. Спускался он под гору тоже на рас-

стояние в 1 *км* со скоростью 20 *км* в час. Какова его средняя скорость?

3. Сколько выпуклых многоугольников и каких наименований вы здесь видите? (Рис. 32.)

4. Что тяжелее: пуд железа или пуд пуха? Ответить быстро!

5. В одной книге указан такой год издания: MDCCXLIX. Когда издана книга?

6. Какая разница между числом и цифрой?

7. Назовите трех видных греческих математиков. Что вы знаете о них?

8. Вычислите в уме $\sqrt{68^2 + 51^2}$.

9. Что такое пантограф?

10. Трапеция разрезана своей средней линией на две трапеции. Будут ли они подобны?

11. Четыре планки, из которых сделана рамка (рис. 33), имеют одну и ту же ширину. Будет ли внутренний прямоугольник подобен наружному?

Математический КВН

Популярность, которой пользуются встречи «Клуба веселых и находчивых», подсказала еще одну форму математических состязаний — «Математический КВН». Такие встречи проводятся во многих школах, а иногда — между школами, с приглашением «болельщиков». В некоторых случаях математические вопросы и задачи занимают лишь часть встречи КВН. Одни задачи и вопросы предлагают капитанам команд, другие — всему составу команд, третьи — болельщикам.

Для КВН более подходят задачи и вопросы такого типа, как для викторин, образцы которых приведены выше. Команды могут получить и домашнее задание — подготовить занимательный рассказ о математике или о математиках, решить дома трудную задачу и т. п.

Литература. В. Г. Болтянский и И. М. Яглом [2]; А. А. Леман [1]; П. Ю. Германович [1], [2]; Б. А. Кордемский [1]; Ф. Ф. Нагибин [1]; Е. А. Морозова и И. С. Петраков [1].

Часть II

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЧЕРКИ И ЗАДАЧИ

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЕМИКЛАССНИКОВ

§ 1. ДВАДЦАТЬ АРИФМЕТИЧЕСКИХ И ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. 5 школьников из 5 различных городов приехали в Смоленск для участия в областной математической олимпиаде. «Откуда вы, ребята?» — спросили мы их. Вот что ответил каждый. Андреев: «Я приехал из Рославля, а Григорьев живет в Гжатске». Борисов: «В Гжатске живет Васильев. Я прибыл из Вязьмы». Васильев: «Из Рославля приехал я, а Борисов — из Ельни». Григорьев: «Я прибыл из Гжатска, а Данилов — из Ярцева». Данилов: «Да, я действительно из Ярцева. Андреев живет в Вязьме». Мы удивились противоречивости их ответов. Ребята объяснили: «Каждый высказал одно утверждение правильное, а другое ложное. Но по нашим ответам вполне можно установить откуда мы приехали». Откуда приехал каждый школьник?

2. Рассказывают, что много лет назад жил народ по названию рокоманцы. Однажды рокоманский корабль потерпел крушение у одного из островов Великого, или Тихого, океана. Корабль был разбит в щепки; часть команды спаслась и поселилась на острове. Вскоре они переняли все обычаи местных жителей и стали во всем похожими на туземцев. Даже язык свой они забыли. В одном только они по-прежнему отличались от жителей острова: туземец что ни скажет, то правда, а рокоманец что ни скажет, то наоборот. Через несколько десятилетий французская экспедиция случайно обнаружила обломки рокоманского корабля у берегов острова. Капитан французского корабля высадился на остров. Он увидел трех стариков. «Ты кто, — спросил он первого на языке жителей острова, — туземец или рокоманец?» Старик был дряхлый. Он ответил на вопрос капитана, но тот не расслышал ответа. «Первый старик, кажется, сказал, что он рокоманец», — сказал капитан, обращаясь к двум другим старикам. «Да, — сказал второй, — он сказал, что он рокоманец». «Нет, — сказал третий, — он сказал, что он не рокоманец, что он туземец». Спрашивается: кем был второй старик и кем был третий? (Фабула задачи и название «рокоманцы» вымышлены.)

3. Легенда рассказывает, что в одной давно забытой стране был храм; в этом храме находились статуи трех богов: бога правды, бога лжи и бога дипломатии, которые были расположены в один ряд. Они обладали одним замечательным свойством: отвечали на вопросы верующих. Было известно, что бог правды всегда говорил правду, бог лжи всегда говорил ложь, а бог дипломатии — иногда правду, а иногда ложь. Внешне статуи были совершенно одинаковые, и никто из верующих не знал, кто же бог лжи, бог правды, бог дипломатии. В связи с этим верующим приходилось обращаться к жрецам, чтобы выяснить, что же в ответах богов является правдой. И вот однажды молодой крестьянин по прозвищу Простак пришел в храм с твердым намерением узнать, какая статуя каким богом является. Он смиренно подошел к статуе, которая была расположена от него справа, и спросил ее: «Какой бог находится рядом с тобой?» Статуя ответила: «Бог правды». Тогда он обратился к статуе крайней слева и задал тот же вопрос: «Какой бог находится рядом с тобой?» Статуя ответила: «Бог лжи». Тогда он обратился к статуе, стоящей в центре, и спросил: «Кто же ты?», на что та ответила: «Бог дипломатии». «Теперь все ясно», — сказал себе Простак. Он вышел из храма и рассказал людям, какая статуя каким богом является. Спрашивается: каким образом Простак это узнал?

4. В ящике имеется сотня флажков: красных, зеленых, желтых, синих. В темноте я выбираю флажки. Какое наименьшее число флажков нужно взять, чтобы среди них наверняка оказалось не меньше 10 флажков одного и того же цвета?

5. В ящике лежат 70 шаров: 20 красных, 20 зеленых, 20 желтых, остальные черные и белые. Шары отличаются друг от друга лишь цветом. В темноте я выбираю шары. Какое наименьшее число шаров я должен взять, чтобы среди них было не меньше 10 шаров одного цвета?

6. Мама испекла пирожки: 20 начиненных повидлом, 15—мясом, 10 — творогом. Какое наименьшее число пирожков достаточно взять (разламывать их нельзя), чтобы среди них заведомо оказалось не менее трех пирожков: а) с повидлом; б) с одной и той же начинкой; в) с различными начинками?

7. Имеется 5 одинаковых по виду деталей. Известно, что среди них 4 детали равного веса (стандартные), а одна отличается по весу от остальных (бракованная деталь), но неизвестно, какая именно, и неизвестно, легче ли она остальных или тяжелее. Кроме этих пяти деталей, имеется еще одна заведомо стандартная деталь (эталон). Как с помощью двух взвешиваний на весах с двумя чашками без гирь выявить бракованную деталь?

8. Имеется бутыль чистого спирта и бочонок (неполный) с водой. Я беру из бутыли 1 *кг* спирта, переливаю его в бочонок и полученную жидкость перемешиваю. Затем 1 *кг* смеси переливаю в бутыль со спиртом. Эту операцию, состоящую из двух переливаний, я проделываю трижды. Чего в результате окажется (по весу) больше — спирта в бочке с водой или воды в бутыли со спиртом?

9. Трое учащихся школы №1 — Толя, Федя и Митя — и трое учащихся школы №2 — Коля, Леня и Петя — пошли в лес за грибами. Чтобы не заблудиться, они распределились по парам, причем в каждой паре было по одному ученику из каждой школы. Когда вновь собрались, Толя сказал: «Я собрал вдвое больше грибов, чем Федя». — «А у меня вдвое больше, чем у тебя», — сказал Митя, обращаясь к Толе. «Вероятно, — продолжал Митя, — мы собрали больше, чем ученики школы № 2: ведь у меня у одного столько грибов, сколько у Лени и Пети вместе». — «Мы с Митей, — поддержал Толя, — собрали вместе столько же грибов, сколько Леня и Коля вместе». — «Пустяки, — сказал Коля, — разве вы не видите, что у каждого из учащихся нашей школы на 1 гриб больше, чем у мальчика, что был с ним в паре?» Кто с кем был в паре?

10. Двум колхозникам нужно успеть к поезду, который отходит через 1 час 5 минут. До станции 9 *км*, а каждый из них может пройти 6 *км* в час, так что пешком они к поезду не успеют. В их распоряжении имеется велосипед, на котором один человек может проехать 15 *км/ч*. Вдвоем на велосипеде ехать нельзя. Воспользовавшись велосипедом, оба колхозника прибыли одновременно на станцию до отхода поезда. Как это им удалось сделать?

11. 4 рыболова несколько дней провели на рыбной ловле. Для питания они покупали молоко. Один купил 5 *л*, второй 4 *л*, третий 3 *л*, четвертый ничего не купил. Молоко они делили между собой поровну. Четвертый рыболов заплатил остальным трем 1 р. 20 коп. за выпитое им молоко. Они разделили между собой деньги так: первый взял 50 коп., второй 40 коп., третий 30 коп. Правильно ли они разделили деньги?

12. В один из погожих июльских дней мы на рассвете отправились из Смоленска в Рославль. Машина ждала нас под городскими часами. Я взглянул на эти часы (ни у кого в машине не было часов) и удивился. Часы показывали уже 8. «Вы не знаете, что случилось с часами? — спросил я шофера. — Они испортились?» — «Нет, — ответил он, — часы исправные, вчера поставлены, но пущены наугад». В Рославль мы приехали через несколько часов и опять остановились под городскими часами. Я взглянул на часы. Они показывали 4 часа. «Что с вашими часами?—спросил я прохожего. —Вот вы уже, видимо, на работу идете, а они показывают только 4 часа. Они испорчены?» — «Нет, — ответил он, — часы исправные, но пущены наугад». В тот же день мы поехали обратно в Смоленск. Когда уезжали из Рославля, городские часы показывали 8. Приехав в Смоленск, я обратил внимание на городские часы: они показывали 4 часа (машина туда и обратно шла с одной и той же скоростью). Сколько показы-

вали в этот момент городские часы в Рославле? Сколько часов ехали мы из Рославля в Смоленск?

13. Дядя приехал навестить своих двух племянников и трех племянниц, которых давно не видал. Первыми вышли к нему маленький Володя с сестренкой Женей, и мальчуган гордо заявил дяде, что он в два раза старше своей сестры. Затем выбежала Надя, и отец сказал, что обе девочки вместе вдвое старше мальчика. Когда пришел из школы Алеша, отец сказал, что два мальчика вместе вдвое старше обеих девочек вместе. Позже всех пришла Лида, и, увидя гостя, радостно воскликнула: «Дядя, вы приехали как раз в день моего рождения, мне сегодня исполнилось 24 года». — «И знаете еще, — прибавил отец, — я сейчас сообразил, что мои 3 дочери вместе вдвое старше обоих моих сыновей». Сколько лет каждому?

14. Мальчик делает 10 шагов вперед и затем 2 шага обратно, затем он делает еще 10 шагов и 1 обратно, потом еще 10 шагов вперед и 2 обратно, 10 вперед и 1 обратно и т. д. а) На каком расстоянии от места отправления он окажется, когда сделает 1000 шагов? б) Сколько шагов он сделает, когда окажется на расстоянии в 1000 шагов от места отправления?

15. а) Беговая дорожка на стадионе имеет форму окружности. Судья дал одновременно старт двум бегунам, которые побежали в противоположных направлениях. Через некоторое время оба бегуна оказались у судейской трибуны, причем один успел пробежать беговую дорожку 12 раз, а второй 8 раз. Сколько раз они встретились в течение этого времени? б) Сформулируйте и решите аналогичную задачу в предположении, что оба спортсмена бегут в одном направлении.

16. Перемножили первые 500 натуральных чисел (1, 2, 3, 4 и т. д. до 500). Сколько нулей на конце имеет полученное число?

17. Перед вами 5 чемоданов. Я даю вам 5 разных ключей, из которых каждый подходит только к одному из этих чемоданов. Неизвестно только, какой ключ к какому чемодану подходит. Вам нужно на каждый чемодан положить соответствующий ключ. Какое наименьшее число испытаний достаточно произвести в каждом случае, чтобы это сделать?

18. Два ученика —Иванов и Петров —решили сыграть между собой матч в шашки на следующих условиях: 1) будет сыграно 10 партий (партии с ничейным результатом не считаются); 2) за каждую выигранную партию победителю засчитывается одно очко; если он при этом запрет одну или несколько шашек, то ему засчитывается уже не одно, а два очка; 3) победителем будет считаться тот, кто наберет больше очков. Когда матч был закончен, то оказалось что оба партнера вместе набрали 15 очков. Победил Петров, который выиграл, однако, меньше партий, чем Иванов. Сколько партий выиграл каждый участник матча?

19. (Задача-шутка.) 3 товарища пришли в столовую пообедать. Каждый из них дал официантке по 1 руб. Официантка принесла им обед и 50 коп. сдачи. На 20 коп. они купили пачку папирос, и каждый взял по 10 коп. Таким образом каждый потратил 90 коп. (100—10). Они израсходовали 3×90коп.$=2$ руб. 70 коп. и еще 20 коп. они заплатили за папиросы, всего 2 руб. 90 коп. А сначала они уплатили 3 руб. Куда же девались 10 коп.?

20. (Задача-шутка.) В магазин вошли два мальчика. У каждого имелись деньги, и каждый хотел на свои деньги купить карандаши. Но карандаши продавались пачками, а чтобы купить целую пачку, первому не хватало 30 коп., а второму 2 коп. Тогда они сложили свои деньги и решили вместе купить одну пачку карандашей. Но оказалось, что это невозможно: не хватало денег. Сколько стоила пачка карандашей?

§ 2. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ «С КОНЦА»

1. Я задумал число, прибавил к нему 5, разделил полученное число на 5, от результата отнял 5 и то, что получилось, умножил на 5. Тогда я получил 5. Какое число я задумал?

2. Я задумал число, прибавил к нему 1, умножил на 2, разделил на 3 и отнял от результата 4. Получилось 5. Какое число я задумал?

3. Колхозница принесла на рынок яйца. Первому покупателю она продала половину всего запаса и одно яйцо. Второй взял половину остатка и одно яйцо. Третий купил половину нового остатка и одно яйцо. В корзине остался десяток яиц. Сколько яиц принесла колхозница на рынок?

4. В ящике имеются яблоки. Сначала из него взяли половину всех яблок и $^1/_2$ яблока, затем половину остатка и $^1/_2$ яблока и, наконец, половину нового остатка и $^1/_2$ яблока. После этого в ящике осталось 31 яблоко. Сколько яблок было в ящике вначале?

5. (Старинная задача.) Три брата попросили хозяйку приготовить на ужин картофель. Пока хозяйка варила картофель, братья уснули; через час проснулся старший брат и, увидев на столе картофель, съел свою долю и опять заснул; через некоторое время проснулся второй и, не зная, что старший брат уже ел картофель, тоже съел свою долю и заснул; наконец, проснулся младший брат и сделал то же, что старшие братья. Когда старший брат опять проснулся, то разбудил своих братьев, и тогда все выяснилось; оставшиеся 8 картофелин поделили между собой средний, и младший братья. Сколько штук картофеля подала хозяйка? Сколько из оставшихся 8 штук картофеля взял средний и сколько взял младший брат?

6. — Почему ты так печален? — спросил прохожий старика, ехавшего медленно на лощади.

— Да как же мне не печалиться? — ответил старик. — Половину моего табуна и еще пол-лошади угнали на юг, половину остатка и еще пол-лошади забрали на восток, половина нового остатка и еще пол-лошади ушли на запад; наконец, половину последнего остатка и еще пол-лошади я продал на север, и только моя старая кляча Карагез осталась со мной.

Сколько лошадей было первоначально в табуне у старика?

7. Гастроном продал в первый день $^1/_2$ всех гусей и $^1/_2$ гуся; во второй день он продал $^1/_3$ остатка и еще $^1/_3$ гуся; в третий день продал $^1/_4$ нового остатка и $^3/_4$ гуся, в четвертый $^1/_5$ остатка и $^1/_5$ гуся. На пятый день магазин продал оставшихся 19 гусей. Сколько всего гусей было в магазине?

8. В первый день продавщица продала половину всей ткани и еще $^1/_2$ *м*. Из того, что после этого осталось, она во второй день продала одну треть и $^1/_3$ *м*. В третий день она продала $^1/_4$ нового остатка и еще $^1/_4$ *м*. После этого осталось 8 *м* ткани. Сколько всего метров ткани продала продавщица в течение этих трех дней?

* 9. Отец принес своим пяти сыновьям — Андрею, Борису, Володе, Грише и Диме — пакет с конфетами и дал старшему (Андрею), чтобы он их разделил поровну между всеми братьями. Но Андрей взял себе 81 конфету, а остальные братья взяли разные количества конфет. Братья обиделись на Андрея, и подоспевший отец разрешил их спор. «Андрей, — сказал он, — отдай каждому столько конфет, сколько он уже имеет». Андрей послушался. «А теперь ты, Борис, дай каждому из твоих четырех братьев столько конфет, сколько он имеет». Боря так и сделал. Таким же образом поступили и остальные братья: Володя, Гриша и Дима. И тут оказалось, что у всех братьев конфет поровну. Сколько же конфет взял каждый брат вначале и сколько было всего конфет?

* 10. Три друга вместе со своей обезьянкой остановились на ночлег. С собой они принесли мешочек с орехами. Ночью один захотел полакомиться. Он встал, разделил все орехи на 3 равные части. При этом один орех остался, и он отдал его обезьяне. Себе же он взял одну из трех частей. Через некоторое время встал второй товарищ и, не подозревая, что его товарищ уже брал орехи, отделил себе $^1/_3$ остатка, а оставшийся орех отдал обезьяне. Наконец, встал третий товарищ и, тоже ничего не подозревая, отделил себе $^1/_3$ нового остатка, а оставшийся орех отдал обезьяне. Утром, когда друзья проснулись, они обнаружили еще некоторое число орехов. Каждый сказал, что он ночью брал $^1/_3$ имевшихся орехов. «Что же, разделим тогда оставшиеся орехи поровну», — решили они. Каждый получил при этом по 7 орехов, а один орех остался обезьяне. Сколько было всего орехов?

§ 3. ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

Цена одного процента. Мы часто не придаем значения одному или нескольким процентам. Между тем может оказаться, что один процент — это сотни тысяч тонн топлива, десятки тысяч пудов хлеба.

Приведем несколько примеров. Один процент всех тканей, изготовленных в СССР в 1969 году, составляет 85 млн. *кв. м.*

В 1965 году было произведено около 10,3 млн. тонн сахару из свеклы. Известно, что сахарные заводы недополучают из сахарной свеклы около 2,5% сахара, который уходит с жомом и патокой. Если бы удалось получить из свеклы еще хотя бы один процент сахару, то наша страна получила бы дополнительно 1000 млн. *кг* сахара в год.

1. Имеется центнер огурцов. Влажность этих огурцов (т. е. количество содержащейся в них воды) составляет 99%. Полежав на складе, огурцы подсохли. Теперь их влажность составляла 98%. Каким стал вес всех этих огурцов?

2. Двое рабочих — высокий и маленький — вышли одновременно из одного и того же дома и пошли на свой завод. У одного из них шаг был на 20% короче, чем у товарища, но зато он успевал за одно и то же время делать на 20% больше шагов, чем его товарищ. Кто из них раньше пришел на завод?

3. Только что добытый каменный уголь содержит 2% воды, а после двухдневного пребывания на воздухе он содержит 12% воды. На сколько килограммов за это время увеличится вес добытого из шахты центнера угля?

4. Обращаясь в лед, вода увеличивается в объеме на 9%. На сколько процентов уменьшится в объеме какой-нибудь кусок льда, когда растает?

5. Книга была впервые издана в 1940 году. В 1943 году она была переиздана, причем ее новая стоимость составляла 120% от стоимости в 1940 г. В 1952 году цена на книгу была снижена на 20%. Когда книга стоила дешевле — в 1940 году или 1952 году?

6. Рабочий Иванов предложил замечательное изобретение: оно дает 30% экономии топлива. Рабочий Петров придумал еще лучшее изобретение: оно одно дает 70% экономии топлива[1]. «Так давайте внедрим в производство оба предложения» — сказал директор завода. Сколько процентов экономии топлива получит завод?

7. Одно изобретение дает 50% экономии топлива, второе — 30%, третье — 20%. Сколько процентов экономии дадут все 3 изобретения, если их применить одновременно?

8. В вагоне случайно оказалось 80% русых и 70% мужчин.

---

[1] В задачах 6 и 7 предполагается, что применение одного из изобретений не влияет на эффект от применения другого изобретения.

Можно ли утверждать, что в вагоне большинство пассажиров было русыми мужчинами?

9. Один колхоз заключил договор с райпотребсоюзом о том, что осенью колхоз продаст райпотребсоюзу центнер сушеных грибов. Председатель колхоза задумался: сколько же тонн свежих грибов надо собрать для этой цели? Он заглянул в справочник и узнал: свежий гриб содержит 95% воды, а сушеный — 10%. Какой ответ должен был получить председатель колхоза на свой вопрос?

§ 4. НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ И НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ

1. Сегодня, в воскресенье, из Москвы отправились три теплохода. Через сколько дней все эти теплоходы снова выйдут в воскресенье из Москвы, если первый теплоход выходит в рейс раз в три дня, второй —раз в 4 дня, а третий — раз в 6 дней?

2. Целые числа от 1 до 1000 написаны вдоль по окружности. Начиная с первого, отмечаем числа через каждые 15 чисел, т. е. 1, 16, 31, 46, ... Этот процесс продолжается до тех пор, пока мы, сделав несколько оборотов, не вернемся к числу 1. Спрашивается: сколько чисел останутся непомеченными?

3. Колхозница принесла яблоки для продажи, число их меньше 500. Когда она их разложила по парам, одно яблоко осталось. Когда же она разложила яблоки по 3, то опять осталось 1 яблоко. Колхозница раскладывала яблоки по 4, по 5, по 6, но каждый раз оставалось одно яблоко. Но когда она разложила яблоки по 7, то остатка не было. Сколько было яблок?

4. Я задумал трехзначное число. Если к нему прибавить 6, то оно разделится на 7; если к задуманному числу прибавить 7, то оно разделится на 8; если прибавить к задуманному числу 8, то оно разделится на 9. Что за число я задумал?

5. Какое наименьшее число при делении на 2, 3, 4, 5, 6 даст соответственно остатки 1, 2, 3, 4, 5, а на 7 делится без остатка?

6. а) Трехзначное число при делении на 13 дает остаток 11, при делении на 11 дает остаток 9, при делении на 7—остаток 5. Найдите его.

б) Четырехзначное число обладает теми же свойствами, но кроме того, делится нацело на 3. Найдите его.

7. К числу 523 я приписал справа трехзначное число, и полученное шестизначное число разделилось на 7, на 8 и на 9. Мой брат приписал к числу 523 другое трехзначное число, большее, чем приписанное мною, и полученное число также разделилось на 7, 8, 9. Какое число приписал я, а какое — мой брат?

8. Выберите наибольшее из тех четырехзначных чисел, которое при делении на любое однозначное число, кроме 1, дает остаток 1?

9. Один ученик подметил любопытное трехзначное число: 945. Если прибавить к нему любое нечетное однозначное число, то сумма разделится на число, вдвое большее. Например, если прибавите к 945 число 1, то сумма разделится на 2, а если к 945 прибавите 9, то сумма разделится на 18. Найдите другое трехзначное число, обладающее тем же свойством.

10. Числа 4373 и 826 разделили на одно и то же число, и получилось соответственно в остатке 8 и 7. На какое число делили?

11. а) Будет ли НОК нескольких чисел делиться на их НОД?

б) Чему равен НОД двух чисел, если известно, что НОК этих чисел равно их произведению?

§ 5. ПЕРЕЛИВАНИЯ, ДЕЛЕЖИ И ПЕРЕПРАВЫ ПРИ ЗАТРУДНИТЕЛЬНЫХ ОБСТОЯТЕЛЬСТВАХ

1. Имея 2 бидона на 4 *л* и 5 *л*, можно ли налить из водопроводного крана в ведро 3 *л* воды? (Емкость ведра не меньше 3 *л*).

2. Сосуд в 10 *л* наполнен керосином. Требуется разлить этот керосин на две равные части, имея под руками два пустых сосуда емкостью в 7 *л* и 3 *л*.

3. Задача Пуассона. Известному французскому математику Симону Пуассону (1781—1840) в юности предложили задачу. Заинтересовавшись ею, Пуассон затем увлекся математикой и посвятил этой науке всю свою жизнь. Вот эта задача.

Некто имеет 12 пинт вина (пинта—мера объема) и хочет подарить из этого количества половину, но у него нет сосуда в 6 пинт. У него два сосуда: один в 8, другой в 5 пинт. Спрашивается: каким образом налить 6 пинт вина в сосуд на 8 пинт?

4. Имеются 4 бочки. В первую входит 24 ведра. Вначале наполнена она одна; вторая имеет емкость в 13 ведер, третья — 11, четвертая — 5 ведер. Требуется содержимое первой бочки разлить на три равные части так, чтобы первые 3 бочки содержали по 8 ведер, а четвертая осталась пустой.

5. (Старинная задача.) 3 солдата и 3 разбойника должны переправиться через реку. Они нашли лодку, но в ней вмещается только два человека. Нельзя оставить на одном берегу больше разбойников, чем солдат. Как же всем шестерым переправиться через реку?

6. Как разделить 7 яблок поровну между 12 школьниками: а) если разрешается лишь одно яблоко разрезать более чем на две части; б) если нельзя разрезать ни одно яблоко более чем на четыре части?

7. Три товарища получили 9 закрытых бутылей с молоком. В первой бутыли 1 *л* молока, во второй 2 *л* и т. д. до девятой, в которой 9 *л*. Как им (не открывая бутылей) разделить между собой бутыли так, чтобы каждому из товарищей досталось одно и то же количество молока и одно и то же число бутылей?

§ 6. ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ И ПЕРЕКРАИВАНИЕ ФИГУР

Вы располагаете линейкой (с делениями), карандашом, ножницами; разрешается производить с помощью ножниц лишь прямолинейные разрезы. Разрезав какую-либо фигуру на части, можете ее перекроить в другую фигуру (то есть составить другую фигуру из тех же частей).

Попытайтесь решить следующие задачи.

1. Как бы вы разрезали квадрат а) на 4 равные части; б) на 16 равных частей, в) на 17 равных частей?

2. Как перекроить параллелограмм в прямоугольник? В треугольник?

3. Как перекроить трапецию в прямоугольник? В параллелограмм? В треугольник?

4. Разрежьте треугольник на три части, из которых можно сложить прямоугольник (два способа).

5. Три правильных и равных треугольника разрежьте на части, из которых можно составить два правильных шестиугольника.

6. а) Разрежьте фигуру, показанную на рисунке 34, на четыре равные части, б) то же с трапецией (рис. 35).

7. Любой четырехугольник нетрудно разделить одной прямой на два треугольника. Начертите четырехугольник, который можно одной прямой разбить на три треугольника.

8. Разрежьте правильный треугольник: а) на три равных треугольника, б) на три равные трапеции.

9. В трапеции $ABCD$ $AB \parallel DC$, $AD = DC = CB = \frac{1}{2}AB$; разрежьте ее на четыре равные трапеции.

10. От прямоугольного ковра размером 9 *дм* × 12 *дм* отрезали прямоугольный кусок размером 8 *дм* × 1 *дм* (бóльшая сторона отрезанного куска параллельна меньшей стороне ковра).

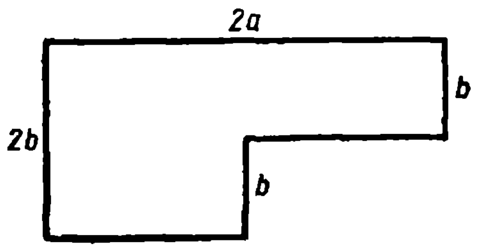


Рис. 34.

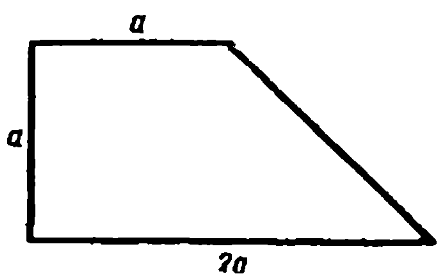


Рис. 35.

Разрежьте оставшуюся часть ковра на три куска, из которых можно составить ковер прямоугольной формы.

11. Вырежьте из бумаги прямоугольник со сторонами 9 *см* и 4 *см*; а) разрежьте его на три таких прямоугольника, чтобы из них можно было составить квадрат; б) разрежьте тот же прямоугольник на две части, из которых можно составить квадрат.

12. Разрежьте прямоугольник со сторонами 16 *см* и 9 *см* на две части так, чтобы из них можно было составить квадрат.

13. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2AD$. Разрежьте прямоугольник на три части, из которых можно составить квадрат.

§ 7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ С ЛИСТОМ БУМАГИ

Приготовьте несколько листов бумаги. Лучше, чтобы они были плотными, глянцевыми, цветными, а некоторые листы были двухцветными (на лицевой и оборотной стороне — разные цвета).

При хорошей смекалке можно, оказывается, перегибая лист бумаги, выполнить многое такое, для чего обычно привлекаем линейку и циркуль. Вы в этом убедитесь, поразмыслив над следующими задачами.

1. Пользуясь только перегибанием листа бумаги, постройте а) биссектрису угла; б) медиану и высоту треугольника; в) точку пересечения медиан (высот, биссектрис) треугольника; г) прямой угол, прямоугольник, квадрат; д) равнобедренный треугольник, равносторонний треугольник; е) дополните $\triangle ABC$ до параллелограмма так, чтобы отрезки AB и AC были сторонами параллелограмма; ж) проведите через центр параллелограмма прямую, параллельную стороне.

2. Используя перегибание листа бумаги, докажите, что сумма углов треугольника равна 180°. Идея доказательства ясна из рисунка 36. AC — бóльшая сторона треугольника, MN — средняя линия, $MP \perp AC$, $NQ \perp AC$.

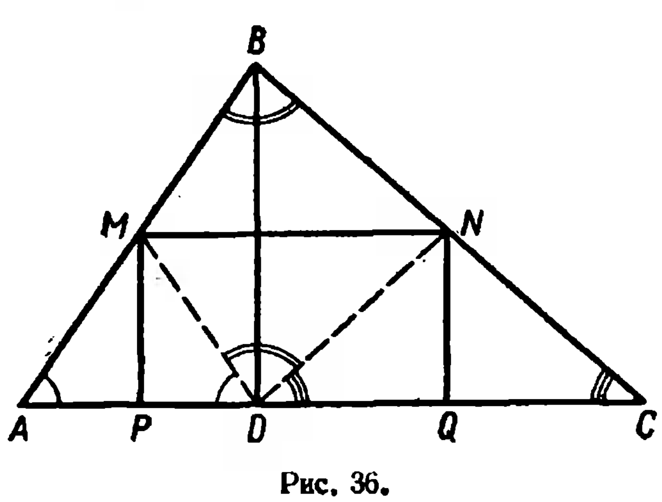


Рис. 36.

Т е о р е м а   П и ф а г о р а. Возьмите прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c (рис. 37). Изготовьте затем квадрат со стороной $a + b$. Этот квадрат вырежьте из листа, окрашенного с одной стороны в один цвет (скажем, красный), а с другой стороны — в другой цвет (зеленый). Отогните теперь

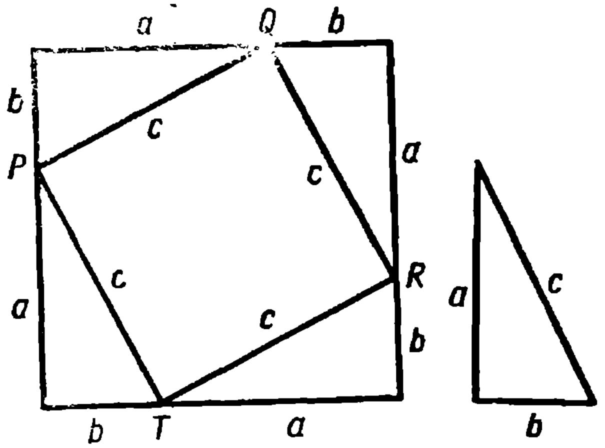


Рис. 37.

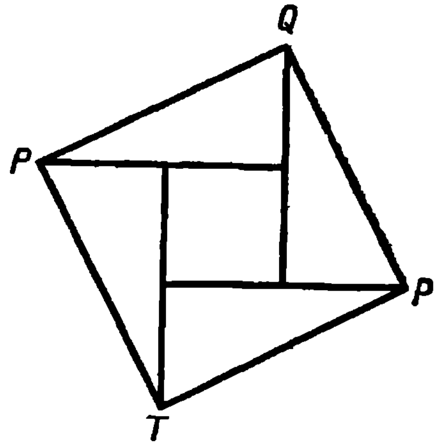


Рис. 38.

четыре треугольника, равных данному. $PQRT$ — квадрат (почему?). Вы теперь видите сплошной красный квадрат. Его площадь равна c^2. А теперь посмотрите на оборотную сторону листа (рис. 38). Вы видите зеленый квадратик. Его сторона равна $a - b$, а площадь $(a-b)^2$. Кроме этого, вы видите четыре красных треугольника, площадь каждого равна $\frac{1}{2}\,ab$, а площадь всех $2\,ab$. Таким образом $c^2 = (a - b)^2 + 2ab$, то есть $c^2 = a^2 + b^2$.

После того как выяснена сущность доказательства, нужно обосновать, почему зеленый четырехугольник — квадрат и почему красные треугольники не налегают (частично) один на другой.

§ 8. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РЕБУСЫ

В следующих примерах восстановите цифры вместо знаков («?» и «*»).

1. $$\begin{array}{r} 2?7 \\ -\ ?6? \\ \hline 128 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{r} ????? \\ -\ ???? \\ \hline 1 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{r} *2* \\ +\ 2*2 \\ \hline *000 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{r} 8? \\ \times\ ??? \\ \hline ?? \\ ?? \\ ?? \\ \hline ???8 \end{array}$$

5. $$\begin{array}{r} *7*** \\ \times\ 743 \\ \hline *****5 \\ ****** \\ ****** \\ \hline 42***87* \end{array}$$

6. $$\begin{array}{l|l} ******* & ** \\ \cline{2-2} *** & **8** \\ \cline{1-1} ** & \\ ** & \\ \cline{1-1} *** & \\ *** & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

7.
```
??????|???
????  |---
----  |?8?
  ???
  ???
  ----
  ????
  ????
  ----
     0
```

8. (Для VIII класса)
```
√?????? = ???
 ?
 ---
 ???
  ??
 ----
 4???
 ????
 ----
    0
```

9. В следующей записи цифры заменены буквами, причем разные буквы изображают различные цифры, одинаковые буквы — одинаковые цифры. Восстановите цифры.

$$\begin{array}{r} \times\ AD \\ HB \\ \hline ACC \\ AD\ \ \\ \hline ГDC \end{array}$$

10. Число оканчивается цифрой m. Если эту цифру переставить с конца в начало числа, то число увеличится в k раз. Найдите это число, если а) $m = 7$, $k = 5$; б) $m = 2$, $k = 2$.

11. Первая цифра шестизначного числа — единица. Если ее переставить в конец, то число увеличится втрое. Найдите это число.

(!) § 9. ПРИБЛИЖЕННЫЙ ПОДСЧЕТ И ПРИКИДКА

В реальных расчетах, с которыми приходится сталкиваться при решении практически важных задач, исходные данные известны лишь приближенно, с той или иной погрешностью. Поэтому и результаты получаются с некоторой погрешностью. Нередко вычислители, не знакомые с правилами вычислений с приближенными данными, производят расчет так, как если бы данные были точными; в результате они получают длинные «хвосты» цифр, не заслуживающих никакого доверия.

Известный русский инженер и математик А. Н. Крылов вспоминает, что, проверяя вычисления группы инженеров-кораблестроителей, он обнаружил, что 97% всех цифр в этих вычислениях были лишние и могли быть отброшены без ущерба для точности результата. Он высказал мысль, что «всякая неверная цифра составляет ошибку, а всякая лишняя цифра — половину ошибки».

Правила вычисления с приближенными данными сейчас входят в обязательный школьный курс математики. Поэтому мы здесь ограничимся лишь некоторыми замечаниями и задачами.

1. Правила подсчета цифр.

1. (Задача-шутка.) В поезд весом 200 *т* сел пассажир весом 80 *кг* с бутылкой весом 1 *кг* и пробкой весом 5 *г*. Сколько будет после этого весить поезд?

2. Алюминиевая пластинка имеет форму прямоугольного параллелепипеда (ящика) с такими измерениями: $a = 184$ *мм*, $b = 109$ *мм*; $c = 32$ *мм*, удельный вес алюминия $d = 2{,}6$ *кг/дм*^{3}. Все числа a, b, c, d приближенные, причем все цифры в них верные. Вычислите вес пластины как можно точнее и как можно проще.

(!!) **2. Прикидка.** Располагая каким-либо числом, мы можем его округлить (по обычным правилам, хорошо известным из курса арифметики), оставив лишь *одну* верную значащую цифру.

Например: $328{,}73 \approx 300$; $5826{,}7 \approx 6000$; $0{,}0435 \approx 0{,}04$. Здесь верные значащие цифры соответственно: 3; 6; 4.

На практике нередко бывает, что нас удовлетворит, если какой-либо результат будет нам сообщен лишь с одной верной значащей цифрой; в то же время существенно, чтобы было правильно указано, единицы какого разряда изображены этой цифрой: единицы, или десятки, или сотни, или десятые, или сотые и т. д.

Так, например, вас, вероятно, устроит, если на вопрос: «Сколько жителей в Париже?» — вам ответят: «Около 7 миллионов», или если на вопрос: «Сколько километров от Москвы до Гаванны?» — вы получите ответ: «Около 10000».

Каждое число можно так округлить, чтобы осталась только одна верная значащая цифра, и притом чтобы она была не больше 5 (если первая отличная от нуля цифра числа равна 5 и имеются в числе еще и другие неравные нулю цифры, то условимся его округлять по избытку).

Например, число 5826,7 можно округлить так: $5826{,}7 \approx 10000$. А вот другие примеры: $0{,}00813 \approx 0{,}01$; $0{,}00213 \approx 0{,}002$.

Если после *такого* округления оказывается, что оставшаяся цифра показывает, сколько в числе, получившемся после округления, *десятков*, то говорят, что исходное число имеет *порядок* 1; если эта цифра означает *сотни*, то говорят, что *порядок* числа *равен* 2, и т. д. Если цифра изображает *десятые доли*, то говорят, что число имеет *порядок* — 1, если *сотые* — *порядок* — 2, и т. д.

Наконец, если получившаяся цифра изображает *единицы*, то говорят, что число имеет *нулевой порядок*.

Так, например, число 328,73 (≈ 300) имеет порядок 2, число 5826,7 ($\approx 10\,000$) — порядок 4, число 0,0435 ($\approx 0{,}04$) — порядок — 2, число 3,1415 (≈ 3) — порядок 0.

Иногда бывает приемлемым, чтобы был сообщен *правильно лишь порядок* числа, притом допускается, чтобы даже ни одна значащая цифра не была сообщена. Так, например, обстоит дело, когда говорят, что какие-то животные «жили на Земле *несколько* миллионов лет назад».

Если требуется по возможности быстрее получить приближенно результат какого-нибудь расчета, и притом лишь с одной верной значащей цифрой, то можно вычисления упростить: допустимо, вообще говоря, все исходные данные (перед началом вычислений) и все промежуточные результаты (появляющиеся в ходе вычислений) округлить, оставив в каждом из них только две или даже одну верную значащую цифру.

Такая предварительная грубая оценка результата вычисления на основании округления исходных данных и промежуточных результатов, называется п р и к и д к о й.

Прикидку полезно произвести и в тех случаях, когда нас интересует результат вычислений с н е с к о л ь к и м и верными значащими цифрами: в подобных случаях предварительная прикидка служит для к о н т р о л я более громоздких вычислений с более точными данными. В частности, прикидка очень полезна при расчётах с помощью таблиц или логарифмической линейки.

Рассмотрим несколько примеров.

3. Прикиньте, сколько примерно секунд прошло с начала нашей эры.

4. Один мальчик как-то научился считать и так увлекся этим делом, что однажды заявил маме, когда та его позвала обедать: «Подожди, вот досчитаю до миллиона, тогда пойду» (а он к тому времени досчитал уже до 5000).

Сколько дней пришлось бы маме ждать, если мальчик на самом деле стал бы считать до миллиона и если бы он в течение этого времени ни на что бы не отвлекался — даже на еду, питье и сон? На то, чтобы назвать одно число, уходит в среднем 1 секунда.

5. Ваше сердце делает в среднем 80 ударов в минуту. Прикиньте, сколько примерно ударов оно сделает в течение ближайших 50 лет вашей жизни.

6. Прикиньте, чему примерно равно а) $6496 : 32$;

б) $\dfrac{(8{,}71-2{,}15)\cdot 3{,}2-5{,}12}{8{,}17-(2{,}19+4{,}27):2}$; в) $\dfrac{43{,}2\cdot 76{,}4\cdot 0{,}24}{2{,}63\cdot 54{,}37}$

(будут ли единицы старшего разряда сотнями или десятками и т. п.).

§ 10. ГЕОМЕТРИЯ И ОПТИЧЕСКИЕ ИЛЛЮЗИИ

Нередко, решая в школе какие-либо задачи, учащиеся младших и средних классов делают вывод лишь на основании того, что они видят на чертеже; часто они даже уверены, что после этого никаких доказательств уже не нужно.

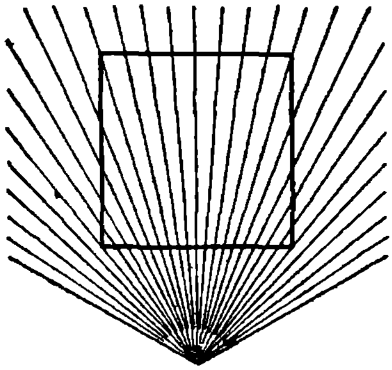


Рис. 39.

Рис. 40

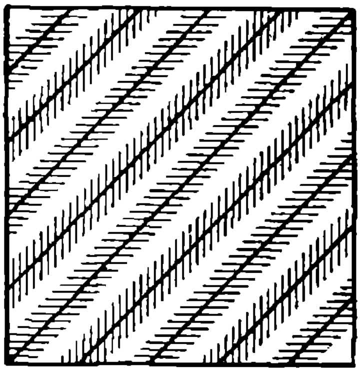


Рис. 41.

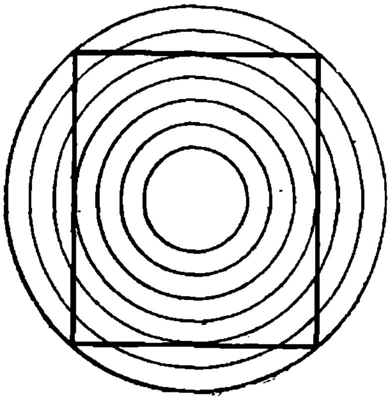


Рис. 42.

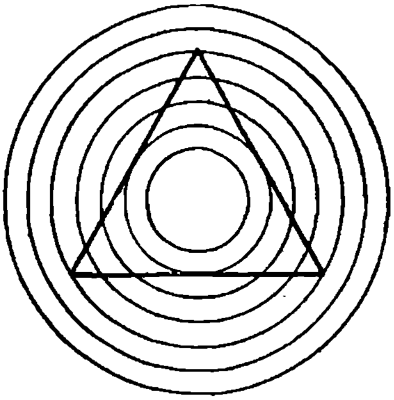


Рис. 43.

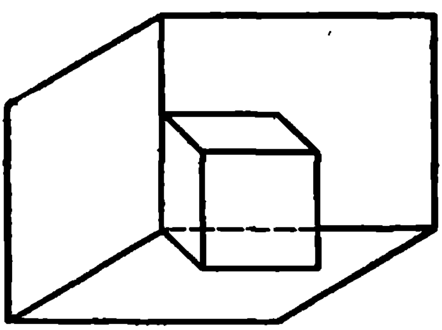


Рис. 44.

Но вот несколько примеров, когда наблюдение над чертежом может нас привести к грубо ошибочным выводам.

1. Разве вам не кажется, что четырехугольник, изображенный на рисунке 39, — трапеция (у которой «верхнее» основание меньше «нижнего»)? А на самом деле это квадрат!

2. Линия на рисунке 40, расположенная за двумя параллельными полосками, кажется ломаной, а на самом деле — это прямая!

3. Параллельны ли заштрихованные прямые (рис. 41). Ответ: Да!

4. Стороны прямоугольника кажутся кривыми! (рис. 42).

5. Кривыми кажутся также стороны треугольника! (рис. 43).

6. Вы видите (рис. 44) трехгранный угол и коробку. Где расположена коробка — внутри трехгранного угла или вне его? При желании можете увидеть любое из этих двух положений!

§ 11. НЕСКОЛЬКО МАТЕМАТИЧЕСКИХ СОФИЗМОВ

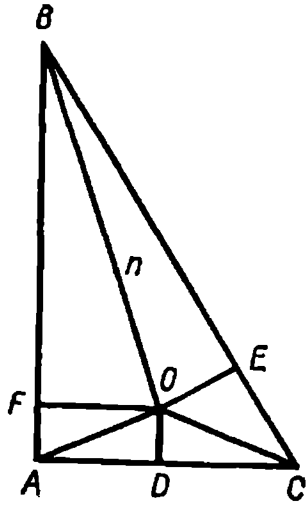


Рис. 45.

Сейчас «докажем» несколько явно ошибочных, нелепых утверждений, применяя рассуждения, которые очень сходны с теми, которые используются на уроках математики. Конечно, каждый раз удается «доказать» нелепость лишь благодаря тому, что мы в ходе рассуждения сознательно допустим ошибку.

Такое рассуждение, в котором явно неправильный результат доказывается благодаря использованию доводов, ошибочность которых сознательно замаскирована, называется **софизмом**.

В приведенных ниже софизмах найдите ошибочные доводы.

1. *Все числа равны между собой!* Пусть a и b — два произвольных различных числа: $a \neq b$. Докажем, что они равны! Пусть $a - b = c$. Тогда $a = b + c$. Умножая обе части последнего равенства на $a - b$, получим:

$$a(a-b) = (b+c)(a-b);\quad a^2 - ab = ba + ca - b^2 - bc;$$

$$a^2 - ab - ac = ba - b^2 - bc;\quad a(a-b-c) = b(a-b-c).$$

Отсюда $a = b$! То есть два произвольных числа равны!

2. *Катет прямоугольного треугольника равен его гипотенузе!* Пусть BO (рис. 45) — биссектриса угла B, D — середина катета AC, $DO \perp AC$, $OE \perp BC$, $OF \perp BA$.

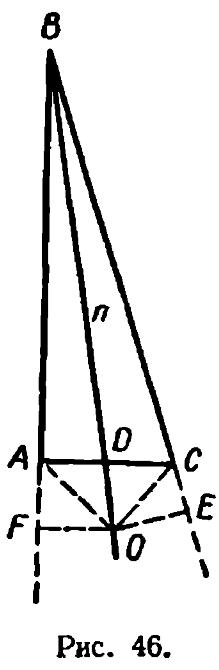


Рис. 46.

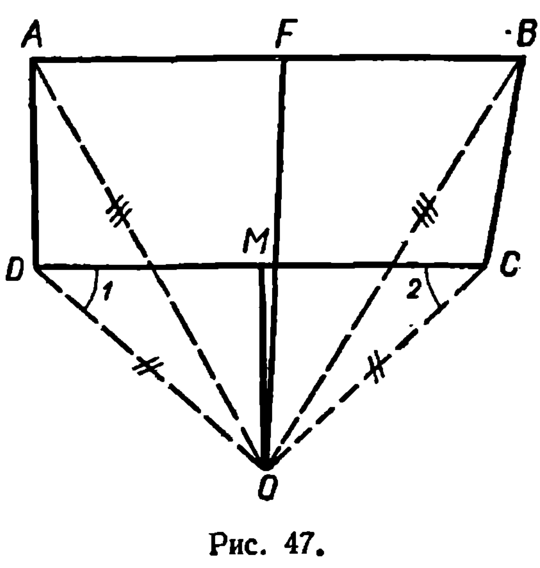
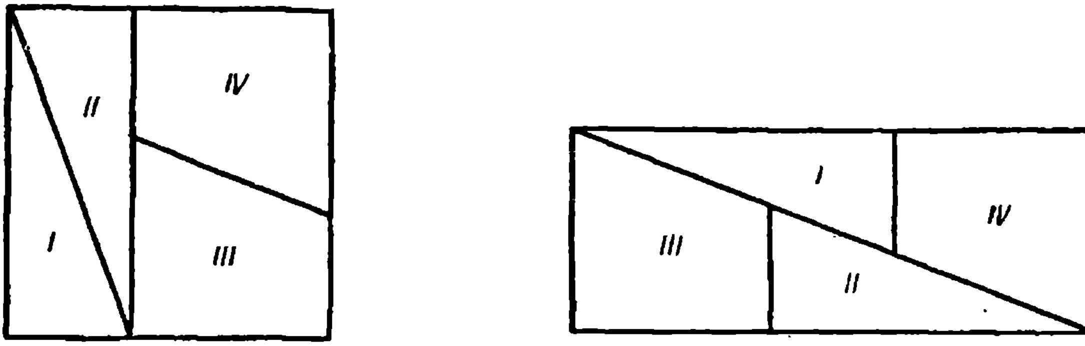


Рис. 47.



а) Рис. 48. б)

Так как O — на биссектрисе угла B, то $\triangle BFO = \triangle BEO$ (по гипотенузе и острому углу). Поэтому

$$BF = BE. \tag{1}$$

Далее, $OA = OC$, ибо каждая точка перпендикуляра к отрезку AC, проходящего через середину AC, равноудалена от A и C. Так как $OF = OE$, то $\triangle AOF = \triangle COE$, и поэтому

$$AF = CE. \tag{2}$$

Складывая почленно (1) и (2), получим $AB = CB$, то есть катет равен гипотенузе, что требовалось доказать. В чем ошибка?

Обычно кто-либо из школьников догадывается, что точка O не может быть внутри $\triangle ABC$. Тогда можно показать, что если O вне $\triangle ABC$ или на его стороне, то опять $AB = CB$ (рис. 46). Именно, показываем, что $BF = BE$, $AF = CE$. Отсюда $AB = CB$.

3. *Прямой угол равен тупому*! Пусть (рис. 47) $\angle ADC$ — прямой, $\angle DCB$ — тупой; $CB = DA$, $CM = DM$, $AF = BF$, $MO \perp CD$, $FO \perp AB$; ясно, что $\triangle DMO = \triangle CMO$ (по двум катетам). Поэтому

$$\measuredangle MDO = \measuredangle MCO. \tag{1}$$

$OD = OC$, $\triangle AFO = \triangle BFO$ (по двум катетам). Следовательно, $AO = OB$, $\triangle ADO = \triangle BCO$ (по трем сторонам). Значит, $\measuredangle ADO = \measuredangle BCO$. (2)

Из (1) и (2) следует, что

$$\measuredangle ADO - \measuredangle MDO = \measuredangle BCO - \measuredangle MCO,$$

то есть $\measuredangle ADC = \measuredangle BCD$! Таким образом, прямой угол равен тупому, что требовалось доказать! В чем ошибка?

4. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3xy(x - y), & (1) \\ x - y = 1. & (2) \end{cases}$$

Уравнение (1) можно переписать так: $(x-y)^3=0$. В силу (2) получаем: $1^3=0$. Итак: $1=0$!

5. $169=168$! Из картона вырежем четыре плоские фигуры: два равных прямоугольных треугольника с катетами 13 *см* и 5 *см*, и две равные прямоугольные трапеции с основаниями, равными 8 *см* и 5 *см*, и высотой, равной 8 *см*. Из этих четырех кусков можем сложить квадрат (рис. 48, *а*), но можем сложить и прямоугольник (рис. 48, *б*). С другой стороны, легко подсчитать, что их площади соответственно равны 169 кв. ед. и 168 кв. ед. Поэтому $169=168$! В чем ошибка?

МНОЖЕСТВА, АЛГОРИТМЫ, ВЫСКАЗЫВАНИЯ

§ 1. МНОЖЕСТВА

1. Одно из самых важных, самых распространенных и широко употребляемых понятий современной математики — это понятие *множества*.

«Идеи и понятия теории множеств — пишет известный советский математик академик П. С. Александров, — проникли буквально во все разделы современной математики и существенно изменили ее лицо. Поэтому нельзя получить правильного представления о современной математике, не познакомившись с элементами теории множеств».

В математике понятие «множество» является исходным, первичным, его не определяют через другие понятия. Причина в том, что очень трудно (если, вообще, возможно) подобрать более простое понятие, чем понятие множества.

Вместо выражения «множество» употребляются в том же смысле выражения «совокупность», «набор», «коллекция», «собрание» и т. п.

С множествами сталкиваемся на каждом шагу. Примерами множеств могут служить: пчелиный рой, коллекция почтовых марок, футбольная команда, птичья стая, русский алфавит. Каждую геометрическую фигуру можно рассматривать как множество, составленное из точек этой фигуры. Можно объединить в одно множество любые объекты. Вы сами легко приведете примеры множеств.

Те объекты, те предметы, из которых составлено какое-нибудь множество, называются его элементами.

Например, Смоленск является элементом множества всех городов Советского Союза; число 7 — элемент множества всех простых чисел; $3x + 2$ — элемент множества всех многочленов.

Обычно обозначают множества прописными (большими) буквами: A, B, M и т. п. А элементы множества чаще всего обозначают строчными (малыми) буквами: a, b, x, y, ... Выражение «m является элементом множества M» записывают короче следующим образом:

$$m \in M$$

(эта запись читается еще так: «m принадлежит M», «m из M»). Иногда пишут также: $M \ni m$ («M содержит m»). Знаки $\in$ и $\ni$ называют «знаками включения».

Например, если m — школьник Петя Футболистенко, а M — футбольная команда «Решето», то запись «$m \in M$» означает, что Петя — игрок команды «Решето».

Употребляется также запись вида

$$n \overline{\in} M.$$

Она читается так: «n не принадлежит M». Например, если n — это школьник Коля Шахматистов, а M — та же команда «Решето», то запись $n \overline{\in} M$ означает, что Коля не член этой команды.

Может случиться, что каждый элемент одного множества (A) является также элементом другого множества (B). Тогда говорят, что множество A — «ч а с т ь», или «п о д м н о ж е с т в о», множества B, и пишут: $A \subset B$ (читается так: A принадлежит B) или $B \supset A$ («B содержит A»). Например, множество всех смоленских школьников (A) является частью множества всех школьников нашей страны (B). Знаки «$\subset$» и «$\supset$» также называют «знаками включения». Запись $A \overline{\subset} B$ означает: «A не часть множества B». Например, если A — множество всех городов России, а B — множество всех городов Европы, то $A \overline{\subset} B$ и $B \overline{\subset} A$.

Нам нужно еще договориться, когда будем два множества считать равными. Например, множество $A = \{1, 3, 5, 7\}$ (т. е. множество, составленное из чисел 1, 3, 5, 7) и множество $B = \{5, 3, 7, 7, 1\}$ равны или нет? Два множества A и B считаются р а в н ы м и, если они содержат одни и те же элементы (т. е. если каждый элемент одного из них является элементом другого, и наоборот). По этой причине приведенные выше два множества $\{1, 3, 5, 7\}$ и $\{5, 3, 7, 7, 1\}$ равны.

2. Следует учесть расхождение между «житейским» и математическим употреблением выражения «множество». Когда нематематики говорят «множество», то они имеют в виду «большое число объектов». Например, когда они сообщают, что «болельщиков на стадионе было множество», то это, наверное, уже означает, что стадион был набит битком. В математике же допускается, чтобы множество содержало и мало элементов — скажем, два элемента или даже один элемент. Например, можно говорить о множестве общих точек прямой и окружности. Оно будет содержать два элемента (две точки), если эти линии пересекаются, и лишь одну точку, если они касаются.

В математике оказывается удобным рассматривать и такие множества, которые вовсе не содержат никаких элементов. Вы скажете: какие же это множества, если они ничего не содержат? И зачем это нужно их рассматривать?

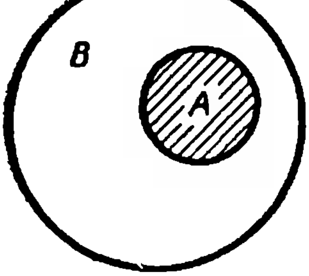


Рис. 49.

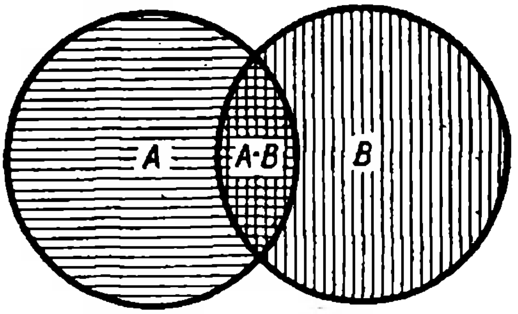


Рис. 50.

Говоря о множестве объектов, обладающих каким-нибудь свойством, можем заранее не знать, существуют ли в действительности такие объекты. Например, говоря о множестве «снежных людей в Гималаях», мы не знаем, существуют ли в действительности «снежные люди». Как же быть в подобных случаях? Оговаривать каждый такой случай особо? Это представляет некоторое неудобство.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называют **пустым** множеством. Например, множество всех трехлетних мальчиков, обучающихся в X классе, — пустое множество. Множество всех целых корней уравнения $x^2 + 1 = 0$ тоже пустое.

3. Схемы Эйлера — Венна. Для рассуждений о множествах полезно привлечь наглядные схемы, впервые предложенные еще в XVIII веке известным математиком Леонардом Эйлером. В XIX веке такие схемы успешно применял английский логик Джон Венн. Эйлер предложил наглядно изображать каждое множество в виде круга[1] (размеры и положение круга не играют роли). Если A — часть множества B, то круг, изображающий множество A, располагается внутри круга, изображающего множество B (рис. 49). Если какие-нибудь два множества имеют общие элементы (но не совпадают и одно не является частью другого), то соответствующие им круги Эйлера должны частично перекрываться (рис. 50).

1. Пусть A — множество всех школьников вашей области, B — множество всех школьников России, C — множество всех школьников Европы, D — множество учащихся VII класса вашей школы. Изобразите эти множества с помощью кругов Эйлера.

2. Пусть A — множество всех натуральных чисел, B — множество всех целых чисел, C — множество всех четных натуральных чисел, D — множество всех простых чисел. Изобразите эти множества с помощью кругов Эйлера.

---

[1] Вместо круга можно брать любую другую плоскую фигуру, например, квадрат, полукруг и т. п.

3. Пусть M — множество (всех) выпуклых многоугольников, C — множество выпуклых четырехугольников, K — множество квадратов, P — множество прямоугольников, T — множество всех треугольников. Изобразите эти множества в виде кругов Эйлера.

4. В ряде случаев выгодно воспользоваться тем, что множества, оказывается, можно «складывать», «умножать», «вычитать». Как же это делается?

Представим себе, что имеются два множества A и B. Их п е р е с е ч е н и е м (иногда говорят — п р о и з в е д е н и е м) называется множество всех их общих элементов. Оно обозначается так: $A \cdot B$ или $A \cap B$. Например, если A — множество дней недели, когда в отделении милиции дежурил милиционер Иванов, а B — множество дней недели, в которые дежурил милиционер Петров, то $A \cdot B$ — множество всех таких дней недели, когда они оба дежурили. Если A — множество всех тех школьников нашего города, которые знают английский язык, B — множество школьников нашего города, которые знают немецкий язык, то $A \cdot B$ — множество всех школьников нашего города, знающих оба языка.

Рассмотрим еще несколько примеров.

4. Если окружность и прямая касаются, то какая фигура является их пересечением?

5. A — множество простых делителей числа 30, B — множество простых делителей числа 42. Что собой представляет $A \cdot B$?

6. A — множество всех ромбов, B — множество всех прямоугольников. Что собой представляет их пересечение?

7. Чем (какой фигурой) может оказаться пересечение двух прямых на плоскости?

О б ъ е д и н е н и е м (иногда говорят — с у м м о й) двух множеств A и B называют такое множество, которое составлено из всех элементов обоих множеств A и B. Оно обозначается так: $A + B$ или $A \cup B$.

Так, в приведенном выше примере с милиционерами множеством $A + B$ будет множество дней недели, когда дежурит хотя бы один из двух милиционеров (то есть либо Иванов, либо Петров, либо и Иванов, и Петров).

А вот другой пример. Пусть
$A = \{1, 3, 7\}$, $B = \{20, 3, 1\}$. Тогда $A + B = \{1, 3, 7, 20\}$.

Обратите внимание на то, что в сумме $A + B$ каждый элемент берется лишь в одном экземпляре, даже если он принадлежит и A, и B (как число 3 в нашем примере).

Рассмотрим еще несколько примеров.

8. A — множество простых делителей числа 30, B — множество простых делителей числа 42. Что собой представляет $A+B$?

9. Начерчен отрезок MN длиной 2 *см*. Рассматривается на плоскости множество всех вершин таких равнобедренных треугольников с основанием MN, площади которых не меньше, чем 1 *см*^{2}. Это множество является объединением двух хорошо известных вам фигур. Каких?

Определим еще понятие р а з н о с т и двух множеств. Под р а з н о с т ь ю $A \setminus B$ (пишут *косой* минус) множеств A и B понимают множество тех элементов из A, которые не попадают в B (при этом необязательно, чтобы B содержалось в A). В приведенном выше примере с милиционерами $A \setminus B$ будет означать множество таких дней недели, когда дежурит милиционер Иванов, но не дежурит Петров; а $B \setminus A$ означает множество дней недели, когда Петров дежурит один, без Иванова.

В том случае, когда $B \subset A$, разность $A \setminus B$ записывают так: $A - B$; ее тогда называют д о п о л н е н и е м множества B до множества A.

5. Рассмотренные выше действия над множествами можно себе представить наглядно с помощью кругов Эйлера. Если множество A (рис. 50) изобразить в виде круга, заштрихованного горизонтальными линиями, а B — в виде круга, заштрихованного вертикальными линиями, то $A \cdot B$ наглядно изобразится в виде части плоскости,которая заштрихована дважды; а $A+B$ на нашей схеме — это вся заштрихованная часть плоскости. Разность $A \setminus B$ на нашем чертеже представлена той частью круга A, который пройден горизонтальной, но не вертикальной штриховкой. Аналогичный смысл имеет $B \setminus A$.

Используя эти наглядные схемы, можно облегчить себе решение некоторых задач.

10. Во время опроса в одном американском городке оказалось, что из 800 опрошенных жителей 430 читают газету «Сан», 220 — газету «Стар», 180 читают обе газеты. Сколько человек из числа опрошенных не читают ни одной из этих газет?

11. В одной деревне в Армении каждый житель говорит либо по-армянски, либо по-русски, либо на обоих языках. 90% жителей говорят по-армянски, 70% — по-русски. Сколько процентов всего населения деревни говорят на обоих языках?

6. Приведенные выше определения для пересечения и объединения множеств можно перенести на *любое число* множеств A, B, C, ...: их пересечением (или произведением) называется множество всех их общих элементов, а их объединением (или суммой) называют множество, составленное из всех таких элементов, которые принадлежат хотя бы одному из данных множеств A, B, C, ... Пересечение и объединение трех множеств обозначают соответственно так: $A \cdot B \cdot C$ или $A \cap B \cap C$; $A + B + C$ или $A \cup B \cup C$.

Аналогичные обозначения применяются и в случае большего числа множеств. Понятно, что и в этих случаях полезны наглядные диаграммы Эйлера.

12. В одной школе из 73 десятиклассников 26 занимаются в радиокружке, 18 — в математическом кружке, 24 — в физическом; 23 человека не занимаются ни в каких кружках. Из членов физического кружка 10 занимаются еще в математическом кружке и 6 — в радиотехническом; есть только один школьник, который посещает все 3 кружка. Есть ли, кроме него, кто-нибудь, кто занимался бы и в математическом и в радиотехническом кружках?

*13. Будем себе представлять каждый прямоугольник как множество, а именно — как множество всех точек, принадлежащих его контуру или лежащих внутри него. Какую фигуру образует пересечение всех прямоугольников, вписанных в окружность? а их объединение?

**14. Каждый треугольник мы себе будем представлять как множество точек, лежащих внутри этого треугольника или на его границе. Что собой представляет пересечение всех правильных треугольников, вписанных в данную окружность?

Что собой представляет объединение этих треугольников?

7. Равночисленные множества. Вообразим себе, что имеются каких-нибудь два данных множества, и нас интересует, в каком из них больше элементов.

Вот, например, вы видите на площади большой отряд солдат, которым привезли винтовки. Как узнать, чего больше — винтовок или солдат? Казалось бы, надо подсчитать, сколько всего солдат, потом подсчитать, сколько всего винтовок, и сравнить полученные числа—тогда получим ответ на наш вопрос. Но можно было бы получить ответ на тот же вопрос и без подсчитывания: если каждый солдат взял бы по одной винтовке, то легко было бы ответить, какое из множеств больше; если бы остались солдаты без винтовок, то солдат больше: если не все винтовки были бы разобраны, то, значит, винтовок больше, чем солдат. И, наконец, если каждый солдат взял бы по одной винтовке и при этом каждая винтовка оказалась бы у одного из солдат, то это означало бы, что солдат и винтовок одинаковое число. В последнем случае мы можем сказать, что установили *соответствие* между множеством солдат и множеством винтовок, и притом *взаимно однозначное*: каждому солдату сопоставлена взятая им винтовка, и притом только одна, и каждая винтовка оказалась сопоставленной одному солдату, взявшему эту винтовку.

В случае произвольных двух множеств A и B говорят, что между ними *установлено взаимно однозначное соответствие*, если каждому элементу a из A сопоставлен элемент b из B, и притом так, что каждый элемент из B обязательно сопоставляется какому-либо элементу из A, и притом только одному.

Если между двумя множествами возможно установить взаимно однозначное соответствие, то говорят, что они эквивалентны (или равночисленны).

Рассмотрите следующие примеры.

15. Прибыла партия сапог, все сорокового размера. Но по чьей-то оплошности сапоги оказались перемешанными. Как узнать, не считая, одинаковое ли здесь число левых и правых сапог?

16. Каждому континенту на Земле сопоставим первую букву его названия. Будет ли это соответствие взаимнооднозначным?

17. Каждому ученику вашей школы сопоставим номер класса, в котором он учится. Будет ли это соответствие взаимнооднозначным?

***8. Бесконечные множества.** Часто мы имеем дело с множествами из конечного числа элементов (или конечными множествами). Таковы, например, множество всех учащихся вашего класса, или вашей школы, или даже всех школ Земли. Подсчет числа его элементов состоит в том, что мы устанавливаем взаимнооднозначное соответствие между этим множеством и отрезком натурального ряда от 1 до какого-то номера n. Если же взять часть конечного множества M, которая не совпадает со всем множеством, то она не будет эквивалентна всему этому множеству M. В школьном курсе математики вам уже приходилось встречаться и с бесконечными множествами. Таковы, например, множество всех натуральных чисел, множество всех точек на прямой, множество всех точек на отрезке.

Лет сто назад немецкий математик Георг Кантор задумался над таким вопросом: следует ли считать все бесконечные множества равночисленными? А если не следует, то какие следует считать равночисленными и какие не равночисленными? Например, множество всех целых чисел и множество всех точек на отрезке $\left[0, \frac{1}{1000000}\right]$ — это равночисленные множества или нет? А если нет, то в каком из них «больше» элементов?

Пожалуй, наиболее естественно, решил Кантор, сохранить здесь те же определения, что и в случае конечных множеств: если между двумя бесконечными множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то их следует считать равночисленными (чаще говорят — равномощными); если же они не эквивалентны, но одно из них (скажем, A) эквивалентно части другого множества (B), то естественно считать, что в множестве A меньше элементов, чем в B[1] (хотя в обоих множествах элементов бесконечно много).

Хотя эти определения вполне естественны, они приводят к выводам, которые кажутся парадоксальными.

Рассмотрите несколько примеров.

18. Каких натуральных чисел больше: нечетных или четных?

19. Каких чисел больше: четных натуральных чисел или всех натуральных чисел?

20. Каких чисел больше: натуральных или целых?

21. Докажите, что множество всех точек отрезка длиной в 1 *см* и множество всех точек отрезка длиной в 1 *дм* равночисленны.

22. Докажите, что множество всех точек интервала длиной в одну миллионную долю миллиметра и множество всех точек бесконечной прямой равночисленны.

Если множество равночисленно множеству всех натуральных чисел, то оно называется счетным. Так, например, счетными являются такие множества: множество всех четных чисел; множество всех точных квадратов (то есть квадратов натуральных чисел); множество всех целых чисел.

23. На координатной плоскости рассматриваются всевозможные точки, у которых обе координаты—натуральные числа. Будет ли это множество счетным?

24. На координатной плоскости рассматриваются всевозможные целочисленные точки; то есть такие, у которых обе координаты — целые числа. Будет ли это множество счетным?

Обратимся теперь к множеству рациональных чисел, то есть несократимых дробей вида $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа. Если такие дроби располагать в порядке возрастания, то не удастся занумеровать все эти числа. Но оказывается, что существуют способы, позволяющие занумеровать все без исключения рациональные числа. Один из этих способов опирается на рассмотрение задач 23—24.

25. Докажите, что множество всех положительных рациональных чисел счетно.

26. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

---

[1] Чаще говорят: мощность множества A меньше мощности множества B.

Рассмотрим теперь всевозможные числа, которые получаются из целых чисел путем последовательного применения действий сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения корня; причем эти действия можно выполнять в любом порядке и любое число раз. Такими числами будут, например:

$$\frac{7}{13},\ \sqrt{2},\ \sqrt[4]{\frac{3}{7}},\ \frac{\sqrt{8-3\sqrt[3]{5}}}{12}+\sqrt{11}.$$

Сколько же будет всего таких чисел? Можно ли все такие числа занумеровать с помощью натуральных чисел? Кантор обнаружил, что множество всех таких чисел тоже счетно!

Возникает вопрос: а существуют ли множества, которые не являются счетными? Оказывается, что существуют. Кантор показал, что множество всех точек любого отрезка несчетно. Это значит, что каким бы способом мы ни пытались перенумеровать все точки отрезка, нам это сделать не удастся: не хватит номеров!

К рассмотрению множеств мы еще вернемся позднее (гл. VII, § 1, п. 3).

§ 2. АЛГОРИТМЫ

1. Наряду с понятием «множество», одним из наиболее важных в современной математике является понятие «алгоритм». Разъясним смысл этого понятия и рассмотрим отдельные примеры.

В каждой задаче на вычисление имеются какие-то данные и сказано, что именно ищется. Кроме того, само собой подразумевается, что мы умеем выполнять какие-то операции (вычисления, построения и т. п.).

Например, в задаче «Найти сторону квадрата, если его площадь равна 32,49 *м*²» *дана площадь* квадрата, *ищется* его *сторона* и, кроме того, предполагается, что мы умеем извлекать квадратные корни из чисел.

Сходным образом обстоит дело в задачах на построение: даны какие-то фигуры, ищется какая-то новая фигура (та, которую требуется построить) и подразумевается (или явно сказано), какими операциями мы можем пользоваться. Например, пусть требуется «через данную точку провести касательную к данной окружности». Здесь *даны* две фигуры — *окружность* и *точка*, *ищется* некоторая *прямая* (проходящая через данную точку и касающаяся данной окружности), и притом подразумевается (или сказано), какие операции допустимы, например, операции, выполнимые циркулем и линейкой.

Часто в курсе математики, решая какую-либо задачу, на самом деле решают целую *серию однотипных задач*, так как допустимо, — не изменяя условия задачи, — изменять исходные данные. Например, в приведенной выше задаче о построении касательной к данной окружности мы можем предполагать, что окружность имеет *любой диаметр*, а точка может быть расположена от нее на *любом* расстоянии (лишь бы она была вне окружности).

Таким образом, мы имеем дело с задачей, в которой исходные данные могут изменяться в весьма широких пределах. В подобных случаях иногда говорят, что рассматриваемая задача является *«массовой»* (или задачей с изменяемыми начальными данными).

Алгоритм — это рецепт для решения «массовой» задачи. Точнее говоря, а л г о р и т м — *это точное предписание* о той *последовательности операций, которые следует выполнить над данными, чтобы получить искомый результат.*

Алгоритмы часто задаются с помощью формулы; при этом подразумеваем, что мы умеем выполнять все указанные в формуле операции и что задана (или подразумевается) та очередность, в которой следует выполнять эти операции. Например, для нахождения корней квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

пользуются формулой

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Из нее видно, что при любом выборе исходных данных (то есть коэффициентов p и q) можно получить искомые корни, пользуясь следующим предписанием (алгоритмом).

1 - й ш а г. Разделить коэффициент p пополам;

2 - й ш а г. Результат первого шага умножить на —1 (получим $-\frac{p}{2}$);

3 - й ш а г. Возвести число, полученное на втором шаге, в квадрат (получим $\left(\frac{p}{2}\right)^2$);

4 - й ш а г. Из результата 3-го шага вычесть коэффициент q;

5 - й ш а г. Из результата 4-го шага извлечь квадратный корень;

6 - й ш а г. К результату 2-го шага прибавить результат 5-го шага (получим x_1);

7 - й ш а г. Из результата 2-го шага вычесть результат 5-го шага (получим x_2).

Далеко не всякий алгоритм порождается числовой формулой. Например, алгоритм построения циркулем и линейкой касательных к данной окружности $\omega(O, R)$ из данной точки A, лежащей вне окружности, состоит из последовательности простейших построений:

1 - й ш а г. На отрезке OA как на диаметре строим окружность γ.

2 - й ш а г. Отмечаем точки B_1 и B_2 пересечения окружностей γ и ω.

3 - й ш а г. Строим прямые AB_1 и AB_2. Они являются искомыми касательными.

Отметим основные особенности каждого алгоритма:

1. О п р е д е л е н н о с т ь: точность предписания не оставляет места для произвола при выполнении последовательных шагов, образующих алгоритм.

2. М а с с о в о с т ь: алгоритм дается не для одного какого-либо набора данных, а для всевозможных допустимых наборов исходных данных.

3. Р е з у л ь т а т и в н о с т ь: пользуясь алгоритмом, мы, отправляясь от любого допустимого набора исходных данных, после к о н е ч н о г о числа шагов обязательно получим то, что требуется найти в задаче.

Само слово «алгоритм» имеет любопытное происхождение. Более тысячи лет назад, в 825 году, Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми издал книгу по математике, которая пользовалась в течение нескольких столетий широкой популярностью. Она была переведена и на латинский язык. При переводе имя автора переделали в Алгоритми. В книге аль-Хорезми приводились многочисленные рецепты для решения различных задач. Ссылки на такие рецепты из книги аль-Хорезми европейские авторы обычно начинали со слов: «Так говорил Алгоритми. . .» (по-латыни: «*Dixit Algorithmi...*»). С течением времени сами рецепты для решения математических задач стали называть алгоритмами.

Вся школьная и вся высшая математика наполнены алгоритмами.

В *арифметике* мы пользуемся алгоритмами для сложения многозначных чисел, для умножения многозначных чисел, для нахождения наибольшего общего делителя или наименьшего общего кратного двух чисел, и т. д.

В *алгебре* мы пользуемся алгоритмами для извлечения квадратного корня из чисел, для деления многочлена на многочлен и т. п. В геометрии решение *каждой* задачи на построение содержит алгоритм, дающий последовательность шагов для построения искомой фигуры.

Рассмотрим несколько задач на применение алгоритмов.

1. Эйлеру принадлежит следующая задача: обойти конем все клетки шахматной доски, побыв в каждой клетке только по одному разу. При этом доска не обязательно содержит 64 клетки — это может быть произвольная прямоугольная доска, разделенная на $m \times n$ одинаковых клеток. При некоторых m и n задача может даже оказаться неразрешимой (например, при $m = n = 3$).

Частные решения этой задачи нашли Эйлер, Вандермонд, Бертран и другие. В 1823 году некто Варнсдорф издал брошюру «Простейшее и наиболее общее решение задачи о ходе коня», в которой предлагает алгоритм для решения задачи Эйлера (если при избранных m и n оно вообще существует). Будем полагать, что клетки каким-нибудь образом занумерованы (например, так, как на рисунке 51); клетки, в которых конь уже побывал, будем перечеркивать. Алгоритм Варнсдорфа таков: на каждом ходе (включая первый ход) ставь коня в такую клетку, из которой можно совершить наименьшее число прыжков на ранее еще не пройденные (не перечеркнутые) клетки. Если таких клеток «с наименьшим числом прыжков» не одна, а несколько, то выбери из них любую[1]. Если вовсе нет непройденных клеток, в которые конь может попасть на очередном ходе, то конь обошел всю доску (если обход вообще возможен каким-либо способом).

64	63	62	61	60	59	58	57
49	50	51	52	53	54	55	56
48	47	46	45	44	43	42	41
33	34	35	36	37	38	39	40
32	31	30	29	28	27	26	25
17	18	19	20	21	22	23	24
16	15	14	13	12	11	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8

Рис. 51.

Пользуясь этим алгоритмом, обойдите обычную 64-клеточную шахматную доску.

2. Играют двое. Вначале они вместе выбирают какое-то число n (например, $n = 100$, 380 и т. п.). Потом первый может назвать любое число, но не большее, чем 10. После этого второй игрок увеличивает это число, но не больше, чем на 10; затем первый увеличивает число, названное вторым, но не больше, чем на 10, и т. д. Выигрывает тот, кто первый назовет число n. Придумайте алгоритм, который позволил бы первому игроку выиграть[2].

3. Каждый *лабиринт* состоит из какого-то числа коридоров и площадок, которые служат концами коридоров. Схематично можно любой лабиринт представить в виде совокупности какого-то числа отрезков (не обязательно прямолинейных), изображающих коридоры, и точек, служащих концами этих отрезков (эти точки изображают площадки, см. рис. 52); предполагается, что можно от любой площадки до любой другой площадки добраться по некоторой цепочке коридоров. Площадки могут быть двух родов:

а) либо это *тупик*, то есть к ней ведет только один коридор;

б) либо это *перекресток*, то есть к площадке ведут несколько (не менее двух) коридоров.

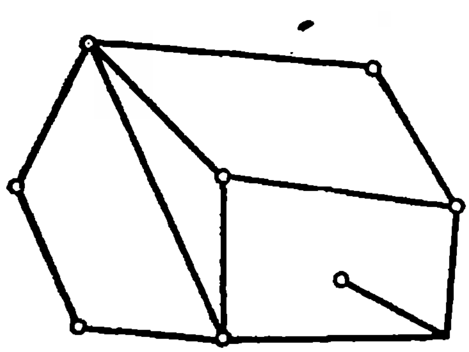


Рис. 52.

Примером лабиринта может служить сеть улиц какого-либо города.

Французский инженер Тремó указал алгоритм, позволяющий обойти любой лабиринт, и притом

[1] Для определенности (ведь каждый алгоритм должен обладать определенностью) ту, которая имеет наименьший номер.

[2] При условии, что n не кратно 11.

так, чтобы по каждому коридору пройти в точности два раза. Вот в чем заключается этот алгоритм:

№ 1. Отметь начальную площадку, с которой ты начинаешь обход лабиринта.

№ 2. От начальной площадки отправляйся по любому коридору[1] и иди по нему покане дойдешь до какой-либо другой площадки.

№ 3. При прохождении коридора отметь его.

№ 4. Придя по какому-либо коридору на какую-либо площадку, отметь ее.

№ 5. Затем выясни, сколько раз проходил ты по этому коридору и был ли ты раньше на этой площадке.

№ 6. Если ты по коридору прошел впервые и пришел на площадку, на которой раньше не был, отправляйся от этой площадки по ближайшему справа коридору, по которому ранее не ходил. Если такого коридора нет (тупик), то вернись по коридору, по которому пришел.

№ 7. Если ты по коридору прошел 1 раз и подошел к площадке, на которой раньше уже был, вернись обратно по тому же коридору.

№ 8. Если ты прошел по коридору дважды и пришел на какую-либо площадку, то пойди далее по ближайшему справа от тебя коридору, по которому ранее не ходил.

№ 9. Если такого коридора нет, то пойди по ближайшему справа от тебя коридору, по которому ранее проходил 1 раз.

№ 10. Если и такого коридора нет, то прекрати обход лабиринта. Ты уже обошел все коридоры лабиринта, и притом каждый коридор—дважды.

Нарисуйте какой-нибудь лабиринт и обойдите его, пользуясь алгоритмом Тремó.

4. В III веке до нашей эры греческий математик Эратосфен дал алгоритм для нахождения всех простых чисел, меньше наперед заданного числа n. Этот алгоритм («решето Э атосфена») можно так сформулировать.

Указание 1. Выпиши все натуральные числа от 1 до n.

Указание 2. Зачеркни число 1.

Указание 3. Подчеркни наименьшее из неотмеченных[2] чисел.

Указание 4. Вычеркни все числа, кратные подчеркнутому на предыдущем шаге.

Указание 5. Проверь, имеются ли еще какие-либо неотмеченные числа. Если неотмеченных чисел нет, то подчеркнутые числа — это все простые числа между 1 и n, задача ре-

[1] Чтобы придать этому указанию определенность, будем его понимать следующим образом: если прямо перед тобой есть вход в какой-либо коридор, то отправляйся по этому коридору; если же нет, то поворачивайся против часовой стрелки до тех пор, пока прямо перед тобой не окажется вход в коридор—по этому коридору ты и отправляйся.

[2] В дальнейшем слово «отмеченное» означает «зачеркнутое или подчёркнутое».

шена. Если же имеются еще неотмеченные числа, то перейди к указанию 3.

Пользуясь алгоритмом Эратосфена, выберите все простые числа, которые меньше 100.

Если для решения какой-либо задачи известен алгоритм, то решить задачу может даже такой человек, который не понимает условия задачи — лишь бы он понимал, как выполнить каждое указание алгоритма. Например, человек может не знать, что такое простое число, но он успешно справится с задачей составления таблицы всех трехзначных простых чисел, если он будет пользоваться алгоритмом Эратосфена.

Это обстоятельство очень существенно. Ведь если можно решение задачи поручить человеку, который эту задачу не понимает, то можно то же самое поручить и вычислительной машине — лишь бы она была в состоянии выполнить алгоритм, приводящий к решению. Алгоритм (для решения какой-либо задачи), записанный в форме, доступной машине, обычно называют **программой**, а каждое указание такого алгоритма — **командой**.

§ 3. ТЕОРЕМЫ: ПРЯМАЯ, ЕЙ ОБРАТНАЯ И ПРОТИВОПОЛОЖНАЯ

1. Высказывания. Под высказыванием понимаем всякое предложение, о котором имеет смысл сказать, что оно истинно или оно ложно. Вместо слова «высказывание» можно употреблять выражения: «суждение», «утверждение» и т. п.

В дальнейшем мы нередко будем целое высказывание обозначать одной буквой, например, A, B, C, ..., a, b, c, ...

Приведем несколько примеров высказываний: «Дважды два равно пяти»; «Три медианы треугольника имеют общую точку»; «Солнце восходит на востоке».

Располагая каким-то высказыванием a, можно построить новое высказывание — **отрицание** высказывания a (оно обозначается так: $\overline{a}$). **Отрицанием** высказывания a называется такое высказывание $(\overline{a})$, которое ложно, если высказывание a истинно, и истинно, если a ложно.

Умение правильно строить отрицания к данным высказываниям в различных равносильных формах — весьма полезный навык для каждого, кому приходится проводить математические рассуждения.

1. Постройте отрицания следующих высказываний:
а) треугольник ABC — прямоугольный; б) эта бумага — белая.

Располагая двумя (или несколькими) высказываниями a и b, можно строить новые, более сложные высказывания, объединяя данные высказывания или их отрицания словами: «и», «или», «если..., то», «либо..., либо...» и др.

Например, пусть имеются высказывания:

а) «Днем я приготовлю уроки», б) «Вечером я пойду в кино».

Из них можно образовать новые, составные высказывания:

«Днем я приготовлю уроки, и вечером я пойду в кино»; «Если я днем приготовлю уроки, то вечером я пойду в кино»; «Либо днем я приготовлю уроки, либо вечером не пойду в кино», и т. д.

2. Теорема и ее составные части. В школьном курсе математики мы часто встречаемся с теоремами, то есть высказываниями, истинность которых устанавливается на основании некоторого рассуждения (которое называется доказательством).

Каждая теорема содержит условие и заключение. Правда, эти части теоремы не всегда бывают отчетливо выделены.

Например: «диагонали ромба взаимно перпендикулярны».

Очень важно уметь выделять условие и заключение, то есть представить теорему в так называемой силлогистической форме:

Если A (условие), *то B* (заключение).

В нашем примере: если четырехугольник ромб, то диагонали его взаимно перпендикулярны.

2. Выделите в следующих теоремах условие и заключение:

а) внешний угол треугольника больше всякого внутреннего угла, не смежного с этим внешним углом;

б) число, сумма цифр которого делится на 3, само делится на 3;

в) биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника;

г) квадрат всякого четного числа является четным числом;

д) около всякого треугольника можно описать окружность.

Не всякое сформулированное предложение, в котором есть условие и заключение, обязательно верно. Именно поэтому и возникает необходимость в доказательстве.

Вспоминается забавный случай, происшедший с известным французским математиком Коши, который долго и безуспешно объяснял молодому благовоспитанному графу доказательство одной теоремы. Граф долго не мог ничего понять. Доведенный до отчаяния Коши воскликнул: «Теорема верна! Клянусь честью!»

«Ах, маэстро, — галантно ответил граф, — почему же вы не сказали так с самого начала? Ведь я никогда не позволил бы себе сомневаться в честном слове столь уважаемого человека».

Математики придерживаются другой точки зрения: теорема может быть признана истинной только тогда, когда она доказана.

3. Опровержение ложных высказываний. В школьных учебниках и задачниках приводятся обычно только истинные высказывания, и задача ученика сводится к тому, чтобы либо усвоить их доказательства по учебнику, либо самому построить такие доказательства.

Иначе обстоит дело в научном исследовании, когда исследователю самому приходится формулировать новые суждения. Предложение может оказаться как истинным, так и ложным.

Если доказать это предложение не удается, то может возникнуть подозрение, что оно ошибочно, и тогда естественно попытаться предложение *опровергнуть*.

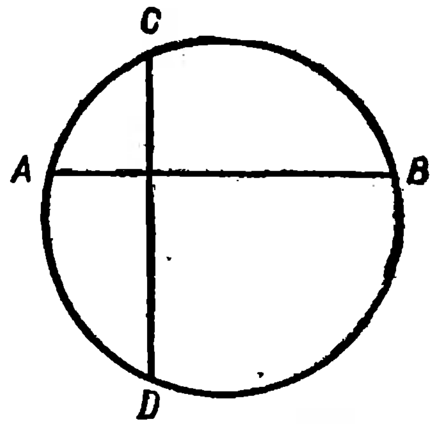


Рис. 53.

Заметим сначала, что в математической теореме говорится не об *одном* объекте, а почти всегда о *бесконечном множестве* каких-то объектов. Например, в теореме «Равносторонний треугольник является равноугольным» мы имеем в виду *не какой-нибудь один выбранный*, вполне определенный равносторонний треугольник, а *любой* равносторонний треугольник; утверждение делается для всех без исключения равносторонних треугольников, которые когда-либо, где-либо, кому-либо встречались в прошлом или встретятся в будущем.

Такое понимание смысла теоремы подсказывает путь, как обнаружить ошибочность какой-нибудь сформулированной (но не доказанной) теоремы.

Теорема считается правильной (истинной) только тогда, когда для *каждого* объекта, о котором говорится в условии теоремы, верно также заключение теоремы; если же в миллиарде случаев или даже бесконечном числе случаев это так, а хотя бы в *одном* — не так, то теорема уже считается ошибочной!

Следовательно, чтобы опровергнуть математическую теорему (то есть показать, что она неверна) вполне достаточно показать, что она ошибочна в одном каком-нибудь частном случае; иными словами — достаточно построить один *опровергающий пример* (*контрпример*).

Рассмотрим простейший пример. Один школьник сформулировал такое предложение: «Если хорды AB и CD одной и той же окружности взаимно перпендикулярны, то концы хорды AB расположены по разные стороны от прямой CD».

Можно привести громадное число случаев, когда при конкретных выборах взаимно перпендикулярных хорд AB и CD действительно дело будет обстоять так, как об этом говорится в заключение предложения. Один такой случай изображен на рисунке 53, и без труда можно привести любое число таких случаев. Но сколько мы ни привели бы таких конкретных случаев, этого еще будет мало, чтобы указанное предложение могло считаться истинным.

Приведение же одного контрпримера полностью доказывает, что предложение ошибочно. Такой пример приведен на рисунке 54. Следовательно, полностью доказано, что данное предложение неверно.

Рассмотрим несколько задач.

3. Опровергните следующие предложения: а) «Во всяком равнобедренном треугольнике каждый угол при основании равен 60°»; б) «Если сторона и два угла одного треугольника равны стороне и двум углам другого треугольника, то эти треугольники равны».

4. Докажите или опровергните: а) Четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями является ромбом; б) В выпуклом многоугольнике с нечетным числом сторон все медианы имеют общую точку[1].

5. Докажите, что следующие предложения ошибочны: а) «Если в четырехугольнике один угол прямой, а диагонали равны, то он прямоугольник».

б) «В выпуклом четырехугольнике сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри его, до его сторон, есть величина постоянная».

в) «Если у четырехугольника диагонали взаимно перпендикулярны и равны, то у него имеются равные стороны».

6. Индийский математик Брамагупта (VII в. н. э.) по аналогии с формулой Герона для площади треугольника высказал предположение, что площадь произвольного четырехугольника может быть вычислена по следующей формуле

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

(где a, b, c, d —стороны четырехугольника, p—полупериметр). Как можно опровергнуть гипотезу Брамагупты?

7. Опровергните следующие утверждения: а) «Если у многогранника все грани—квадраты, то этот многогранник—куб», б) «Если у тетраэдра все грани равны между собой, то этот тетраэдр правильный».

4. Обратная теорема, противоположная теорема. Как известно, теорема называется обратной по отношению к данной (прямой) теореме, если ее условием является заключение данной теоремы, а заключением — условие данной теоремы.

Таким образом, если данная теорема имеет вид:

«Если A, то B»,

---

[1] Медианой многоугольника с нечетным числом сторон называется отрезок, соединяющий середину какой-либо стороны многоугольника с вершиной, противолежащей этой стороне. (Вершина C многоугольника с $2n+1$ сторонами называется противолежащей стороне AB, если ломаная, составленная из сторон многоугольника и соединяющая точку A (или B) с точкой C, содержит n звеньев.)

то обратной к ней будет теорема

«Если B, то A».

Противоположной теоремой по отношению к данной называют теорему

«Если не A, то не B».

Иными словами, условием противоположной теоремы служит отрицание условия данной теоремы, а заключением — отрицание заключения данной теоремы. Следует отметить, что нет теорем, которые сами по себе обратные (или противоположные). Теорема может быть обратной или противоположной лишь по отношению к какой-либо другой теореме. Например, из двух предложений:

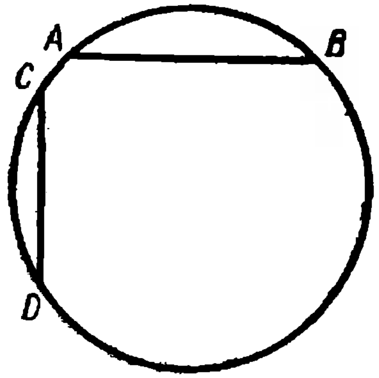


Рис. 54.

№ 1. «Если число является четным, то квадрат его является четным числом»;

№ 2. «Если число не является четным, то и квадрат его не является четным числом» — любое может быть принято в качестве прямой теоремы, и тогда по отношению к нему другое предложение является противоположной теоремой.

Нетрудно привести примеры, когда верна прямая теорема, а обратная (или противоположная) не верна, или прямая не верна, а обратная верна.

8. Сформулируйте для каждой из приведенных ниже теорем обратную. Верна ли она? Если считаете, что обратная теорема верна, то докажите ее; если думаете, что она не верна, то опровергните ее.

а) «Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то соответственные углы у этих треугольников равны»;

б) Теорема Пифагора;

в) «Диагонали параллелограмма точкой их пересечения делятся пополам»;

г) «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны»;

д) «Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна двум прямым»;

е) «Если $\alpha = 45°$, то $\operatorname{tg} \alpha = 1$»;

ж) «Если два треугольника равны, то две стороны и угол против одной из них в одном треугольнике равны двум сторонам и углу против одной из них в другом треугольнике»;

з) «Если прямая, проходящая через середину боковой стороны треугольника, параллельна основанию, то боковые стороны отсекают от этой прямой отрезок, равный половине основания»;

и) «В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны между собой»;

к) «Если можно построить треугольник по сторонам a, b, c, то $a < b + c$»;

л) «Если можно построить треугольник со сторонами a, b, c, то каждый из этих отрезков меньше суммы двух других».

Мы не знаем, верна или не верна данная (прямая) теорема, но знаем, что обратная ей теорема верна; верна ли теорема, противоположная данной? Часто школьники отвечают: «Не всегда». А это не верно! *Теорема, обратная данной, и теорема, противоположная данной, всегда одновременно либо обе верны, либо обе не верны.*

Например, прямая теорема: «Если число делится на 5, то оно оканчивается на 5» (теорема не верна). Обратная: «Если число оканчивается на 5, то оно делится на 5» (верна). И теорема, противоположная прямой, тоже верна. В самом деле: «Если число не делится на 5, то оно не оканчивается на 5».

9. Докажите равносильность обратной и противоположной теорем.

***10.** Докажите теорему (не смешивать прямую теорему с обратной!): ΔABC, углы которого удовлетворяют условию $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$, является прямоугольным.

11. В учебнике алгебры А. П. Киселева (ч. II, 1952 г., стр. 107) доказывается следующее предложение: «При основании, большем единицы, большему числу соответствует больший логарифм». Вот доказательство, приведенное в учебнике. «Мы видели, что при $a > 1$ функция a^y возрастает вместе с возрастанием y. Если обозначим два различных значения y через y_1 и y_2, соответствующие значения a^y — через x_1 и x_2, то будем иметь $a^{y_2} > a^{y_1}$, если $y_2 > y_1$, или $x_2 > x_1$, если $y_2 > y_1$. Но y_1 и y_2 являются соответственно логарифмами чисел x_1 и x_2. Значит, $x_2 > x_1$, если $\log_a x_2 > \log_a x_1$».

Как вы считаете, является ли приведенное рассуждение доказательством рассматриваемого свойства логарифмической функции?

Смешение прямого утверждения с противоположным или обратным встречается нередко и в нематематических рассуждениях. Иногда обнаружить такую логическую ошибку довольно трудно.

Приведем два упражнения.

12. Один профессор — герой сказки Андерсена — собрался поехать в страну, где живут людоеды. Правда, он знал, что людоеды едят добрых христиан. Но профессор считал, что для него путешествие безопасно — ведь он был плохим христианином.

В чем логическая ошибка такого вывода?

13. Один врач в своей книге о целебных свойствах воды «Мацеста» пишет: «Многие больные считают, что реакция обострения (т. е. ухудшение самочувствия больного во время приема мацестинских ванн) предсказывает хороший результат лечения. Но это далеко не так: у некоторых больных реакция обострения иногда совсем не появляется, хотя лечение приводит к хорошим результатам».

Усматриваете ли вы логическую ошибку в этом рассуждении? В чем она заключается?

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СПОСОБОМ «ОТ ПРОТИВНОГО»

С этим способом доказательства теорем вы уже встречались в школьном курсе геометрии. Сущность его состоит в следующем.

Если нужно доказать теорему

$$A \to B \quad (\text{«если } A, \text{ то } B\text{»}),$$

то можно поступить так:

1) строим высказывание $\overline{B}$, которое является отрицанием высказывания B;

2) показываем затем, что допущение об истинности высказывания $\overline{B}$ приводит к противоречию.

В чем же может проявиться это противоречие? Перечислим наиболее важные случаи:

1) допущение, что высказывания $\overline{B}$ и A одновременно истинны, противоречит какому-либо заведомо истинному высказыванию (аксиоме, определению, ранее установленной теореме), несовместимо с этим высказыванием; 2) высказывание $\overline{B}$ противоречит самому высказыванию A («условию») или (что случается значительно чаще) какому-либо следствию из условия A и заведомо истинных высказываний;

3) из высказываний $\overline{B}$, A и заведомо истинных высказываний удается вывести два предложения, которые друг другу противоречат.

Рассмотрим ряд примеров и задач.

1. Дайте своему товарищу или знакомому две монеты — трехкопеечную и двадцатикопеечную; предложите ему одну из них зажать в левый кулак, вторую — в правый, но так, чтобы вы не видели, какая монета оказалась в каком кулаке. Предложите ему затем проделать такие вычисления: число на монете, зажатой в левом кулаке, умножить на 2, а число на монете из правого кулака—на 3, сложить два полученных произведения, к результату прибавить 6. Пусть он скажет, сколько всего получилось (допустим, что получилось 55). После этого вы можете, рассуждая «от противного», узнать, в какой руке какая монета находится. Как вы будете рассуждать?

2. В одном отряде большинство составляли бреющиеся мужчины; остальные солдаты этого отряда были женщинами. Однажды солдат-парикмахер получил приказ командира: побрить всех тех, и только тех солдат-мужчин, кто не бреет себя сам. Парикмахер в точности выполнил приказ командира. Докажите способом «от противного», что парикмахер — женщина.

3. а) Сумма двух целых чисел равна 53. Докажите, что одно из слагаемых не меньше 27;

б) Сумма 10 рациональных чисел равна 62. Докажите, что хотя бы одно из чисел больше 6;

в) 50 лошадей разместили в 7 конюшнях; докажите, что хотя бы в одной конюшне больше 7 лошадей;

г) 99 лошадей разместили в 15 конюшнях; докажите, что хотя бы в одной конюшне нечетное число лошадей;

д) произведение трех положительных чисел равно 63. Докажите, что хотя бы одно из них меньше 4.

4. В одном городе не менее 20 000 жителей, все они принадлежат к 30 национальностям. Докажите, что среди них наверняка найдутся 600 человек одной и той же национальности.

(!) 5. До Галилея считалось очевидным, что скорость падения тела на землю тем больше, чем тяжелее тело (сопротивлением воздуха пренебрегаем). Галилей опроверг это утверждение путем рассуждения от противного. Для этой цели он предложил рассмотреть два камня—один большой и другой поменьше — и сначала рассмотреть случай, когда они падают врозь, а затем — когда падают вместе. Рассмотрев эти два случая, докажите правоту Галилея.

6. На складе было несколько сотен ящиков с яблоками трех сортов: белый налив, осенний полосатый и антоновка. В каждом ящике были яблоки только одного сорта. Часть ящиков была распродана. Осталось 28 ящиков. Можно ли, не открывая ящиков, утверждать, что среди них имеется не меньше 10 ящиков с яблоками одного и того же сорта? Докажите правильность своего вывода способом «от противного».

7. Докажите, что при целом n следующие дроби несократимы: а) $\frac{n}{2n+1}$; б) $\frac{n(n+1)}{2n+1}$.

8. Докажите, что в выпуклом многоугольнике не может быть более трех острых углов.

9. Можно ли, выйдя конем из нижнего левого угла шахматной доски, попасть в верхний правый угол, обойдя все клетки и в каждой побывав только один раз? Докажите правильность своего вывода способом «от противного».

*10. Докажите, что $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{3}$—иррациональные числа.

*11. Докажите, что дробь $\frac{a^2+b^2}{ac+bd}$ (a, b, c, d — целые числа) несократима, если $ad - bc = 1$.

*12. Проведена прямая c через середины оснований трапеции. Боковые стороны трапеции продолжены до их пересечения в точке P. Докажите способом «от противного», что P лежит на прямой c.

**13. Стороны $\triangle ABC$ связаны соотношением $a^3 = b^3 + c^3$. Докажите, что треугольник может быть только остроугольным.

**14. Докажите, что на клетчатой бумаге нельзя начертить равносторонний треугольник так, чтобы его вершины располагались в вершинах клеток.

15. Приведенное выше предложение из школьного учебника алгебры (гл. II, § 3, задача 11) докажите способом «от противного».

§ 5. ДОСТАТОЧНЫЕ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ

1. В математических рассуждениях часто встречаются *достаточные* и *необходимые* условия. Четкое понимание того, что это означает, умение самому выяснить, является ли какое-либо условие необходимым или достаточным, весьма полезно каждому, кто занимается математикой.

Пусть Φ и $У$ — два высказывания, например

Φ: « Треугольник ABC имеет два равных угла»;

$У$: «Треугольник ABC — равнобедренный».

Истинно ли высказывание Φ? Все зависит от того, каким выбран треугольник ABC. Аналогично обстоит дело для высказывания $У$.

Рассмотрим теперь теорему

$$У \to \Phi$$

(«Если верно $У$, то и Φ верно»).

Высказывание: «$У$ д о с т а т о ч н о для Φ» означает: «$У \to \Phi$». Более подробно: «Условие $У$ достаточно для заключения (или факта) Φ» означает, что верна теорема: «Каждый раз, когда выполняется условие $У$, имеет место заключение Φ».

Рассмотрим простой пример. Пусть Φ и $У$ имеют смысл, указанный выше. Выясним, верно ли утверждение:

«$У$ достаточно для Φ».

Последнее высказывание означает: «$У \to \Phi$», то есть: «Если треугольник ABC равнобедренный, то у него два угла равны». Эта теорема верна. Следовательно, условие: «Треугольник ABC равнобедренный» *достаточно* для заключения: «В $\triangle ABC$ два угла равны».

А вот другой пример. Выясним, верно ли утверждение: «Условие

«Один из углов треугольника ABC равен 30°»

достаточно для заключения («факта»):

«В $\triangle ABC$ два угла равны».

Для этого нужно рассмотреть теорему: «Если в $\triangle ABC$ один угол равен 30°, то в нем два угла равны». Эта теорема неверна. Значит, и предшествующее предложение неверно.

Если нужно решить, является ли сформулированное условие *У* достаточным для сформулированного заключения (факта) *Ф*, то удобно следовать такой укороченной схеме рассуждения: «Пусть выполнено условие *У*; тогда будет ли (обязательно) иметь место факт *Ф*? Если да, то достаточно... (то есть *У* является достаточным условием для *Ф*)».

Рассмотрим пример. Выясним, является ли условие

У: «Семиклассник Петя получил по всем предметам годовые оценки «4» достаточным для следующего заключения (факта) *Ф*: «По результатам успеваемости Петя будет переведен в VIII класс».

Рассуждаем по приведенной выше «укороченной схеме»: пусть условие *У* будет выполнено, то есть Петя получил по всем предметам оценку «4». Будет ли иметь место заключение *Ф*, то есть переведут ли Петю в VIII класс? Да, конечно. Значит, условие *У* достаточно для заключения *Ф*.

Сходными рассуждениями легко проверить, что для того же заключения *Ф* условие «Петя получил по истории годовую оценку «4» уже не является достаточным.

Рассмотрим следующее упражнение.

1. Выясните, будет ли для заключения

Ф: «Треугольник является тупоугольным»

достаточно следующее условие

У: «Два угла этого треугольника — острые».

Обычно и сам факт (то есть заключение) и достаточное условие объединяют в одно предложение, например: для того чтобы Петя перешел в VIII класс, достаточно, чтобы он получил по всем предметам оценку «4».

Или в общем случае:

«Для того чтобы имело место *Ф*, достаточно, чтобы выполнялось *У*».

Если нужно проверить, является ли такое предложение истинным, то выделите из него прежде всего заключение (факт) и условие. Рассмотрим примеры.

2. «Для того чтобы я находился в нашей школе, достаточно, чтобы я находился в ее физическом кабинете». Выделите здесь заключение (факт) и условие.

3. Середины сторон трапеции служат вершинами некоторого ромба. Достаточно ли этого условия, чтобы трапеция была равнобочной?

В интересующем нас факте *Ф* и в условии *У* может идти речь о свойствах какого-либо п р е д м е т а или множества предметов (скажем, о треугольниках с двумя равными углами). Тогда говорят, что условие дает п р и з н а к предмета, достаточное условие тогда называется достаточным признаком.

2. Теперь обратимся к рассмотрению необходимых условий. Выражение

«$У$ необходимо для $Ф$» означает, что верна теорема «нет $У \to$ нет $Ф$».

Подробнее: выражение «Условие $У$ необходимо для заключения (или факта) $Ф$» означает, что верна теорема: «Каждый раз, когда не выполняется условие $У$, не может иметь места заключение $Ф$».

Если нужно выяснить, является ли $У$ необходимым условием для $Ф$, то рассуждение удобно проводить по следующей укороченной схеме: «Пусть нет $У$, есть ли $Ф$? Если нет, то $У$ необходимо ... (то есть условие $У$ необходимо для факта $Ф$)».

Пример. Пусть $У$ и $Ф$ имеют такой смысл:

$У$: «Семиклассник Петя получит по истории положительную годовую оценку».

$Ф$: «Петю переведут в VIII класс».

Является ли $У$ необходимым условием для $Ф$?

Рассуждаем так: пусть условие $У$ не будет иметь места, то есть пусть Петя не получит положительную оценку по истории за VII класс; будет ли иметь место $Ф$, то есть переведут ли Петю в VIII класс? Ясно, что нет; значит, условие $У$ необходимо для $Ф$.

Рассмотрите самостоятельно такой пример:

4. Является ли условие «Диагонали данного четырехугольника взаимно перпендикулярны» необходимым для факта «Этот четырехугольник — ромб»?

Формулировку факта и необходимого условия (для этого факта) также обычно объединяют в одно предложение, например: «Для того чтобы семиклассник Петя перешел в VIII класс, необходимо, чтобы он получил положительную годовую оценку по истории».

При небольшой тренировке нетрудно выделить из подобных предложений заключение («факт») и условие.

Решите следующие задачи:

5. Для того чтобы натуральное число делилось на 5, достаточно ли, чтобы оно оканчивалось на 5? Будет ли это условие необходимым (для делимости числа на 5)?

6. Выясните: для того чтобы четырехугольник был ромбом, достаточно ли, чтобы одна из диагоналей служила биссектрисой одного из его углов? Будет ли это условие необходимым?

7. Какие из приведенных трех утверждений верны:

а) «для того чтобы число делилось на 4, достаточно, чтобы две последние цифры были восьмерками»;

б) «для того чтобы число делилось на 4, необходимо, чтобы оно оканчивалось четной цифрой»;

в) «для того чтобы число делилось на 4, необходимо, чтобы оно оканчивалось цифрой 8»?

8. а) Двум школьникам был задан вопрос: «В каком выпуклом многоугольнике диагонали равны между собой?» Один из них ответил: «В квадрате».

Содержит ли этот ответ достаточный признак интересующих нас многоугольников?

б) Второй школьник в ответ на тот же вопрос сказал: «Этот многоугольник должен, во всяком случае, быть четырехугольником». Верно ли, что указанный школьником признак необходим для интересующих нас многоугольников?

9. Один школьник утверждает: «Для того, чтобы выпуклый четырехугольник был параллелограммом, *необходимо*, чтобы у него были две пары равных сторон».

Второй школьник считает, что то же условие *достаточно* для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом.

Кто из них прав?

10. Используя слово «необходимо», перефразируйте известную русскую поговорку: «Нет дыма без огня».

11. а) Школьник A утверждает: «Для того чтобы четырехугольник (имеется ввиду выпуклый) имел равные диагонали, необходимо, чтобы он был прямоугольником или трапецией».

б) Школьник B считает: «Для того чтобы вписанный в окружность четырехугольник имел равные диагонали, необходимо, чтобы он был прямоугольником или трапецией».

Докажите, что B прав, а A — нет.

3. Нередко случается в школьном курсе математики, что одно и то же условие оказывается одновременно и необходимым и достаточным.

Например, для того чтобы параллелограмм был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы у него одна диагональ была биссектрисой одного из его углов.

Однако уже приведенные выше примеры показывают, что не всякое необходимое условие достаточно, и наоборот.

Рассмотрим несколько задач:

12. Докажите: «Для того чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы медиана, проведенная к большей стороне, была вдвое меньше этой стороны».

13. Докажите: «Для того чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы две его медианы были равны».

14. Докажите: «Для того чтобы трапеция был равнобедренной, необходимо и достаточно, чтобы две ее диагонали были равны».

15. Докажите: «Для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись три условия: две смежные стороны в нем равны; остальные две стороны тоже равны; две стороны в нем параллельны».

16. Верно ли предложение: «Для того чтобы два треугольника были равны, необходимо и достаточно, чтобы две стороны и угол одного треугольника были соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника»?

17. Проверьте справедливость утверждения:

«Для того чтобы два четырехугольника были равны, необходимо и достаточно, чтобы соответственные углы у них были равны и соответственные (то есть соединяющие соответственные вершины) диагонали были равны».

4. Каждое предложение, выражающее необходимое условие, можно всегда перефразировать в предложение, выражающее достаточное условие. Точнее говоря, если суждение A выражает условие, необходимое для суждения B, то B выражает условие, достаточное для A, и наоборот.

Это можно короче записать так:

«A необходимо для B»$\longleftrightarrow$«B достаточно для A».

Действительно, что значит: «A необходимо для B»? Это значит, что верно утверждение:

$$«\text{Не } A \to \text{не } B». \qquad (1)$$

Но последнее предложение противоположно предложению:

$$A \to B. \qquad (2)$$

Известно, что если верно утверждение (1), противоположное данному (2), то верно также утверждение, обратное данному; то есть

$$B \to A.$$

А это и означает, что суждение B выражает условие, достаточное для справедливости суждения A:

$$B \text{ достаточно для } A.$$

Обратно, пусть «B достаточно для A», то есть истинно утверждение $B \to A$. Это утверждение, являющееся обратным по отношению к утверждению $A \to B$, истинно одновременно с противоположным утверждением: не $A \to$ не B.

А это означает, что A необходимо для B.

В математике часто употребляются выражения «тогда и только тогда», «тот и только тот», «те и только те», «в том и только в том случае» и т. п. Их смысл связан с понятием о достаточности и необходимости: слова «тогда», «тот», «те» и т. п. в подобных случаях употребляются в предложениях, где речь идет о достаточных условиях, а слова «только тогда», «только тот», «только те»—в тех случаях, когда речь идет о необходимых условиях. Например, теорему: «Для того чтобы треугольник был равносторонним, достаточно и необходимо, чтобы он был равноугольным»,—можно так перефразировать: «Треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда он равноугольный», «Равносторонние треугольники — это те и только те треугольники, которые являются равноугольными».

Приведем еще несколько задач *для X класса.*

18. а) Утверждение: «Только в правильной n-угольной пирамиде все боковые грани являются равнобедренными треугольниками». Перефразируйте, используя слово «необходимо».

б) Верно ли это утверждение?

19. Используя слово «необходимо», перефразируйте следующие предложения:

а) «Лишь тот достоин жизни и свободы,
Кто каждый день идет за них на бой».
(И. В. Гёте)

б) «Только тот не знает ненависти,
Кто никогда никого не любил».
(Л. Украинка)

20. Верно ли утверждение: «Только такая замкнутая ломаная с 4 сторонами является параллелограммом, у которой противоположные стороны попарно равны»?

21. Учитель спросил: «В какой пирамиде все диагональные сечения являются равными треугольниками?»

Ребята дали такие ответы:

Федя: В правильной четырехугольной пирамиде.

Саша. Пирамида должна во всяком случае быть четырехугольной.

Содержит ли какой-либо из этих двух ответов достаточный признак? Необходимый признак?

22. Доказать или опровергнуть утверждение: «Для того чтобы около n-угольной пирмиды ($n > 4$) можно было описать конус, необходимо, чтобы она была правильной».

§ 6. АЛГОРИТМЫ УСКОРЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1. Алгебра, которую мы изучаем в школе, позволяет найти удобные алгоритмы для быстрого выполнения арифметических вычислений, например для быстрого умножения чисел или возведения чисел в квадрат.

Мы сейчас приведем несколько таких алгоритмов. Сделаем предварительно два замечания.

При устных вычислениях удобно пользоваться «телефонным способом чтения чисел»: каждое число разбивается на грани по 1—2 цифры (иногда 3) в каждой, и каждая грань читается как отдельное число. Например: 5328 можно читать так: пятьдесят три двадцать восемь; 14253 можно читать так: один сорок два пятьдесят три.

Для облегчения формулировки многих алгоритмов ускоренных вычислений полезно воспользоваться выражением «к данному числу (a) *приписать двумя цифрами* (аналогично — тремя и т. д.) другое данное число b».

Это выражение означает: «*умножить число a* на 100 (соответственно —на 1000 и т. д.) *и к тому, что получится, прибавить число b*». Например, приписать к числу 38 двумя цифрами число 9 означает: написать число 3809; А приписать к тому же числу 38 двумя цифрами число 142 означает: написать число 3800 + 142, то есть число 3942. Запись удобно расположить следующим образом:

$$3\overset{1}{8}42 = 3942.$$

В качестве примера рассмотрим алгоритм, который позволяет **перемножить в уме два двузначных числа, близкие к 100.**

Если спросить шестиклассника, какие двузначные числа труднее всего перемножить, то он, вероятно, скажет: «Числа, близкие к 100, например: 98 · 97». На самом же деле такие двузначные числа очень легко умножить даже в уме. Назовите каких-либо 2 числа, близких к 100. Пусть назвали 94 и 97. Пишем: $\underset{6}{94}\cdot\underset{3}{97}=$ $= 9118$ (девяносто один — восемнадцать).

Как мы произвели умножение? Узнаем, каков недостаток первого сомножителя (94) до 100. Это будет 6. Недостаток второго сомножителя (97) до 100 равен 3. Затем из одного сомножителя (94) вычитаем недостаток (3) второго сомножителя до 100; получаем 91. Приписываем к результату произведения 3 · 6, то есть 18.

Здесь мы пользуемся таким алгоритмом: если хочешь *перемножить два двузначных числа, близких к 100, то поступай так:* найди *недостатки сомножителей до сотни; вычти из одного сомножителя недостаток второго до сотни; к результату припиши двумя цифрами произведение недостатков сомножителей до сотни.*

Возьмем другие примеры.

$$\underset{8}{92}\cdot\underset{15}{85}=7\overset{1}{7}20=7820;\qquad \underset{12}{88}\cdot\underset{11}{89}=7\overset{1}{7}32=7832.$$

А почему можно так умножать числа? Ответ на этот вопрос дает алгебра.

Пусть нужно перемножить двузначные числа x и y, близкие к 100. Число x мы запишем так: $x = 100 - a$, где a — недостаток числа x до 100.

Второй сомножитель y запишем так:
$y = 100 - b$. Тогда

$$x\cdot y=(100-a)(100-b)=(100-a)\cdot 100-100b+ab=$$
$$=(100-a-b)\cdot 100+ab=(x-b)\cdot 100+a\cdot b.$$

Итак, в произведении всего $x - b$ сотен и, кроме того, еще $a\cdot b$ единиц. Отсюда и вытекает наш алгоритм. (Заметим, что он особенно удобен, если a и b меньше 25.)

2. Как возвести в квадрат число, близкое к 50? Покажем теперь, как в уме возвести в квадрат двузначное число, близкое к 50. Назовите любое число, близкое к 50, но большее, чем 50 (скажем, число 58). Записываем ответ: $58^2 = 3364$.

Еще пример (называете, скажем, 63): $63^2 = 3969$.

Как же мы так быстро произвели вычисления?

Мы пользовались определенным алгоритмом. Найти его нам поможет алгебра.

Пусть нужно возвести в квадрат число x, близкое к 50, но большее 50. Число это запишем так: $x = 50+a$, где a—избыток числа x над 50.

Например: $58 = 50 + 8, \; x = 58, \; a = 8;$
$63 = 50 + 13, \; x = 63, \; a = 13.$

Итак, $x = 50 + a, \quad a = x - 50. \quad x^2 = (50 + a)^2 = 2500 + 100a + a^2 = (25 + a) \cdot 100 + a^2 = (25 + x - 50) \cdot 100 + a^2 = (x - 25) \cdot 100 + a^2.$

Отсюда следует а л г о р и т м: *если хочешь возвести в квадрат число, близкое к* 50, *но большее* 50, *то поступай так*: 1) *вычти из этого числа* 25, 2) *припиши к результату двумя цифрами квадрат избытка данного числа над* 50.

П р и м е р ы. 1) $58^2 = 3364$.

Объяснение. $58 - 25 = 33, \; 8^2 = 64, \; 58^2 = 3364$.

2) $64^2 = 4096$.

Объяснение. $64 - 25 = 39, \quad 64 - 50 = 14, \quad 14^2 = 196, \quad 64^2 = \overset{1}{39}96 = 4096.$

Вы теперь легко сами придумаете алгоритм для возведения в квадрат числа, которое близко к 50, но меньше, чем 50.

Проверьте себя на примере: $43^2 = 1849$.

1. Пользуясь алгеброй, придумайте алгоритм для быстрого умножения двух трехзначных чисел, близких к 1000. Проиллюстрируйте его на примере: $997 \cdot 936$.

2. Придумайте алгоритм для быстрого возведения в квадрат трехзначных чисел, близких к 100.

3. То же — для двузначных чисел, близких к 100.

§ 7. НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ ДЛЯ ГЕОМЕТРА-СЛЕДОПЫТА

Здесь мы приведем несколько задач, в которых требуется восстановить несохранившуюся фигуру по каким-либо оставшимся от нее следам (например, по нескольким оставшимся точкам).

Восстановление этих фигур требуется произвести с помощью циркуля и линейки.

Чтобы найти алгоритмы для решения этих задач, необходимо проявить смекалку и хорошее знание планиметрии.

1. Был начерчен ΔABC, в нем проведены медианы и отмечены их основания D, E, F. Потом треугольник был стерт, оставлены только 3 точки: D, E, F. Восстановите треугольник.

2. В $\triangle ABC$ из вершины A были проведены к основанию медиана AD и высота AH, а из вершины B была проведена медиана BF к боковой стороне (D и F — основания медиан, H — основание высоты). Потом треугольник был стерт. Оставлены только 3 точки: D, F, H. Восстановите треугольник.

3. Как по осколку разбитой патефонной пластинки определить радиус этой пластинки, если центр пластинки не сохранился, но сохранилась некоторая часть края пластинки?

4. В остроугольном треугольнике ABC были проведены высоты AE и BF. После этого треугольник стерли, оставили только точки E и F и кусок основания AB — отрезок MN. Восстановите треугольник.

§ 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ С РАЗЛИЧНЫМИ ЧЕРТЕЖНЫМИ ИНСТРУМЕНТАМИ

В школе задачи на построение обычно решаются с помощью циркуля и линейки. Такая традиция установилась со времен Евклида. Однако привлечение именно этих двух инструментов вовсе не обязательно.

Многие задачи на построение можно решить, пользуясь другими чертежными инструментами, например угольником или линейкой с параллельными краями (ее называют иначе «двусторонней линейкой») или только односторонней линейкой (которая позволяет вычерчивать прямые, но не позволяет строить параллельные прямые). Нередко оказывается, что задачи, которые легко решаются циркулем и линейкой, при помощи других инструментов решаются значительно сложнее. Проверьте свои силы при поиске алгоритмов для решения следующих задач.

1. В треугольнике проведена средняя линия. Найдите середину основания этого треугольника, пользуясь только односторонней линейкой (без делений).

2. Даны концы отрезка AB. Пользуясь только циркулем, удвойте этот отрезок (то есть постройте концы вдвое большего отрезка).

3. а) Постройте на данном отрезке AB, как на основании, равносторонний треугольник, если размах циркуля постоянный, и меньше, чем $\frac{1}{2}$ AB (линейкой можно пользоваться); б) решите ту же задачу, если размах циркуля больше AB.

4. Пользуясь только циркулем, постройте 3 точки, лежащие на одной прямой.

5. Пользуясь только двусторонней линейкой: а) разделите отрезок пополам, если он больше ширины линейки; б) удвойте отрезок; в) разделите угол пополам.

6. Пользуясь двусторонней линейкой, разделите отрезок (любой длины): а) пополам; б) на n равных частей ($n = 5$).

7. Решение некоторых задач на построение с ограниченными средствами связано *с леммой о трапеции* (доступна учащимся VIII классов): «Прямая, проходящая через точку пересечения продолженных боковых сторон трапеции и через точку пересечения ее диагоналей, делит основания трапеции пополам». Докажите эту теорему.

8. Постройте прямую, проходящую через данную точку (M) и параллельную данной прямой AB, пользуясь только двусторонней линейкой.

9. Дан отрезок и параллельная ему прямая. Пользуясь только линейкой (односторонней), разделите отрезок пополам.

10. Разделите отрезок пополам, пользуясь только прямым углом (то есть инструментом, позволяющим строить взаимно перпендикулярные прямые).

11. Пользуясь только циркулем, постройте точку, симметричную точке C относительно прямой, проходящей через две данные точки A и B.

12. а) Даны окружность, ее диаметр AB и точка C, не лежащая ни на окружности, ни на прямой AB. Пользуясь только линейкой (односторонней), проведите через C прямую, перпендикулярную к AB; б) решите ту же задачу, если C на окружности или на прямой AB.

13. Через данную точку C проведите прямую, параллельную данной прямой AB, если наибольший размах циркуля меньше расстояния от точки C до прямой AB. Разрешается пользоваться также линейкой.

14. Начерчен отрезок AB. Постройте его середину, если размах циркуля меньше половины отрезка AB. Можно пользоваться, кроме циркуля, еще (односторонней) линейкой.

15. Из однородного листа жести вырезаны две фигуры (рис. 55 и 56). Как найти их центры тяжести, пользуясь только линейкой?

16. а) Вы располагаете пластинкой, имеющей форму правильного треугольника (с гладкими краями). Пользуясь этим инструментом (и карандашом), постройте середину данного отрезка.

Проводить какие-либо построения на самой пластинке не разрешается.

17. Пользуясь тем же инструментом, решите следующие задачи: а) проведите параллель к данной прямой через данную точку; б) проведите перпендикуляр к данной прямой через данную точку; в) соедините прямой две точки, расстояние между которыми больше стороны треугольника.

Вопросом о том, какие задачи можно решить, если ограничиться только циркулем, занимался еще 300 лет назад (в 1672 году) датчанин Георг Мор в книге «Любопытный Евклид». Через 100 с лишним лет после Мора такими же построениями заинтересовался итальянский геометр Лоренцо Маскерони (1797). Они пришли к следующему неожиданному выводу: циркулем можно сделать все то, что можно сделать линейкой, кроме, разумеется, вычерчивания прямых. Точнее говоря, теорема Мора—Маскерони состоит в следующем: *«Всякая задача на построение фигуры из конечного числа точек, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена только цир-*

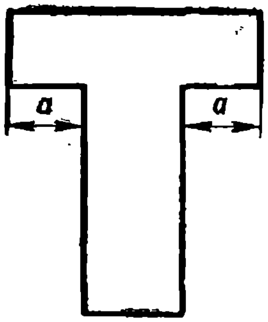


Рис. 55

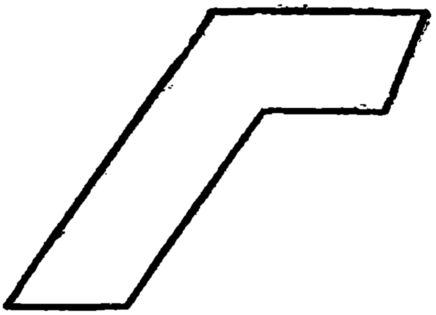


Рис. 56.

кулем»[1]. Более того, можно указать алгоритм, который позволит из любого решения какой-либо задачи циркулем и линейкой получить ее решение только циркулем.

А каковы возможности о д н о й л и ш ь л и н е й к и при решении задач на построение?

Отдельные задачи с помощью односторонней линейки решили еще Мор, швейцарский математик Ламберт и другие. Но полностью этот вопрос был решен замечательным швейцарским геометром Якобом Штейнером (1796—1863) примерно лет через 30 после смерти Маскерони. Штейнер обнаружил, что возможности линейки значительно меньше возможностей циркуля. Нельзя, например, с помощью односторонней линейки построить середину отрезка или провести перпендикуляр к данной прямой (доказательство невозможности таких построений принадлежит известному немецкому математику Давиду Гильберту). Однако Штейнеру удалось доказать такую теорему:

Всякая задача на построение фигуры из конечного числа точек, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена только линейкой (односторонней), если уже начерчена окружность и указан ее центр[1].

Что касается *двусторонней* линейки, то, как было установлено позднее, она позволяет решить каждую задачу, разрешимую циркулем и линейкой.

§ 9. ПОСТРОЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ НЕДОСТУПНЫХ ТОЧЕК

Мы сейчас рассмотрим задачи на построение, которые должны быть решены циркулем и линейкой, но при этом нельзя пользоваться некоторыми точками, которые считаются «недоступными». Например, нельзя провести прямую, соединяя с помощью линейки две недоступные точки.

Построения при наличии недоступных точек могут встретиться в чертежной практике в связи с тем, что из-за ограниченности раз-

---

[1] Доказательство можно найти, например, в книге Б. И. Аргунова и М. Б. Балка [1].

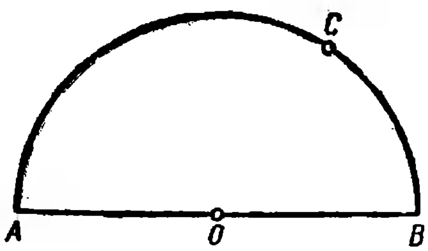


Рис. 57.

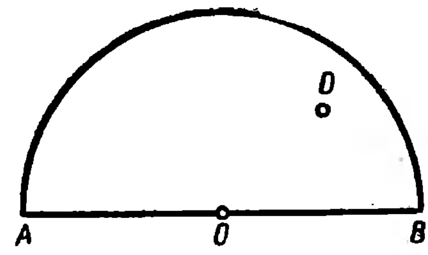


Рис. 58.

меров чертежного листа на нем не помещается часть чертежа. При построениях на местности тоже может оказаться, что некоторые точки недоступны (в них, например, нельзя поместить геодезический инструмент).

1. Дан треугольник ABC. Проведите в нем медиану к AB, если: а) точки A и B недоступны; б) все 3 вершины недоступны.

2. Даны три точки окружности. Постройте еще какую-либо точку этой окружности, не находя ее центра (центр недоступен).

3. а) Из вершины A треугольника ABC опустите высоту на противоположную сторону, если вершина A недоступна; б) то же, если все три вершины недоступны.

4. Не пользуясь вершинами треугольника, постройте его биссектрисы.

5. Даны две точки A и B. Постройте середину отрезка AB, не проводя ни прямой AB, ни какого-либо отрезка на этой прямой.

6. а) В данный треугольник впишите окружность, не пользуясь его вершинами.

б) При том же ограничении найдите центр описанной окружности.

7. Не пользуясь центром окружности, проведите к ней касательную, параллельную данной прямой.

8. Через данную точку M проведите касательную к данной окружности, не пользуясь ее центром. Рассмотрите два случая: а) точка M лежит на окружности; б) точка M лежит вне окружности.

9. Две данные прямые a и b пересекаются вне чертежа. Проведите прямую, которая прошла бы через точку их пересечения и через данную на чертеже точку D.

10. Начерчена половина окружности (рис. 57), указан ее центр O, построен диаметр AB, взята точка C на полуокружности. Не пользуясь точками A и B, постройте прямую, которая проходила бы через C и A.

11. Начерчены полуокружность и ее диаметр AB (рис. 58). Требуется провести через точку D (D лежит внутри полукруга) прямую так, чтобы она прошла через точку A. Точки A и B недоступны. Центром O окружности можно пользоваться.

Существует общий прием решения задач на построение, в условия которых входят недоступные точки. Он состоит в том, что с помощью какого-либо геометрического преобразования (симметрия, гомотетия и т. п.) недоступные точки заменяются доступными. Решив задачу для этих вспомогательных данных, можно затем (применив обратное преобразование) получить решение исходной задачи.

§ 10. РАЗЫСКАНИЕ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ НА ПЛОСКОСТИ

Нередко бывает, что какая-то геометрическая фигура Φ задается путем указания свойства (S), которым должна обладать каждая ее точка и которым не должна обладать никакая точка, которая этой фигуре не принадлежит (свойство называют характеристическим). В школьных учебниках фигура Φ в таком случае называется геометрическим местом точек, обладающих указанным свойством. Иногда довольно трудно представить себе фигуру Φ, если указано лишь какое-то характеристическое свойство ее точек (иными словами — найти геометрическое место точек по указанному свойству его точек): будет ли это прямая, или дуга окружности, или отрезок или луч, или какая-либо комбинация таких простейших фигур? Вот несколько задач на разыскание таких фигур на плоскости[1].

1. Один школьник утверждает, что геометрическим местом центров окружностей данного радиуса (r), касающихся данной окружности (O, R), является окружность, концентрическая данной. Верно ли это?

2. а) Чем является на плоскости множество всех точек, равноудаленных от двух параллельных прямых? Можно ли это доказать?

б) Чем является на плоскости множество всех точек, отстоящих на данном расстоянии от данной точки? Можно ли это доказать?

3. Расстояние между двумя параллельными прямыми a и b равно 20 *мм*. Чем является множество всех точек плоскости, которые на расстояние d дальше от a, чем от b? Рассмотрите случаи: а) $d = 20$ *мм*; б) $d = 30$ *мм*; в) $d = 10$ *мм*.

4. Две прямые параллельны, третья к ним перпендикулярна. Чем является множество точек плоскости, равноудаленных от всех трех прямых?

5. а) Чем является ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся прямых? б) От трех прямых? (Рассмотрите различные случаи.)

---

[1] В некоторых приведенных ниже задачах используется понятие **расстояния от точки до фигуры**. Под этим подразумевается длина наименьшего из отрезков, соединяющих данную точку с точками фигуры.

6. Даны две пересекающиеся прямые a и b. Чем является ГМТ, которые на 1 *дм* дальше от прямой a, чем от прямой b?

7. Имеются две взаимно перпендикулярные прямые. Укажите хотя бы одну точку, для которой сумма расстояний от этих прямых равна 1 *дм*. Сколько существует таких точек? Какую фигуру заполняют все такие точки?

8. На лугу между двумя колышками A и B натянута веревка длиной $3a$. По веревке скользит кольцо, к которому привязана еще одна веревка длиной a. Ко второму концу этой веревки привязана коза. Какой участок луга ей доступен? Дайте чисто математическую формулировку этой задачи, используя термин ГМТ.

*9. Участок луга имеет форму полукруга. Располагая веревкой, которая по длине вдвое больше диаметра полукруга, тремя колышками и одним кольцом, надо привязать козу так, чтобы она могла съесть всю траву внутри полукруга, но не могла бы выйти за пределы участка. Как это сделать?

10. Чем являются ГМТ, которые расположены вдвое дальше от точки A, чем от точки B?

11. Дана прямая a и точка M вне ее. а) Сколько существует точек, равноудаленных от прямой a и от точки M? б) Постройте несколько таких точек.

Если построить все такие точки, то они заполнят линию, которая называется п а р а б о л о й. Таким образом, парабола — это ГМТ, равноудаленных от данной прямой a и от данной точки M. Прямая a называется директрисой параболы, M — фокусом.

Аналогичным образом можно задать некоторые другие линии.

12. На плоскости нарисован острый угол POQ. Какую фигуру образует множество всех точек плоскости, равноудаленных от лучей OP и OQ?

13. Для практики навигации весьма полезна следующая задача («задача Потено́»): наблюдатель на местности видит три предмета, изображенных на имеющейся у него карте участка. Наблюдатель также может измерить углы между направлениями от него к этим предметам. Как ему нанести на карту ту точку, где он сейчас находится?

Глава III

НА СТЫКЕ АРИФМЕТИКИ И АЛГЕБРЫ

§ 1. НЕДЕСЯТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

1. В современной машинной математике находят широкое применение так называемые недесятичные системы счисления: двоичная, троичная, восьмеричная и другие.

Что же это такое — недесятичная система счисления?

При записи чисел мы пользуемся одним удивительным обстоятельством, которому мы не поражаемся лишь потому, что сталкиваемся с ним с первых школьных лет: любое, сколь угодно большое число мы ухитряемся записать, привлекая всего-навсего десять знаков — десять цифр: 0, 1, 2, ..., 9. Почему же это удается сделать? По двум причинам: во-первых, потому, что наша система записи чисел — *десятичная*, то есть десять единиц дают одну единицу второго разряда (десяток), десять десятков — одну единицу третьего разряда и т. д.; во-вторых, потому, что наша система записи чисел — *позиционная*: одна и та же цифра указывает на число единиц того или иного разряда в зависимости от места в числе, где она помещена.

Но обязательно ли именно десять единиц какого-либо разряда объединить в одну единицу следующего разряда? Разумеется, это не обязательно! Мы можем, например, считать пáрами (или двойками): две единицы объединять в одну единицу второго разряда, две единицы второго разряда — в одну единицу третьего разряда и т. д. Тогда у нас образуется *двоичная* система счисления. В двоичной системе счисления запись

$$100101$$

означает

$$1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1,$$

то есть число 37.

Таким же образом можно записывать целые числа и в других системах счисления.

Вообще, в q-ричной системе счисления (системе счисления с основанием q) q единиц какого-либо разряда объединяются в одну единицу следующего, более высокого разряда. Запись

$$N = p_k \ldots p_3 p_2 p_{1(q)}$$

(где все значки p_n — целые числа между 0 и $q - 1$) означает, что $N = p_k \cdot q^{k-1} + \ldots + p_3 q^2 + p_2 \cdot q + p_1 \cdot 1$. Например, запись

$$N = 21102_{(3)}$$

означает, что в троичной системе счисления записано число, которое равно [1]

$$2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1, \qquad (1)$$

то есть число 200.

Не только целые числа, но и д р о б н ы е могут быть заданы в недесятичной системе счисления.

Запись

$$0, P_1 P_2 \ldots P_{k(q)}$$

означает:

$$P_1 \cdot \frac{1}{q^1} + P_2 \cdot \frac{1}{q^3} + P_3 \cdot \frac{1}{q^3} + \ldots + P_k \cdot \frac{1}{q^k}.$$

Например, запись

$$0{,}101_{(2)}$$

означает, что в двоичной системе счисления задано следующее число:

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2^2} + 1 \cdot \frac{1}{2^3},$$

то есть $\frac{5}{8}$.

Вот несколько простых примеров для упражнения.

1. «Загадочная автобиография» (другой вариант см. в «Занимательной арифметике» Я. И. Перельмана).

В бумагах одного математика была найдена странная автобиография: «Я окончил школу 33-летним юношей и поступил в том же году в институт, который успешно окончил в возрасте 42 лет. Вместе со своей маленькой сестренкой, которая училась в III классе средней школы и была в возрасте 20 лет, я поехал на учительскую работу. Школа помещалась в 10 *км* от железной дороги. Это расстояние я не спеша легко преодолевал за 1 час, а на велосипеде

---

[1] Запись (1) удобнее начать «справа налево», так что она возникает в такой последовательности:

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 1, \\ 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1, \\ 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

даже за каких-нибудь 100 минут. Работа в школе мне давалась легко, нагрузка у меня была небольшая: 100 часов в неделю. Сестра моя училась очень хорошо и через 12 лет окончила среднюю школу, будучи еще совсем молоденькой девушкой: ей едва исполнилось 32 года».

Как выяснилось, все числа в этой автобиографии написаны в пятеричной системе счисления. Расшифруйте теперь автобиографию.

2. Вам дана двоичная запись нескольких чисел:

101; 100001; 0,0101; 1001,011.

Какие здесь числа записаны? (Запишите их в десятичной системе счисления.)

3. Записаны несколько чисел в восьмеричной системе счисления: 1026; 12047; 120065; 2,001; 0,03012.

Выясните, какова их запись в десятичной системе счисления.

2. Мы видели, что перейти от записи числа, заданной в недесятичной системе счисления, к десятичной записи не составляет большого труда. Обратный переход тоже несложен.

Рассмотрим сначала для определенности двоичную систему счисления. Легко для последовательных натуральных чисел 1, 2, 3, 4... найти их двоичную запись:

Число 1 имеет д в о и ч н у ю запись 1;
число 2 имеет двоичную запись 10 («один — ноль») (*одна* двойка и ничего (0) в остатке).
Число 3 имеет двоичную запись 11 («один — один») (*одна* двойка и в остатке еще одна единица).
Число 4 имеет двоичную запись 100 («один — ноль — ноль») (*один* раз 2^2, и в остатке 0 раз 2 и 0 раз 1).

Возьмем произвольное натуральное число, например 25. Как найти его двоичную запись? Сначала узнаем, какая самая высокая степень двойки в нем содержится. Очевидно, 2^4 (то есть 16), и притом, очевидно, 1 раз. В остатке (остаток равен 9) содержится 1 раз число 2^3 (то есть 8).

В новом остатке (он составляет 1) содержится 0 раз число 2^2, 0 раз число 2^1, 1 раз число 1.
Иначе говоря,

$$25 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 1,$$

так что его двоичная запись такова:

11001.

Точно так же легко найти двоичную запись любого другого натурального числа.

3. Вот два фокуса, которые легко провести, если натренироваться в переводе чисел из десятичной записи в двоичную.

Ф о к у с № 1. Угадывание предмета по таблицам.

Ведущий: «Вы видите перед собой различные геометрические фигуры и инструменты. В этой таблице выписаны все их названия:

1. Куб.	6. Циркуль.	11. Сегмент.
2. Шар.	7. Цилиндр.	12. Транспортир.
3. Окружность.	8. Треугольник.	13. Сектор.
4. Круг.	9. Квадрат.	14. Пирамида.
5. Линейка.	10. Параллелограмм.	15. Трапеция.

Они же выписаны в этих четырех таблицах:

Таблица № 4	Таблица № 3	Таблица № 2	Таблица № 1
Треугольник	Круг	Шар	Куб
Трапеция	Линейка	Окружность	Сектор
Сектор	Циркуль	Цилиндр	Трапеция
Пирамида	Сектор	Циркуль	Сегмент
Транспортир	Транспортир	Трапеция	Окружность
Квадрат	Трапеция	Пирамида	Линейка
Параллелограмм	Пирамида	Сегмент	Цилиндр
Сегмент	Цилиндр	Параллелограмм	Квадрат

Выберите любой из этих предметов так, чтобы я не видел. С помощью несложных расчетов можно установить, какой предмет выбран. Кто желает проделать этот фокус?» Допустим, что к доске выходит ученик М. Ведущий поворачивается так, чтобы видеть только таблицу, в которой 15 названий. Затем он продолжает: «Выбери, М., любой из предметов на столе. Подними его так, чтобы его видели все, кроме меня. Записан ли этот предмет в таблице № 1?» «Да». «А в таблице № 2?» «Нет». «А в таблице № 3?» «Да». «А в таблице № 4?» «Нет».

Ведущий: «Я угадываю: ты выбрал линейку».

Объяснение. Каждому предмету соответствует определенное число—номер, под которым название предмета значится в таблице с 15 предметами. Например, сектору соответствует число 13, линейке — число 5. Переведем все эти номера в двоичную систему счисления. Тогда каждое из чисел записывается не более чем четырьмя цифрами. Например, число 5 запишется так: 101, или (что тоже) 0101.

В первой таблице помещаются такие, и только такие слова, чьи номера в двоичной системе счисления имеют на первом месте справа 1. Например, слову «сектор» соответствует число 13, а в двоичной системе счисления — 1101; на первом месте справа — 1; поэтому слово помещено в таблицу № 1. В таблицу № 2 помещены те слова, чьи номера в двоичной системе счисления имеют на втором месте (считая справа налево) цифру 1. Например, слово «цилиндр» входит под номером 7, то есть в двоичной записи — под номером 111. Вторая цифра с конца (справа) — 1. Следовательно, слово «цилиндр» включаем в таблицу № 2. Аналогично составлены таблицы № 3 и № 4. Когда М. говорит, что выбранный им предмет имеется в таблице № 1 и № 3, но не значится в таблицах № 2 и № 4, можно написать номер этого предмета в двоичной системе счисления: 0101, или в десятичной системе счисления: $0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$, то есть 5. Под номером 5 в таблице из 15 предметов значится слово линейка. Значит, М. выбрал линейку.

Фокус № 2. Угадывание любого целого числа от 1 до 31 с помощью двоичной системы счисления.

Пусть этот фокус проводят два ученика — А. и Б. Б. выходит из комнаты, А. вызывает к столу 5 учеников (кто желает) и выстраивает их в один ряд. Затем он предлагает присутствующим в комнате назвать любое число от 1 до 31. В уме он переводит число в двоичную систему счисления и расставляет учащихся так, чтобы нулю соответствовал ученик, стоящий лицом к присутствующим, а единице — ученик, стоящий несколько боком к аудитории. Например, если предложено число 13, то в двоичной системе счисления оно запишется так: 1101, или (что то же) 01101. Затем А. уходит в сторону (или вовсе выходит из комнаты). Приглашают Б., и он, посмотрев на пятерку учеников, восстанавливает в уме по их расположению загаданное число (сначала — в двоичной системе, а затем переводит его в десятичную).

Можно видоизменить этот эффектный фокус: например, ставить вместо нулей и единиц мальчиков и девочек или же вместо нуля ставить книгу лицевой стороной, а вместо единицы ставить книгу оборотной стороной к зрителю.

4. Рассмотрим теперь один общий прием, который при любом $q \geqslant 2$ позволяет перейти от десятичной записи какого-либо целого числа N к его q-ричной записи.

Чтобы это сделать, следует число N представить в виде

$$N = l_k \cdot q^{k-1} + \ldots + l_2 q + l_1 \cdot 1,$$

где все числа $l_1, \ldots, l_k$ — между 0 и $q - 1$. Тогда число N имеет следующую q-ричную запись: $\overline{l_k l_{k-1} \ldots l_1}$[1].

Чтобы найти числа $l_1, l_2, \ldots, l_k$, проще всего последовательно разделить число N на q, затем образовавшееся первое частное снова разделить на q, то же сделать с вновь образовавшимся вторым частным и т. д., записывая при этом всякий раз остатки от деления.

---

[1] Ниже запись вида $\overline{ab \ldots k}$ означает: число, у которого первая цифра a, вторая — b, ..., последняя цифра — k.

Мы получим цифры l_1, l_2 ,..., l_{k-1}, l_k, которые и будут искомыми. Поясним это примером.

Найдем восьмеричную запись числа 79:

$$\begin{array}{r|l} 79 & 8 \\ -\underline{72} & \begin{array}{r|l} 9 & 8 \\ -\underline{8} & 1 \\ 1 & \end{array} \\ 7 & \end{array}$$

Отсюда легко усмотреть, что

$$79 = 1 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 7 \cdot 1,$$

так что искомая восьмеричная запись числа 79 имеет вид: 117.

Вот пример для самостоятельных упражнений.

4. Найдите запись числа 297 в следующих системах счисления: а) в троичной; б) в двоичной, в) в двенадцатеричной, г) в шестидесятеричной.

5. В недесятичных системах счисления возможно выполнять арифметические действия с целыми и дробными числами точно так же, как в привычной десятичной системе. Только для каждой системы счисления — своя таблица сложения и своя таблица умножения. Например, вот каковы эти таблицы в случае двоичной системы:

$$\begin{array}{ll} 0+0=0, & 0\times 0=0, \\ 0+1=1, & 0\times 1=0, \\ 1+0=1, & 1\times 0=0, \\ 1+1=10. & 1\times 1=1. \end{array}$$

Выполните сами следующие вычисления в двоичной системе счисления без перехода к десятичной:

$$+\begin{array}{r} 1001011 \\ \underline{110111} \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 1011 \\ \underline{1101} \end{array}$$

После этого перейдите к десятичной системе счисления и выполните действия; сравните полученные результаты с ранее найденными.

6. Мы привыкли к десятичной системе счисления, ею пользуются сейчас все люди на Земле. Выбор такой системы счисления и его широкое распространение связаны, видимо, с тем, что счетный прибор, который мы всегда имеем при себе, — наши руки — содержит 10 пальцев. Если бы у человека руки были четырехпалые, то мы, вероятно, предпочли бы восьмеричную систему счисления.

Неоднократно высказывалось мнение, что двенадцатеричная система счисления была бы удобнее в обиходе, чем наша десятеричная. В частности, это связывают с тем обстоятельством, что 12 имеет 4 делителя (кроме самого себя и единицы): 2, 3, 4, 6, а 10 —только два (2 и 5). До сих пор за рубежом группой энтузиастов издается журнал «Дуодецималист» (то есть «Сторонник двенадцатеричной системы счисления»).

В прошлом люди неоднократно прибегали к недесятичным системам счисления, в особенности — к шестидесятеричной. Ею пользовались в древности в Вавилоне, Греции, Риме. Именно этим объясняется то, что в древнем Вавилоне окружность разбивали на 360 градусов. Считали, что в окружности укладывается ее радиус ровно шесть раз, и каждую такую дугу (равную по длине радиусу) разбивали на 60 равных частей (градусов).

Впоследствии стали и градус дробить на шестьдесят более мелких долей —минуты (*минута* означает по-латыни «более мелкая»), а минуту — на шестьдесят секунд (*секунда* означает — доля *второго* порядка). Именно потому, что число шестьдесят было основой системы счисления, мы до сих пор при измерении времени делим час на 60 минут, а минуту — на 60 секунд.

Ученые и в более позднее время обращались к шестидесятеричной системе счисления. Так, например, известно, что итальянский математик Леонардо Фибоначчи (XII век), решая одно громоздкое алгебраическое уравнение, дал приближенное значение его корня в шестидесятеричной системе счисления.

Тяга в прошлом некоторых народов к двенадцатеричной и шестидесятеричной системам счисления объясняется, по-видимому, также особенностью наших рук как счетного прибора: наличием двенадцати фаланг на четырех пальцах руки (по три на каждом пальце, не считая большого пальца) и 5 пальцев на руке. Таким образом, пользуясь фалангами пальцев на одной руке и пятью пальцами другой руки, можно было легко насчитать любое число от 1 до 60.

7. Как мы уже отметили в начале этого очерка, в настоящее время недесятичные системы счисления широко применяются в машинной математике. Подавляющее большинство математических машин производит расчеты в двоичной системе счисления. Причина кроется в том, что технически легко кодировать (условно изображать) цифры двоичной записи (0 и 1): например, 0 изображается низким уровнем напряжения, а 1 — высоким уровнем; кодировать же 10 цифр технически значительно сложнее. В некоторых машинах (например, в советской машине «Сетунь») расчеты производятся в троичной системе счисления.

При составлении программ для решения задач на математических машинах часто пользуются восьмеричной системой счисления: например, последовательные команды, из которых состоит каждая программа, нумеруют не в десятичной системе, а в восьмеричной (номера команд тогда выглядят так: 1, 2, 3, ..., 7, 10, 11, ..., 17, 20, ..., причем число 10 (читайте его так: «один ноль») означает 8, число 11 («один один») — девять, 17 — пятнадцать, 20 — шестнадцать и т. д.

Восьмеричная запись удобна тем, что в ней примерно столько же цифр, сколько в привычной для нас десятичной записи, и в то же время от нее очень легко перейти к двоичной. Для примера возьмем число $N = 477$; его восьмеричная запись будет $735_{(8)}$.

Это значит, что

$$N = 7 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 1.$$

Перейдем теперь к двоичной записи числа N, для чего представим N в виде суммы различных степеней числа 2.

Заметим, что числа 7, 3 и 5 имеют такие двоичные записи: 111, 011, 101; иначе говоря, $7 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$, $3 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$, $5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$.

Поэтому $N = (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1) \cdot 2^6 + (0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1) \cdot 2^3 + (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 1$.

А это означает, что число N допускает следующую запись в двоичной системе счисления: $N = 111011101$, то есть двоичная запись числа N может быть получена из его восьмеричной записи, если каждую цифру восьмеричной записи (7, 3, 5) переписать в двоичной системе счисления с помощью *трех* двоичных знаков (то есть заменить на 111, 011, 101).

Можно показать, что это правило (которое мы подметили на частном примере) верно для любого числа N.

Двоичная и троичная системы счисления находят применение и в чисто теоретических вопросах современной математики, например в теории множеств.

В машинной математике применяется и так называемая *двоично-десятичная запись* чисел: число записывается в десятичной системе счисления, а каждая цифра — в виде (четырехзначного) двоичного числа; например, двоично-десятичная запись

$$100101010001$$

означает, что задано число

$$951$$

(в десятичной записи). В двоично-десятичной записи числа обычно вводятся в электронную цифровую машину. Сама машина по специальной (и сравнительно простой) программе находит затем двоичную запись числа.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НАТУРАЛЬНЫХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Применяя элементарную алгебру, можно решить некоторые задачи теории чисел.

1. Возьмите два произвольных натуральных числа. Составьте их сумму, разность и произведение. Хотя бы одно из этих вновь полученных чисел обязательно делится на 3! Проверьте это на примерах. Докажите, что это всегда будет так.

2. Докажите, что любое натуральное число и его пятая степень оканчиваются одной и той же цифрой.

3. Некоторое четное число является суммой двух точных квадратов. Докажите, что и его половина является суммой двух точных квадратов.

4. $3^2 = 9$; $5^2 = 25$; $7^2 = 49$; $9^2 = 81$. Каждое из чисел 9, 25, 49, 81 при делении на 8 дает остаток 1. Что это: случайность или же этому закону подчинены квадраты всех нечетных чисел?

5. Пусть у целых чисел A и B последние k цифр одинаковы. Докажите, что у чисел A^n и B^n (n — любое натуральное) также k последних цифр одинаковы (ограничиться случаями $n = 2, 3, 4$).

6. Докажите, что квадрат числа, являющегося суммой двух точных квадратов, также можно представить в виде суммы двух точных квадратов.

7. Докажите, что произведение двух целых чисел, из которых каждое есть сумма квадратов двух целых чисел, можно представить в виде суммы двух точных квадратов

8. Докажите, что $n^7 - n$ делится на 42 (n — натуральное число).

9. Рассмотрим числа вида $2^{2^n} + 1$ (их называют иногда «числами Ферма»); при $n = 2, 3, 4$ мы получим числа 17, 257, 65537. Эти числа оканчиваются на 7. Докажите, что при любом натуральном n, большем единицы, число $2^{2^n} + 1$ оканчивается семеркой.

10. Сложили каких-то 3 целых числа, и их сумма разделилась на 6. Докажите, что сумма кубов тех же чисел также разделится на 6.

11. Докажите, что сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть точным квадратом.

12. Число 365 нечетное. В то же время 365 можно представить в виде разности двух точных квадратов: $365 = 39^2 - 34^2$ и $365 = 183^2 - 182^2$. Докажите, что *любое* нечетное число можно представить в виде разности двух точных квадратов.

13. Целое число x заключено между 0 и 60 ($0 < x < 60$). При делении числа x на 3, 4, 5 получили соответственно остатки a, b, c. Докажите, что x равен остатку от деления числа $40a + 45b + 36c$ на 60. (На этом основан фокус — угадывание задуманного числа по остаткам от деления этого числа на 3, 4, 5.)

14. Число 148 делится на 37. Переставим в нем первую цифру с начала в конец: получится 481. Оно тоже делится на 37! Снова переставим первую цифру (4) на последнее место. Опять получим число, которое делится на 37! Верно ли аналогичное свойство для каждого трехзначного числа, делящегося на 37?

15. Пусть требуется извлечь квадратный корень из смешанной дроби. Вообще говоря, вынести целую часть из-под корня нельзя, например:

$$\sqrt{5\frac{4}{9}} \neq 5\sqrt{\frac{4}{9}}$$

(левая часть равна $\frac{7}{3}$, а правая $\frac{10}{3}$). Но вот примеры, когда такое преобразование корня не приводит к ошибке:

$$\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}; \quad \sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Найдите все случаи, когда такое преобразование возможно.

16. Можно ли сократить дробь, зачеркивая в числителе и знаменателе дробные части? Вообще говоря, нельзя. Например:

$$\frac{3\frac{8}{11}}{7\frac{5}{11}} \neq \frac{3}{7}.$$

А в некоторых случаях можно! Например:

$$\frac{6\frac{1}{5}}{5\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}.$$

Приведите формулу, дающую бесконечно много таких дробей, для которых такое сокращение возможно.

** **17.** *Странный способ сокращения дроби.* Можно ли сокращать дробь, зачеркивая в числителе и знаменателе одну и ту же цифру (в числителе последнюю, а в знаменателе первую)? Вообще говоря, нельзя. Например:

$$\frac{17}{73} \neq \frac{1}{3}.$$

А в некоторых случаях (их бесконечно много) можно! Например:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}; \quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5}; \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}; \quad \frac{49}{98} = \frac{4}{8}.$$

Возьмем какую-либо дробь, которую можно сократить этим странным способом, например $\frac{19}{95}$. Если вы теперь припишете в числителе справа сколько угодно девяток, а в знаменателе слева столько же девяток, то опять получится дробь, которую можно сократить этим странным способом:

$$\frac{19}{95} = \frac{199}{995} = \frac{1999}{9995} = \ldots = \frac{1}{5}.$$

Аналогично

$$\frac{16}{64}=\frac{166}{664}=\frac{1666}{6664}=\ldots=\frac{1}{4}.$$

Вообще, если $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}=\frac{a}{c}$ (a и c — какие-либо числа), а $x=\overline{abb\ldots b}$ (n цифр b), $y=\overline{bb\ldots bc}$ (n цифр b), то при любом натуральном n

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{c}.$$

Докажите это утверждение.

§ 3. АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА И АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ[1]

1. Что такое абсолютная величина действительного числа?

2. Можно ли говорить что «абсолютная величина — это число без знака»?

*3. В чем ошибка? Пусть b — произвольное число и $a=-b$. Тогда $a^2=b^2$, $\lg(a^2)=\lg(b^2)$, $2\lg a=2\lg b$. Обозначим $\lg a$ через α, а $\lg b$ через β. Тогда $\alpha=\beta$, $a=10^{\alpha}$, $b=10^{\beta}$. Так как $\alpha=\beta$, то $10^{\alpha}=10^{\beta}$, то есть $a=b$. Но по условию $a=-b$. Складывая почленно последние два равенства, получим: $2a=0$, то есть $a=0$. Поэтому $b=0$. Но b — произвольное число. Итак: каждое число равно нулю! В чем ошибка?

4. Существует ли угол, удовлетворяющий условию:

$$2\sin x-\sqrt{1-\cos^2 x}=-3? \qquad (1)$$

Очевидно, нет. В самом деле, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$. Поэтому $1-\cos^2 x=\sin^2 x$. Мы получим $2\sin x-\sin x=-3$, то есть $\sin x=-3$, что невозможно (при любом x $\sin x$ заключен между -1 и 1). Но, с другой стороны, покажем, что угол $x=270°$ удовлетворяет условию (1). В самом деле,

$$2\sin 270°-\sqrt{1-\cos^2 270°}=2\cdot(-1)-\sqrt{1-0}=-3.$$

Почему получилось такое противоречие?

5. Что такое арифметический корень?

6. Постройте графики функций:

а) $y=|x|$; б) $y=\sqrt{(x-1)^2}$; в) $y=|x-1|+|x-3|$;

г) $y=\sqrt{(x^2-4)^2}+\sqrt{(x^2+4)^2}$; д) $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

7. Верно ли, что

$$\sqrt{\sec^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha}=1-\operatorname{tg}\alpha?$$

---

[1] В дальнейшем в этом разделе все числа действительные, а корни арифметические.

Глава IV

ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ

§ 1. ЧТЕНИЕ ГРАФИКОВ

Начерченный график — это краткое и наглядное описание какого-либо процесса, или цепочки событий, или ряда наблюдений. Недаром считают, что график — это «говорящая линия», которая может много рассказать. Но она рассказывает только тем, кто умеет ее читать. Умеете ли вы читать графики? Вот несколько примеров для самопроверки.

1. Велосипедист отправился 1 июня из Смоленска в Ярцево. На рисунке 59 дан график его движения. По оси x отложим время в часах, прошедшее от начала суток 1 июня, по оси y — расстояние от велосипедиста (по дороге Смоленск—Ярцево) до Смоленска (в километрах). Расскажите (пользуясь графиком) об этом путешествии. (Когда велосипедист выехал из Смоленска? Когда вернулся? Когда прибыл в Ярцево? Долго ли он там оставался? Как проходил его обратный путь? Когда он ехал быстрее всего?)

2. Они заболели в один и тот же день — 1 июля: Петя — корью, Сережа — скарлатиной. На графике 60 вы видите, как менялась температура Пети, а на графике 61—как менялась температура

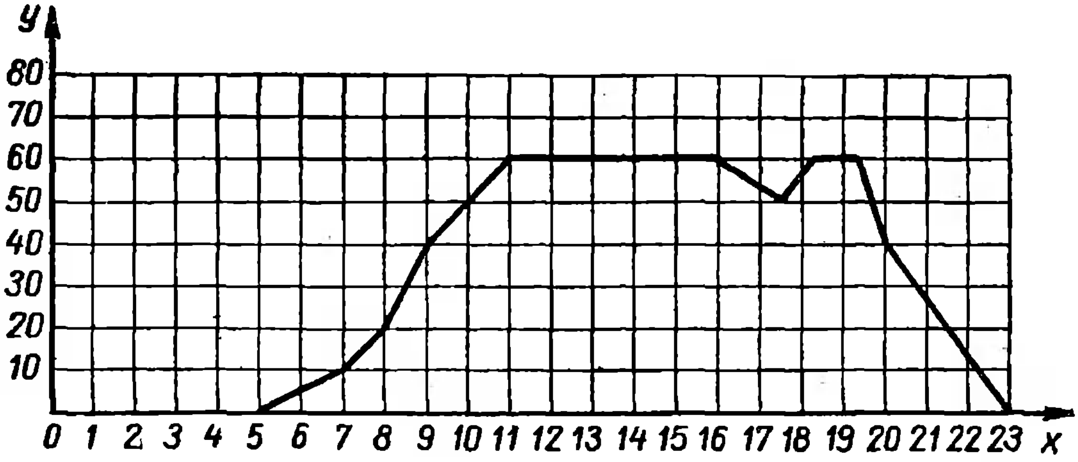


Рис. 59.

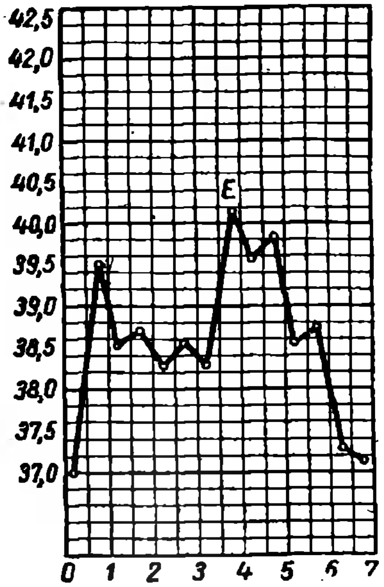


Рис. 60.

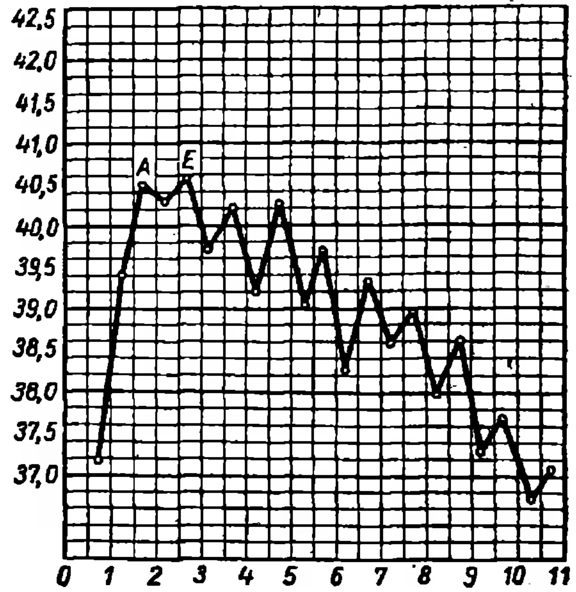


Рис. 61.

Сережи. На этих графиках по оси абсцисс откладывается время (в сутках), протекшее от полуночи 30 июня, по оси ординат — температура больного (в градусах). Пользуясь этими графиками, ответьте на следующие вопросы: 1) какая была температура у ребят поздно вечером 1 июля? 2) А 7 июля? 3) Какого числа у Пети появилась сыпь? (Сыпь при кори появляется тогда, когда у больного температура оказывается наибольшей.) 4) Какая была самая высокая температура у Сережи? Когда это было?

3. На рисунке 62 показано, как изменялся уровень воды в Днепре у Смоленска в марте — июне 1966 года. На графике по оси абсцисс отложено время (в сутках), а по оси ординат—превышение уровня воды в реке (в *см*) над начальным уровнем (уровнем, достигнутым 24 февраля). Пользуясь этим графиком, ответьте на такие вопросы: 1) когда был достигнут максимальный уровень воды? 2) На сколько сантиметров поднялся уровень воды в течение марта? 3) Были ли в конце мая сильные дожди?

4. Один из возможных режимов отжига достаточно хорошо описывается графиком на рисунке 63. Пользуясь им, расскажите, как происходило изменение температуры отливки при этом режиме. По оси абсцисс откладывается время в часах, прошедшее с момента помещения отливки в печь, по оси ординат — температура отливки в градусах Цельсия.

В частности, ответьте на такие вопросы: 1) какова была примерно температура отливки в начале отжига? 2) До какой наибольшей температуры нагревали печь? 3) Сколько времени поддерживали максимальную температуру (примерно) постоянной? 4) Как менялась температура печи в течение последующих 7—8

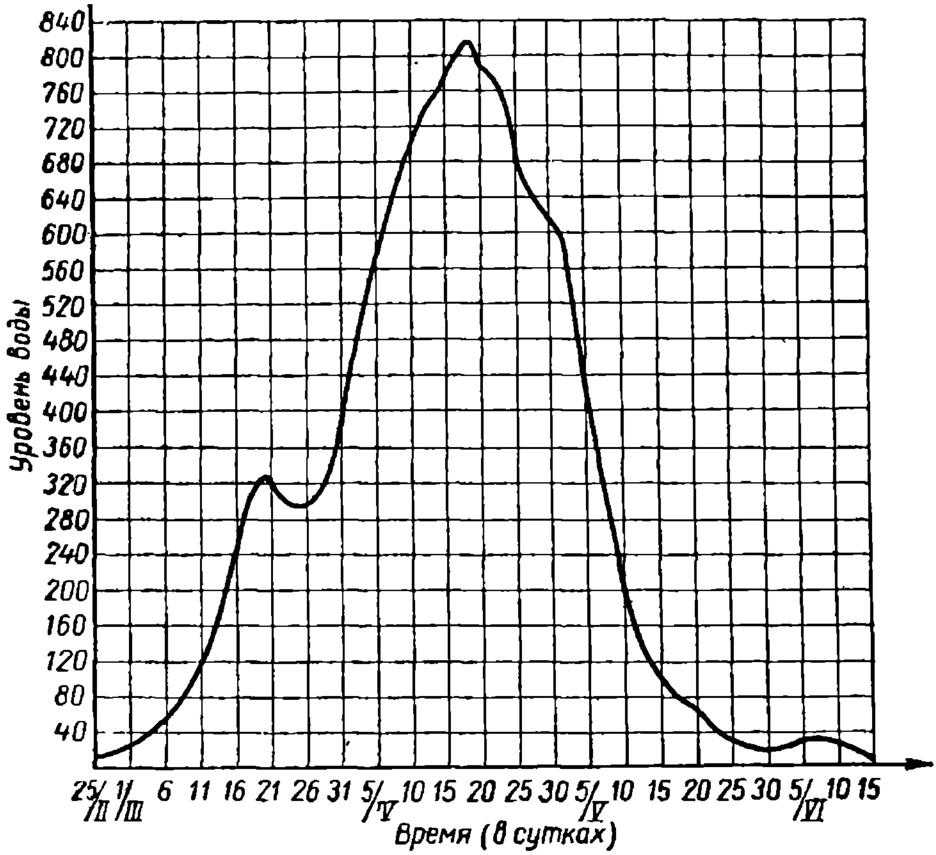


Рис. 62.

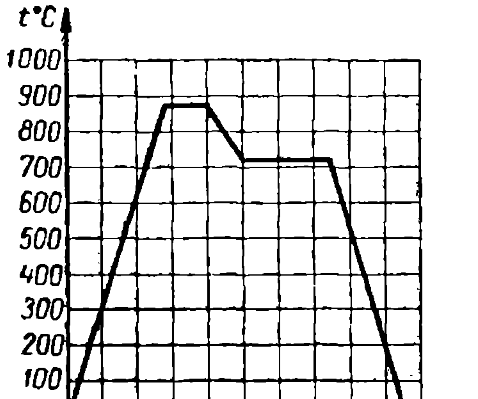


Рис. 63.

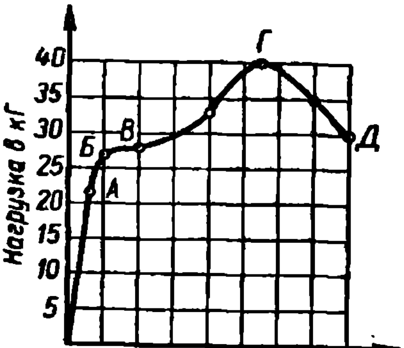


Рис. 64.

часов? 5) После некоторого охлаждения печи в ней снова поддерживали постоянную температуру. Какую (примерно в градусах)? Как долго? 6) Сколько времени длилось охлаждение детали (от температуры около 720°)? 7) Сколько времени длился весь отжиг?

5. Кусок проволоки из мягкой стали длиной в 10 *см* и попе-

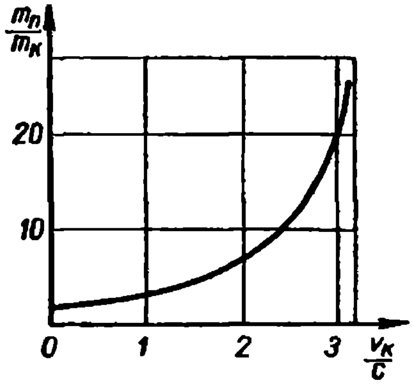


Рис. 65.

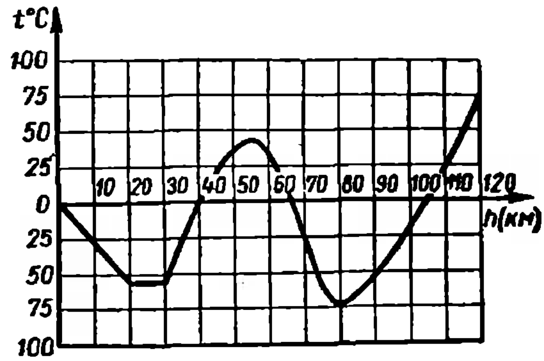


Рис. 66.

речного сечения в 1 $мм^2$ подвергли растяжению под действием плавно возрастающей нагрузки. Проволоку растягивали до тех пор, пока она не лопнула. На графике (рис. 64) по оси абсцисс отложены удлинения проволоки (в миллиметрах), а по оси ординат — соответствующие нагрузки (в килограммах). Пользуясь графиком, расскажите, как происходил опыт. Особое внимание обратите на точки *Б*, *В*, *Г*.

6. Пусть m_n — масса космической ракеты в начале пути, m_k — масса ракеты после сжигания всего топлива, c — скорость истечения газов из сопла ракеты (предполагается неизменной), v_k — скорость ракеты в конце активного участка пути (то есть в момент выключения двигателя). Зависимость между $\frac{m_n}{m_k}$ и $\frac{v_k}{c}$ графически изображена на рисунке 65 (в предположении, что притяжением Земли и сопротивлением атмосферы можно пренебречь). Пользуясь этим графиком, можно ответить на многие вопросы. Приведем примеры.

1. Для того чтобы ракета могла стать искусственным спутником Земли нужно, чтобы она получила скорость около 8 *км/сек*. Если $c = 4$ *км/сек*, то во сколько раз вес топлива должен быть больше веса остальной части ракеты?

2. Практически нереально построить ракету, для которой $m_n > 20\, m_k$. Исходя из этого, найдите, какая должна быть наименьшая скорость истечения газов, чтобы ракета получила скорость 8 *км/сек*.

3. Какая дробь растет быстрее: $\frac{m_n}{m_k}$ или $\frac{v_k}{c}$? Установите это на нескольких примерах. Заметим, что рисунок 65 представляет собой графическое изображение известной формулы К. Э. Циолковского: $\frac{m_n}{m_k} = e^{\frac{v_k}{c}}$, где $e = 2{,}7182 \ldots$.

7. На графике (рис. 66) дано распределение температуры земной атмосферы по высоте по ракетным данным.

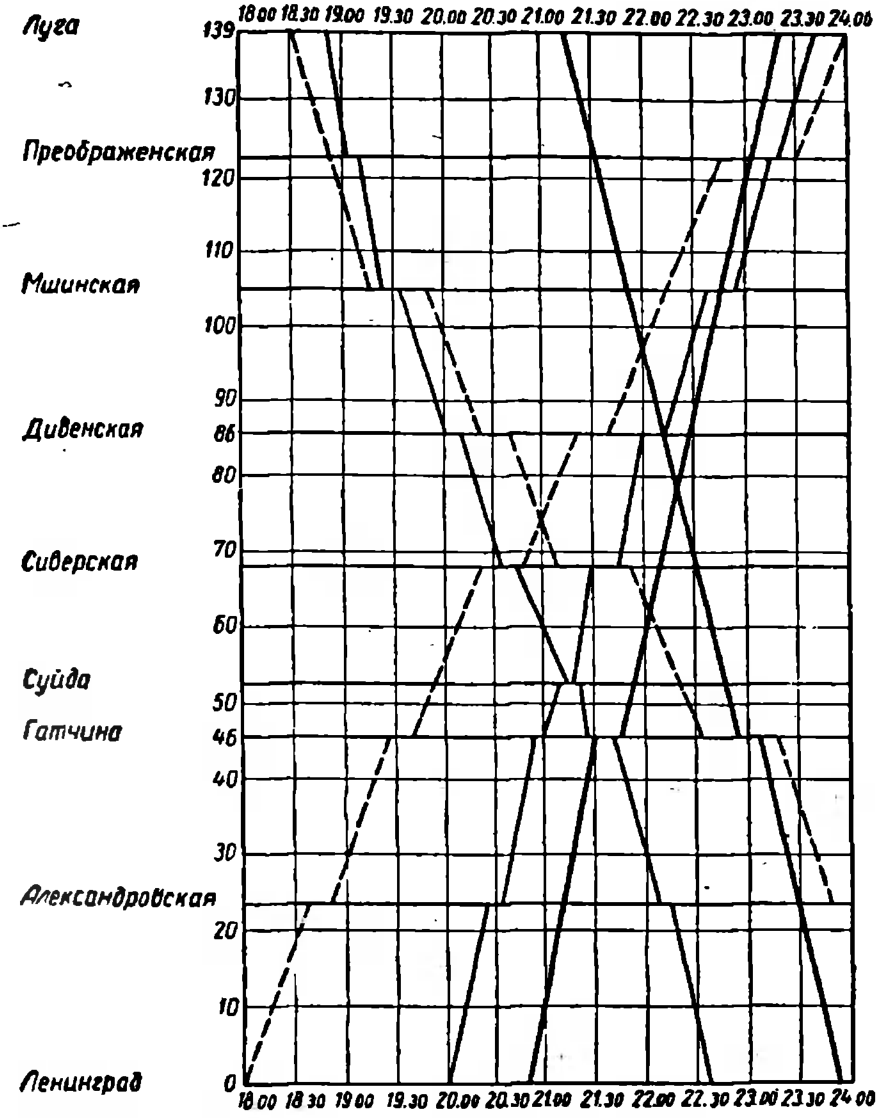


Рис. 67.

Пользуясь этим графиком, расскажите о том, как меняется температура с высотой.

8. На рисунке 67 изображен график движения поездов на участке Ленинград—Луга между 18 и 24 часами. На нем нанесены 6 графиков — по числу поездов. Каждый из них показывает изменение расстояния между поездом и Ленинградом с течением времени. При составлении этих графиков для простоты принято, что между двумя последовательными станциями поезд движется равномерно. Графики двух скорых поездов нанесены жирными линиями, пассажирских — сплошными тонкими линиями, а товарных — пунктирными. Пользуясь графиком, ответьте на следующие вопросы о движении этих поездов: 1) укажите (с точностью до 10 минут) моменты отправления поездов из Ленинграда. Когда они прибывают в Лугу? 2) Сколько остановок делал скорый поезд, отправ-

ленный из Ленинграда, между Ленинградом и Лугой? Где? На сколько минут? 3) Где этот скорый поезд обогнал два других поезда? Когда это происходило? 4) Где и в какое время он встречал скорый поезд, идущий из Луги в Ленинград? 5) Где находился каждый из 6 поездов в 22 часа (на какой станции или между какими станциями)? 6) В какое время каждый из 6 поездов прибывал на станцию Сиверскую? Каждый ли из них там останавливался? 7) С какой средней скоростью проходил каждый из 6 поездов расстояние между Ленинградом и Лугой?

§ 2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Решая задачу с помощью алгебры, мы часто ее сводим к решению некоторого уравнения или системы уравнений. При этом стремимся составить по условиям задачи столько (независимых) уравнений, сколько имеется неизвестных.

Но бывают и такие задачи, для которых это сделать невозможно: число независимых уравнений, которые можно составить по условию задачи, меньше числа неизвестных; например, может оказаться, что по условию задачи мы можем составить только одно уравнение, хотя неизвестных два. Однако может случиться, что условие задачи накладывает какие-то *другие дополнительные ограничения* на неизвестные, которые вместе с полученными уравнениями позволяют *полностью* найти значения неизвестных: например, из условия может быть ясно, что искомые числа — целые, или натуральные, или заключены в заданных пределах и т. п. Приведем один простой пример. Пусть требуется найти двузначное число, у которого сумма цифр равна 1.

Если x число его десятков и y — число единиц, то получаем только одно уравнение для этих двух неизвестных:

$$x+y=1, \tag{1}$$

и существует *бесконечно много действительных* чисел, удовлетворяющих этому условию. Но по смыслу задачи

x и y — ц е л ы е числа,

причем

$$x \geqslant 1, \ y \geqslant 0 \tag{2}$$

Уравнение (1) и дополнительные условия (2) уже позволяют однозначно найти неизвестные. Действительно, если бы мы имели

$$x > 1,$$

то было бы $x+y>1$,

что противоречит уравнению (1).

Следовательно, x не больше, чем 1, и в то же время $x \geqslant 1$. Значит, $x=1$. А тогда $y=0$.

Таким образом, хотя для *двух* неизвестных мы имели только одно уравнение, мы благодаря дополнительным условиям сумели однозначно определить искомые неизвестные.

Уравнение, которое содержит больше чем одно неизвестное, называется **неопределенным**.

Аналогично, система уравнений, у которых неизвестных больше, чем независимых уравнений, называется **неопределенной**. При этом, разумеется, каждый раз должно быть указано то множество чисел, к которому обязаны принадлежать неизвестные.

Чаще всего требуется, чтобы неизвестные были целыми числами или натуральными числами. Тогда говорят, что **ищется решение** (неопределенного уравнения или неопределенной системы уравнений) **в целых числах** (или, соответственно, в натуральных числах).

Рассмотрите теперь следующие задачи, которые приводят к неопределенным уравнениям.

1. Было написано трехзначное число, затем из его цифр были составлены всевозможные двузначные числа (с неповторяющимися цифрами) и найдена их сумма. Оказалось, что она вдвое больше исходного трехзначного числа. Какое же это было трехзначное число?

2. Вот один забавный фокус с угадыванием чисел. На спинках трех стульев приклеены номера 3, 5, 8. Ведущий предлагает трем школьникам *А*., *Б*., *В*. подойти к стульям. Сам он отворачивается от них и предлагает им сесть на эти стулья (он не видит, кто на какой стул сел). Затем он говорит: «*А*., умножь номер твоего стула на 2; *Б*., припиши к номеру твоего стула справа 0; *В*., умножь номер своего стула на 11. Полученные три числа сложите. Сколько получилось?» (Пусть получилось 141.) Ведущий угадывает: «А. сел на стул № 3, Б. — на стул № 8, В. — на стул № 5».

Разгадайте этот фокус, привлекая неопределенные уравнения; научитесь сами проделывать такой фокус.

2. Одно из наиболее простых неопределенных уравнений имеет вид

$$ax + by = c,$$

где a, b, c — данные целые числа, а x и y — искомые целые числа. К таким уравнениям приводят разнообразные задачи (с некоторыми встретимся немного ниже).

3. а) Подберите какую-либо пару целых чисел x, y, которая была бы решением уравнения

$$2x - 3y = 1.$$

б) Существует ли пара целых чисел x, y, которая удовлетворяла бы уравнению

$$9x - 12y = 17\,?$$

в) Докажите: если число c не делится на наибольший общий делитель чисел a и b, то уравнение

$$ax + by = c$$

не имеет решений в целых числах.

4. а) Легко проверить, что частным решением (то есть одним из решений) уравнения

$$5x + 8y = 7$$

является пара чисел $x = 3$, $y = -1$.
Найдите еще три каких-нибудь частных решения этого уравнения.

б) Покажите, что это уравнение имеет бесконечно много целочисленных решений: при любом целом t пара чисел

$$x = 3 - 8t; \quad y = -1 + 5t$$

является решением того же уравнения.

5. Если кто-то сумеет подобрать одно частное целочисленное решение (x_0, y_0) уравнения

$$ax + by = c \quad (a,\ b,\ c \text{ — целые числа}),$$

то можно ли затем назвать сколько угодно целочисленных решений того же уравнения? По каким формулам вычислить эти решения?

6. Вот отрывок свидетельских показаний: «Когда я был в магазине, к кассиру подошел человек и уплатил за партию кресел, которую он купил. Я видел, что он уплатил пятерками не менее 200 рублей и что кассир дал ему сдачи 1 рубль. Кресла он погрузил на машину — думаю, что их было не более двух десятков. Потом я узнал, что каждое кресло стоило 13 рублей». Можно ли по этим данным восстановить, сколько кресел было куплено?

7. Однажды встретились четыре любителя математики. Во время их разговора один, между прочим, сказал:

— Я еще помню, как разделить окружность на 5 равных частей.

— А вот я знаю, как разделить окружность на 17 равных частей, — заметил второй.

— Я не помню того, что ты помнишь, — сказал третий первому,— и не знаю того, что ты знаешь,— сказал он второму.— Но если вы оба сказали правду, то я сумею предложить способ, как разбить окружность на 85 равных частей.

— Ну, если они оба сказали правду, — заметил четвертый, — то я сумею предложить бесконечно много таких способов.

Сумеете ли вы сделать то, что обещали третий и четвертый?

·8. З а д а ч а Л е о н а р д о Ф и б о н а ч ч и (XII век). Некто купил 30 птиц за 30 монет (одного достоинства). За каждых 3 воробья уплачена 1 монета, за каждых 2 снегиря — тоже 1 монета, а за каждого голубя — по 2 монеты. Сколько было птиц каждого вида?

9. Три школьника — Алик, Боря и Володя — купили книги. Среди купленных книг имеются книги четырех наименований стоимостью в 50, 20, 10, 5 копеек. Каждый школьник уплатил

2 рубля и купил 20 книг четырех различных наименований. Алик купил больше книг стоимостью по 10 копеек, чем Боря, но меньше, чем Володя. Сколько книг каждого наименования купил каждый школьник?

10. Три студента Александр, Борис и Владимир вместе со своими младшими сестрами Леной, Машей и Олей зашли в книжный магазин. Александр купил 1 книжку, Борис — 2, Владимир — 3. В другом отделе магазина они вновь купили книги: брат Лены — еще столько, сколько купил раньше; брат Маши — вдвое больше, чем прежде, а брат Оли — вчетверо больше, чем прежде. Всего они купили в магазине 23 книги. Кто чей брат?

11. Задумали трехзначное число. Когда к нему прибавили 7, то оно разделилось на 7 нацело. К результату такого деления прибавили 8, и тогда полученное число разделилось на 8. После этого деления к полученному частному прибавили 9, и тогда результат разделился нацело на 9. Задуманное число оканчивается на 5. Какое число задумали?

12. К трехзначному числу прибавили 7, и оказалось, что сумма кратна 7. Когда к полученной сумме прибавили 8, то оказалось, что результат кратен 8, а когда прибавили еще 9, то сумма разделилась на 9. Какое число задумано, если известно, что все его цифры различные?

3. Неопределенные уравнения степени выше первой. Рассмотрим теперь несколько задач, которые приводят к неопределенным уравнениям второй или третьей степени.

13. Назовите все возможные пары целых чисел, которые при умножении дают столько же, сколько при их сложении.

14. В шахматном турнире участвовали два ученика VII класса и некоторое число учеников VIII класса. Каждый участник сыграл с каждым из остальных одну партию. Два семиклассника набрали вместе 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же число очков. Всех участников было меньше 15. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире?

15. (Старинная задача.) Три крестьянина Петр, Павел и Андрей и их жены Екатерина, Мария и Валентина отправились в магазин. Каждый из них купил столько вещей, сколько рублей он заплатил за каждую вещь. Петр купил 23 вещами более, чем Мария, а Павел — одиннадцатью вещами более, чем Екатерина. Известно еще, что каждый муж истратил на 63 рубля больше, чем его жена. Спрашивается: как звали жен Петра, Павла и Андрея?

16. Решите в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=1.$$

17. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}+\frac{1}{z}$. (Это уравнение имеет важное значение в теории правильных многогранников.)

18. Дано уравнение $2(x^2+y^2)=z^2$. Проверьте, что при любых целых p и q формулы $x=(p+q)^2-2p^2$, $y=(p+q)^2-2q^2$, $z=2(p^2+q^2)$ дают целочисленное решение этого уравнения.

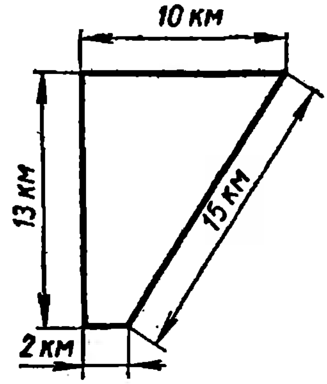


Рис. 68.

§ 3. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

1. Каковы наименьшие значения функций:

$$x^2;\ 2x^2+7;\ 2(x-3)^2+7;\ 2x^2-12x+25?$$

При каких значениях переменного x они достигаются?

2. Выясните, какое наибольшее или наименьшее значение может принять каждая из следующих функций: а) $\frac{1}{1+x^2}$; б) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

3. При каком (действительном) значении числа x трехчлен x^2+x+1 будет принимать свое наименьшее значение? Чему равно это наименьшее значение?

4. Герой рассказа Л. Толстого «Много ли человеку земли нужно» Пахом договорился с башкирами, что за 1000 рублей они отдадут ему столько земли, сколько он обойдет за целый день — от восхода до захода солнца. Пахом обошел за это время контур трапеции, указанной на рисунке 68. Ее периметр 40 *км*, а площадь — 78 *км*^{2}. Мог ли Пахом, пройдя 40 *км*, обойти контур четырехугольника с большей площадью?

5. Каким следует выбрать число x для того, чтобы сумма $S=(x-a)^2+(x-b)^2+\ldots+(x-l)^2$ (n слагаемых) имела наименьшее из возможных значений? Здесь $a, b, \ldots, l$ — постоянные числа (действительные).

6. Покажите, что при любом действительном x функция $S=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10$ положительна. При каком x этот многочлен будет иметь свое наименьшее значение? Чему равно это наименьшее значение?

§ 4. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В математике и ее приложениях нередко бывает, что требуется найти какую-то рациональную функцию[1], общий вид которой известен; неизвестны только входящие в этот «общий вид» числовые коэффициенты. Например, может разыскиваться *многочлен заданной степени n*; тогда искомая функция имеет вид

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Коэффициенты же, входящие в эту формулу, неизвестны. Или иногда может быть известно, что искомая рациональная функция имеет, скажем, такой вид:

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1},$$

где A, B, C — какие-то постоянные числа, которых мы не знаем.

В подобных случаях пытаются найти неизвестные коэффициенты из условий той задачи, которая приводит к данной функции.

Относительно неизвестных коэффициентов получаем систему уравнений (часто — первой степени); решая ее, мы и найдем искомые коэффициенты.

Отметим, что при решении задач этим методом часто приходится пользоваться таким свойством многочленов: если два многочлена тождественно равны, то и коэффициенты у соответствующих одночленов этих многочленов тоже равны.

Метод неопределенных коэффициентов находит разнообразные приложения в математике. Вы легко освоитесь с этим методом, если решите следующие задачи.

1. Не умножая три двучлена $(x-1)(x-2)(x+3)$, вычислите коэффициенты этого многочлена.

2. Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, выведите формулу для куба суммы трех чисел.

3. Разложите на множители следующие многочлены (пользуясь методом неопределенных коэффициентов):

а) $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$; б) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

4. Вычислите сумму: $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 101}$ (предварительно разложите дробь $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ на простейшие).

---

[1] Функция от переменного x называется рациональной, если каждое ее значение получается из соответствующего значения аргумента x и каких-то постоянных чисел лишь с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления. Примером может служить многочлен от x или отношение двух таких многочленов.

5. Вычислите суммы:

а) $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\ldots+\frac{1}{20\cdot23}$;

б) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{100\cdot101\cdot102}$

6. Кто-то написал квадратный трехчлен со старшим коэффициентом, равным -1, возвел его в квадрат и сообщил результат: $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.

Каков был первоначально написанный трехчлен?

(I) § 5. НЕПРЕРЫВНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ

В различных разделах математики нередко удается получить правильный ответ на ту или иную задачу, если воспользоваться простейшими свойствами величин, *непрерывно* меняющихся с течением времени.

Наглядное представление о таких величинах имеет каждый. Можно привести немало примеров, когда мы, опираясь на эти наглядные представления, скажем, что та или иная величина меняется непрерывно с течением времени: путь, пройденный какой-либо движущейся точкой, непрерывно растет со временем; непрерывно меняется со временем величина угла, «заметаемого» каким-либо лучом; непрерывно меняется площадь, «заметаемая» каким-либо движущимся отрезком.

Вообразим отрезок $[a, b]$ и над ним «навес» AB, как на рисунке 69. Будем мысленно перемещаться с какой-то постоянной скоростью по отрезку $[a, b]$ в направлении от a к b и замерять высоту h «навеса» (над той точкой, где мы находимся). Эта величина h будет с течением времени меняться непрерывно. Совершенно иная картина имеет место, если «навес» над отрезком $[a, b]$ имеет такой вид, как указано на рисунке 70. В этом случае высота «навеса» h будет ме-

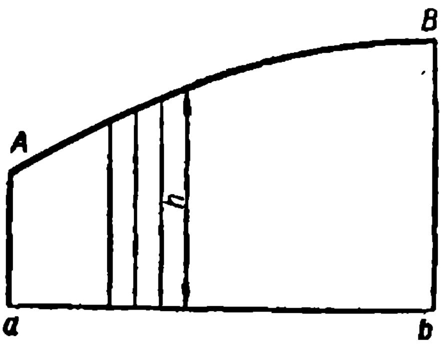


Рис. 69.

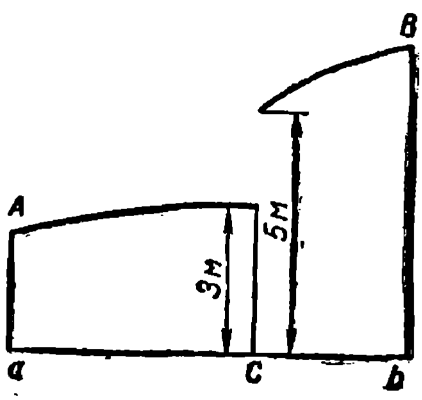


Рис. 70.

няться непрерывно лишь до того момента (скажем, t_0), когда мы придем в точку C. В этот момент величина h увеличится «скачком» с 3 до 5 метров. После этого «скачка» в течение всего времени движения до точки b величина h снова будет меняться непрерывно.

Отправляясь от таких *наглядных* представлений, мы можем дать математическое определение того, что значит, что какая-то величина U меняется с течением времени *непрерывно*. Это значит, что при любом выборе момента t_0 в течение достаточно малого промежутка времени $(t_0 - h,\ t_0 + h)$ значения этой величины отличались от ее значения в момент t_0 меньше, чем на наперед заданное допустимое отклонение d. Следует иметь в виду, что здесь допустимое отклонение d задано заранее и может быть выбрано как угодно малым; утверждается, что в зависимости от d можно для каждого момента t_0 подобрать настолько малый промежуток времени $(t_0 - h,\ t_0 + h)$, чтобы значение величины U в любой момент из этого промежутка отличалось от его значения в момент t_0 меньше, чем на d.

В конкретных случаях бывает обычно достаточно ясно, меняется ли та или иная величина непрерывно.

При решении задач особенно полезно следующее свойство непрерывно меняющейся величины: *если какая-либо величина* (например, длина, угол, сумма углов, площадь и т. п.) *менялась непрерывно в течение какого-либо отрезка времени и в начальный момент она была меньше какой-то постоянной a, а в конечный — больше, чем a, то в какой-то промежуточный момент она была равна a.* В школе это свойство можно принять без доказательства.

Проиллюстрируем применение этого свойства на одном примере. Учащиеся X класса встретились однажды со следующей задачей.

«Доказать, что нельзя вписать в окружность четырехугольник, стороны которого были бы пропорциональны числам 5, 4, 3, 6».

Так как им не удалось найти доказательство этого утверждения, то у них возникло подозрение, что оно вовсе не верно; встал вопрос, как опровергнуть это предложение.

Для этой цели вообразим себе шарнирный четырехугольник со сторонами, равными 5, 4, 3, 6 единицам (рис. 71).

Чтобы опровергнуть приведенное выше предложение, достаточно показать, что у такого четырехугольника сумма углов A и C может оказаться равной 180°. Так как $AB + BC = CD + DA$, то можно деформировать (сдвинуть) четырехугольник таким образом чтобы все его вершины оказались на одной прямой (рис. 72).

В этом «начальном» положении четырехугольника

$$A + C = 0^0 < 180^\circ.$$

Будем теперь сжимать четырехугольник (рис. 73, *а*) в направлении AC до тех пор, пока вершина C не окажется на отрезке BD (рис. 73, *б*). В этом «конечном» положении

$$A + C > 180^\circ.$$

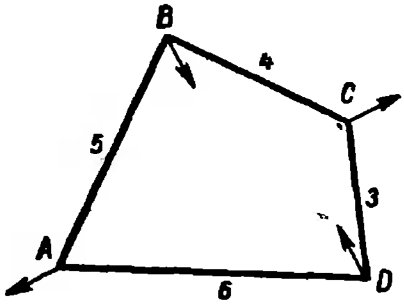


Рис. 71.

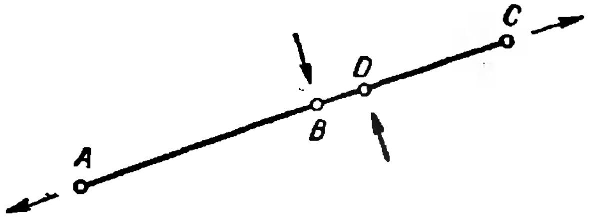


Рис. 72.

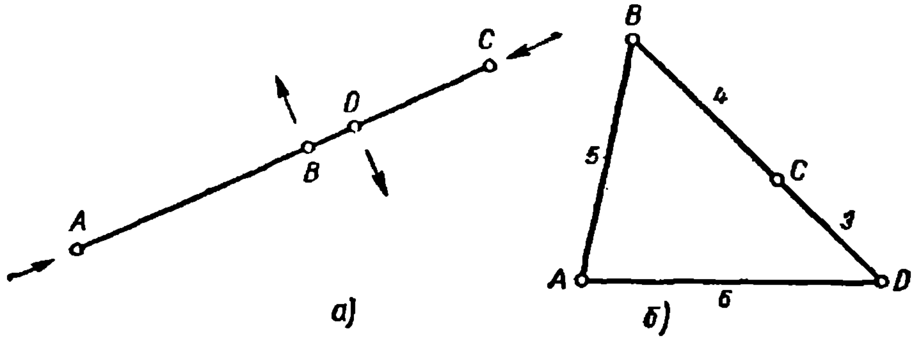


Рис. 73.

Так как из «начального» положения мы пришли к «конечному» положению, непрерывно изменяя сумму $A + C$, то в какой-то промежуточный момент величина $A + C$ была *равна* 180°. Следовательно, существует такое положение четырехугольника $ABCD$, при котором около него можно описать окружность. Тем самым мы опровергли то предложение, которое вызвало у нас сомнение.

1. Имеет ли уравнение $x^3 + x = 1$ хоть один положительный корень? Хоть один корень между $\frac{1}{2}$ и 1?

*2. Пользуясь соображениями непрерывности, выясните, имеет ли уравнение $x + 0{,}3 \sin x = 6{,}7$ хотя бы один корень в промежутке между 2π и 3π.

3. Два круга расположены один вне другого; их радиусы равны 1 *дм* и 2 *дм*. Существует ли такая прямая, которая в пересечении с этими кругами образует две хорды суммарной длины, равной $\sqrt[1970]{1970}$ *дм*? Существует ли такая прямая среди прямых, параллельных линии центров данных кругов?

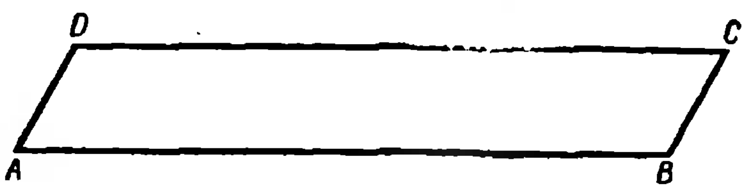


Рис. 74.

4. Существует ли такой квадрат, который был бы описан около параллелограмма, изображенного на рисунке 74 [1]? Здесь $AB = 20$ *см*, $AD = 1$ *см* и $\angle BAD = 60°$.

В наших рассуждениях мы ограничивались рассмотрением величин (u), непрерывно меняющихся с течением времени (t), или, как говорят, непрерывных функций от времени t. Но совершенно аналогично можно рассматривать непрерывные функции от произвольного другого аргумента (например, длину стержня как функцию от температуры, площадь прямоугольника с данным основанием как функцию от его высоты и т. д.). Свойства непрерывных функций изучаются и широко используются в математическом анализе и других разделах высшей математики.

---

[1] Прямоугольник считается описанным около параллелограмма, если все вершины параллелограмма лежат на контуре прямоугольника, причем на каждой стороне прямоугольника (быть может, в конце этой стороны) помещается вершина параллелограмма.

Глава V

ИЗУЧАЯ ПЛАНИМЕТРИЮ...

§ 1. ОТ ЕВКЛИДА ДО ЛОБАЧЕВСКОГО

(О V ПОСТУЛАТЕ ЕВКЛИДА)

1. С разнообразными геометрическими фигурами, с измерением длин, площадей и объемов людям приходилось иметь дело с незапамятных времен. В практических наблюдениях они подмечали различные геометрические закономерности. Так, древние египтяне знали из опыта, что треугольник, у которого одна сторона равна трем единицам, вторая — четырем, а третья — пяти единицам, обязательно имеет один п р я м о й угол. В дошедших до нас древнеегипетских письменных памятниках — в Московском папирусе и папирусе Ахмеса «Наставление, как достигать всех темных вещей, всех тайн, содержащихся в предметах» содержатся важные геометрические факты, например, формула для вычисления объема пирамиды.

Когда геометрических сведений накопилось много, то их стали приводить в определенную систему, стали пытаться вывести из них путем рассуждения, без непосредственного обращения к опыту, новые геометрические факты.

Особенно большие достижения в этом направлении были получены древнегреческими философами в VII—III веках до нашей эры. Так, греческий философ Фалес из Милета установил, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам. Однажды, во время путешествия в Египет, он поразил египетского фараона, когда нашел с помощью известных ему геометрических фактов высоту пирамиды, не поднимаясь на нее. Важные геометрические факты были установлены в школах знаменитых философов: Пифагора (VI век до нашей эры), Евдокса, Менехма, Платона и других.

Примерно в V веке до нашей эры возникла мысль о том, чтобы изложить геометрию как единую науку, попытаться все известные геометрические факты вывести с помощью логических рассуждений из небольшого числа простейших фактов, которые можно принять без доказательства. И несколько ученых в V—IV веках до нашей эры пытались это на самом деле сделать (Гиппократ, Леоннат и другие).

Эти попытки нашли свое завершение в одной из самых замечательных книг, когда-либо созданной людьми, в самом знаменитом математическом сочинении — в книге «Начала» Евклида Александрийского, завершенной им около 300 года до нашей эры.

Александрия — это город в Египте у устья реки Нил. Во времена Евклида это был еще совсем молодой город: он был основан знаменитым полководцем Александром Македонским около 330 года до нашей эры. После смерти Александра в Александрии обосновался один из его ближайших друзей и полководцев —Птолемей, который стал царем Египта. Птолемей был большим любителем философии. В юности он воспитывался вместе с Александром у известного греческого философа Аристотеля, создателя логики. В своей столице Александрии он создал одну из крупнейших библиотек того времени, сюда пригласил многих видных философов, геометров и астрономов того времени. Среди них был и Евклид, один из последователей Аристотеля и Платона. Достоверные биографические сведения о нем до нас почти не дошли. В заметках одного арабского математика XII века сообщается (на основании каких-то недошедших до нас источников), что «Евклид, сын Наухрата, сына Зенарха, известный под именем «Геометр»,— по происхождению грек, родом из города Тир в Сирии».

Александрийский геометр Папп (живший в том же городе Александрии через 700 лет после Евклида) пишет, что Евклид был мягким, скромным и независимым человеком.

Евклид начинает свою книгу с того, что дает определения тех понятий, которыми он собирается пользоваться в дальнейшем. Например, определение 1: «Точка есть то, часть чего есть ничто». Затем он приводит несколько предложений, которые принимает без доказательства — постулаты (допущения) и аксиомы. Разница между постулатами и аксиомами не принципиальна, и сейчас между ними не делают различия. Вот, например, первый постулат: «От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию».

Современников и людей, живших позднее Евклида, поражало то, что из этих немногих предложений и вводимых в книге определений Евклиду удается получить громадное количество важных геометрических сведений, всю геометрию, и притом только рассуждением, без всяких опытов и экспериментов. Это было блестящим проявлением мощи логического рассуждения. По этой причине книга Евклида в течение двух тысячелетий служила, в переработках различных авторов, учебником геометрии. Нередко люди, чтобы усовершенствоваться в умении логически рассуждать, обращались как к образцу к этой книге. Так, например, поступил (как он об этом сообщал в своей автобиографии) президент Соединенных Штатов Линкольн (возглавлявший 100 лет назад борьбу за освобождение негров).

Книга Евклида служила образцом научного сочинения для ученых самых разнообразных специальностей. По образцу

Евклидовых «Начал» излагали свои учения крупнейшие философы, например Спиноза (Голландия, 1632—1677) и Гоббс (Англия, 1588—1679). Книга Евклида послужила образцом для Ньютона, когда тот создавал свои знаменитые «Математические начала натуральной философии» (то есть физики).

2. Последний в списке постулатов Евклида, п я т ы й, привлекал особое внимание в течение многих столетий. Вот как можно его сформулировать.

Если прямая на плоскости, пересекающая два данных прямолинейных отрезка, образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих отрезков они пересекутся (и притом по ту же сторону, где лежат эти углы).

Этот постулат вызвал много критических замечаний. Одни обращали внимание на то, что это предложение громоздко (сравните с первым постулатом). Другие считали, что в качестве постулата естественно принять такое предложение, которое, действительно, очевидно, между тем как пятый постулат им не представлялся достаточно очевидным. Третьи видели недостаток пятого постулата в том, что в нем говорится о *неограниченном* продолжении отрезков, так что возникает необходимость рассматривать всю *бесконечную* плоскость и нельзя ограничиться лишь конечной ее частью. Мнение всех сходилось на том, что Евклид, видимо, просто не сумел доказать пятый постулат и только по этой причине включил его без доказательства.

Евклид, как видно, сам недолюбливал свой пятый постулат, терпел его только потому, что вовсе обойтись без него ему не удавалось, хотя он и стремился, по мере возможности, им не пользоваться. В первой части («книге») своих «Начал» он использует пятый постулат только один раз, а именно при доказательстве своего двадцать девятого предложения: «Если две прямые параллельны, то они в пересечении с третьей прямой образуют равные внутренние накрест лежащие углы».

Много лет спустя, через два тысячелетия после Евклида, один англичанин, Плейфер, заметил, что пятый постулат равносилен такому менее громоздкому предложению, которое называют сейчас «аксиомой о единственности параллельной» и которое теперь включают в школьные учебники:

Через точку вне данной прямой в плоскости, определяемой этой прямой и этой точкой, проходит единственная прямая, не пересекающая данную.

Это, разумеется, не снимало тех возражений, которые приводились геометрами против пятого постулата.

В самом деле, *принимаем* предложение о единственности параллели без доказательства — и в то же время *доказываем* предложение о единственности перпендикуляра: «Через точку вне данной прямой в плоскости, определяемой этой прямой и этой точкой, проходит единственная прямая, перпендикулярная данной». В смысле очевидности они примерно равноправны. Но если удается доказать второе из этих предложений, то, может быть, и первое из них (аксиому о единственности параллельной) можно доказать? Может быть, зря мы это предложение принимаем в качестве аксиомы? Может быть, у Евклида и других геометров просто не хватило воображения, смекалки, чтобы доказать это предложение, но доказательство все же можно найти?

Отсутствие доказательства пятого постулата в «Началах» Евклида рассматривалось многими математиками как крупнейший и нетерпимый недостаток этого сочинения. Специальные научные трактаты посвящались исправлению этого «недостатка». Вот названия некоторых из них: «Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных» (Насир ад Дин ат Туси), «Усовершенствование книги «Начала» (аль Джаухари), «Евклид, очищенный от всяких пятен» (Саккери).

Сотни профессиональных геометров разных времен и народов, тысячи любителей математики в течение 20 веков находили остроумнейшие «доказательства» пятого постулата. Доказательства его искали, например, такие известные ученые, как Клавдий Птолемей (Египет, II век нашей эры), Посидоний (Рим, I век до нашей эры), Прокл (Греция, V век нашей эры), Насир ад Дин (Узбекистан, XIII век), Валлис (Англия, XVII век), Ламберт (Швейцария, XVIII век), Лежандр (Франция, XVIII век), Саккери (Италия, XVIII век), Ф. Бойяи (Венгрия, XIX век), Лобачевский (Россия, XIX век), Гаусс (Германия, XIX век) и многие другие. Странно было только то, что всегда в каждом «доказательстве» после тщательного анализа обнаруживалась какая-нибудь ошибка. Доказательство пятого постулата ускользало от искусных математиков в тот момент, когда они уже как будто достигали цели. Люди тратили на охоту за таким доказательством многие годы и в итоге получали только разочарование.

Один математик полтораста лет назад писал по этому поводу своему сыну, студенту-математику: «Не пытайся одолеть теорию параллельных ни тем способом, о котором ты писал мне, ни каким-либо другим. Я изучил все пути. Я прошел весь беспросветный мрак этой ночи, и всякий светоч, всякую радость жизни я в ней похоронил. Ради бога, молю тебя, оставь эту материю, потому что она может лишить тебя всего твоего времени, здоровья, покоя, всего счастья твоей жизни».

3. Решение проблемы пятого постулата оказалось неожиданным.

24 февраля 1826 года в Казани выступил с докладом профессор математики местного университета Николай Иванович Лобачевский (1792—1856). Он пришел к выводу, что пятый постулат вообще не может быть доказан на основании других аксиом и постулатов, обычно приводимых или подразумеваемых в школьных учебниках геометрии; Евклид был прав, приняв пятый постулат без

доказательства—его действительно нельзя доказать, если не включить вместо него в список аксиом или постулатов другое предложение, равносильное пятому постулату. Иначе говоря, пятый постулат независим от остальных аксиом элементарной геометрии.

Однако ни это открытие Лобачевского, ни убедительное обоснование его выводов, полученное несколько позднее, ни признание этих выводов крупнейшими математиками второй половины XIX века не успокоили искателей доказательства пятого постулата. В разных странах люди по-прежнему занимались (и до сих пор кое-где занимаются) поисками, теперь уже явно безнадежными. По-прежнему появлялись брошюры, статьи, рукописи с такими «доказательствами». Например, в 1913 году появилась брошюра преподавателя математики О. Вржесневского «Доказательство «аксиомы» параллельных прямых». А когда профессор Московского университета Б. К. Млодзеевский высказал автору свои возражения, последний «опроверг» их во втором, дополненном издании своей брошюры, содержащей выразительное посвящение: «Посвящается тем, кто мыслит глубоко...»

А вот другая брошюра, в которой «доказывается» пятый постулат; ее издал в 1926 году некто М. М. Гаркуша под названием «Параллельные линии. Постулат Евклида. В чем ошибка Лобачевского?»

Вывод о независимости аксиомы о единственности параллельной от других общепринятых геометрических аксиом представляет собой, казалось бы, весьма частный вопрос геометрии. В действительности же он сыграл громадную роль в истории математики. Он привел к пересмотру и перестройке всей геометрии и заставил математиков глубже вникнуть в вопросы обоснования различных математических дисциплин. К исследованиям Н. И. Лобачевского мы еще вернемся позднее, в XI главе этой книги.

§ 2. ОСЕВАЯ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ В ПЛАНИМЕТРИИ

1. Осевая симметрия. При изучении геометрии мы встречаемся с фигурами, обладающими осевой симметрией.

Рисунки, обладающие осевой симметрией, производят приятное эстетическое впечатление. Известно, что свойства симметрии с большим успехом могут быть применены к доказательству теорем и решению трудных задач. Иногда достаточно себя спросить: «А что будет, если перегнем чертеж по такой-то прямой?», как уже становится ясным решение ранее никак не поддававшейся задачи.

Легко образовать красивые симметричные фигуры из бумаги с помощью ножниц: для этого перегните листок бумаги по какой-либо прямой линии и вырежьте затем из него любую фигуру по своему вкусу. Чем замысловатее окажется вырезанная фигура, тем забавнее окажется фигура, которую увидите, если распрямите листок бумаги.

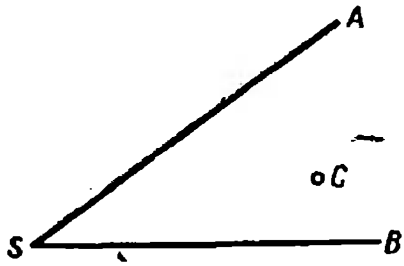


Рис. 75.

Уж на что уродлива свежая клякса, только что посаженная на белый лист бумаги! Но перегните лист по какой-нибудь прямой, проходящей через кляксу, и затем обратно распрямите листок.

Клякса расплывается в симпатичного паучка, симметричного относительно этой прямой.

1. Имеют ли ось симметрии следующие геометрические фигуры: прямая, параллелограмм, правильный n-угольник, пара параллельных прямых (если да, то сколько осей)? Сколько осей симметрии имеют такие буквы: А, В, Б, Ж, Н, О, Т, Ш?

2. Точка описывает отрезок, параллельный оси симметрии. Какую фигуру при этом опишет симметричная ей точка (относительно данной оси)? Ответьте на аналогичный вопрос применительно к другим фигурам: отрезок, перпендикулярный оси; отрезок, лежащий на оси; произвольный отрезок; сама ось; прямая, перпендикулярная оси; произвольная прямая; окружность с центром на оси, вне оси.

3. Какие фигуры, которые преобразуются сами в себя при зеркальном отражении от прямой, вам известны?

4. Толкнули шар P так, что он, ударившись последовательно в 4 борта биллиарда (AB, BC, CD, DA), попал в шар Q. Начертите путь шара. (Можно рассмотреть случаи, когда шар отталкивается не от четырех, а от одного, двух бортов.)

5. Дорога SA пересекает реку SB (рис. 75) под острым углом. Гонец из пункта C (C внутри угла ASB) должен по возможности скорее добраться до дороги SA (чтобы с попутной машиной передать письмо), но при этом ему нужно по пути напоить коня в реке SB. Как он должен ехать?

6. Докажите: во вписанном четырехугольнике со взаимно перпендикулярными диагоналями а) сумма квадратов двух противоположных сторон равна квадрату диаметра описанной окружности; б) расстояние от центра окружности до какой-либо стороны равно половине противоположной стороны.

7. Докажите, что во всяком треугольнике три точки, симметричные точке пересечения его высот относительно его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

8. Фигура называется ограниченной, если она целиком расположена внутри некоторого круга достаточно большого радиуса. Может ли ограниченная фигура иметь две (или более) параллельные оси симметрии?

2. Центральная симметрия. Фигура на плоскости имеет *центр симметрии* O, если при повороте около этой точки на 180° она преобразуется сама в себя.

Имеются также такие фигуры, которые преобразуются сами в себя при повороте вокруг некоторой точки на угол в 120°, или в 90°, 72° и т. д. Вообще может оказаться, что фигура преобразуется сама в себя при повороте вокруг некоторой точки на угол, равный $\frac{360°}{n}$ *. Тогда говорят, что фигура имеет симметрию вращения порядка n, а точка O называется в этом случае центром вращения порядка n.

Например, фигуры на рисунках 76, а), б), в) имеют симметрию вращения порядка (соответственно) 4, 3, 8.

Бывает, что поворот чертежа на 180° вокруг некоторой точки и рассмотрение его совместно с исходным чертежом подсказывает путь к быстрому решению трудной задачи. Ниже приводим несколько задач, на которых можно убедиться в справедливости этого замечания.

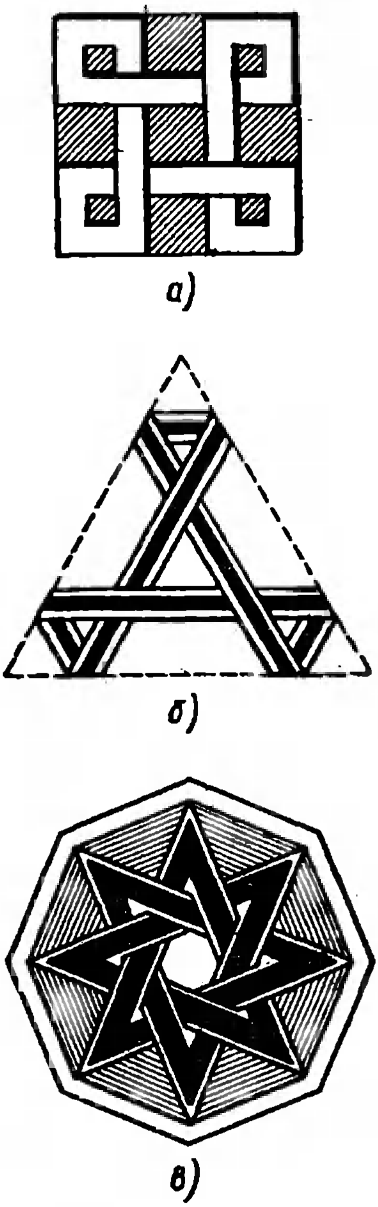


Рис. 76.

10. Имеют ли центр симметрии следующие фигуры: пара параллельных прямых, правильный пятиугольник, пятиконечная звезда (вершинами которой служат вершины правильного пятиугольника)?

11. Имеют ли те же фигуры центр вращения? Какого порядка?

12. Те же вопросы о буквах К, И, Н, Ж и др.

13. Стол имеет форму круга. Двое играют. Они имеют большое количество одинаковых монет (достаточное, чтобы покрыть весь стол ими). Поочередно они кладут по одной монете на стол. Выиграет тот, кто последним положит монету. Как должен играть первый, чтобы заведомо выиграть?

14. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

15. Постройте треугольник по трем медианам.

16. Земельный участок имел форму квадрата. Изгородь была уничтожена, остались только два столба A и B на параллельных сторонах и столб O в центре квадрата. Как восстановить границу участка? Всегда ли это возможно сделать?

---

* Но не на меньший угол.

§ 3. РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ПОНЯТИЯ О ЦЕНТРЕ ТЯЖЕСТИ

1. Понятие о центре тяжести впервые ввел величайший математик древнего мира, греческий геометр Архимед (287—212 годы до нашей эры). Он же обнаружил, что с помощью этого понятия, путем воображаемого взвешивания и воображаемого подвешивания масс в различных точках геометрических фигур, возможно решить разнообразные чисто геометрические задачи, например, можно вычислить объем шара и доказать теорему о том, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Вот что писал об этом методе Архимед другому видному греческому геометру того времени Эратосфену: «Я счел уместным изложить тебе своеобразный метод, благодаря которому получишь средство для исследования некоторых математических вопросов с помощью механики. Этот прием, по моему глубокому убеждению, очень полезен для доказательства геометрических предложений; многие вещи впервые стали для меня ясными именно благодаря механическому методу... Я полагаю, что многие из моих современников и последователей, ознакомившись с этим методом, будут в состоянии находить новые теоремы...»

И, действительно, впоследствии многие математики привлекали механические соображения к решению геометрических проблем. Швейцарец Поль Гюльден (1577 — 1643) посвятил этому методу четырехтомное сочинение «Центробарика» (то есть учение о центрах тяжести), где он удачно применяет механические соображения к вычислению поверхностей и объемов различных тел.

Через полтора столетия его соотечественник Симóн Люильé с успехом привлекал понятие о центре тяжести к разысканию геометрических мест точек. Немецкий математик и астроном Август Мебиус (1790—1868) в своей замечательной книге «Барицентрическое исчисление» (1827) сумел построить целую отрасль геометрии — так называемую проективную геометрию — на основании понятия о центре тяжести.

В работах некоторых математиков барицентрические соображения (то есть соображения, использующие понятие и свойства центра тяжести) послужили отправным пунктом при создании векторного исчисления — важного аппарата современной математики. Барицентрические соображения с успехом применяются и в алгебре: с их помощью можно доказывать неравенства, вычислять суммы и т. д. Известно немало случаев, когда для решения задач из области элементарной математики применялись механические методы. Так, например, А. Эйнштейн при поступлении в Цюрихский политехнический институт решил экзаменационную задачу способом взвешивания площадей.

2. Под материальной точкой понимают (геометрическую) точку, снабженную массой. Если (геометрическая) точка снабжена массой m, то образующуюся таким образом материальную точку будем обозначать так: (A, m) или A.

Рис. 77.

С точки зрения математики материальная точка (A, m) — это комплекс, состоящий из некоторой геометрической точки A и некоторого числа m (положительного).* Барицентр (центр тяжести, центр масс) двух материальных точек (рис. 77). $A_1 \equiv (A, m_1)$ и $B \equiv (B, m_2)$ — это такая точка C, которая лежит на отрезке AB и удовлетворяет так называемому «правилу рычага»: произведение ее расстояния от одной из этих точек (A) на массу, помещенную в этой точке (m_1), равно произведению ее расстояния от второй точки (B) на массу, помещенную в этой точке (m_2):

$$m_1 \cdot AC = m_2 \cdot CB.$$

Физический смысл точки C весьма прост: пусть AB (рис. 77) — жесткий «невесомый» стержень, в концах которого помещены массы m_1 и m_2 («невесомость» стержня означает, что его масса по сравнению с массами m_1 и m_2 настолько ничтожна, что ею можно пренебречь); тогда C—та точка, в которой надо закрепить стержень AB, чтобы он был в равновесии.

Если в барицентр C двух материальных точек (A, m_1) и (B, m_2) поместить массы обеих материальных точек, то вновь образующуюся материальную точку $(C, m_1 + m_2)$ называют иногда материальным центром (или объединением) этих двух данных точек.

Легко понять, что чем массивнее одна из материальных точек по сравнению с другой, тем ближе барицентр к более тяжелой из них.

Имея систему из нескольких материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), ..., (A_n, m_n), мы можем построить некоторую (геометрическую) точку C_n следующим образом: сначала строим материальный центр $(C_2, m_1 + m_2)$ точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2); затем — материальный центр $(C_3, m_1 + m_2 + m_3)$ двух точек $(C_2, m_1 + m_2)$ и (A_3, m_3); затем — материальный центр точек $(C_3, m_1 + m_2 + m_3)$ и (A_4, m_4), и так далее — до тех пор, пока не переберем все данные материальные точки. В результате мы получим некоторую материальную точку $(C_n, m_1 + m_2 + ... + m_n)$, которая называется материальным центром данной системы материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), ..., (A_n, m_n). А геометрическую точку C_n называют барицентром (или центром тяжести) этой системы.

Для решения геометрических задач полезны следующие свойства барицентров:

1. *Для всякой системы материальных точек барицентр существует.*

2. *Положение барицентра системы не зависит от того порядка, в котором последовательно объединяются эти точки* («теорема о единственности барицентра»).

3. *Положение барицентра системы материальных точек не изменится, если заменить несколько из этих точек их материальным центром* («теорема о возможности группировки материальных точек»).

Рассмотрим теперь несколько задач, решаемых с помощью понятия о центре тяжести.

1. Середины противоположных сторон произвольного (пространственного или плоского) четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ соединены отрезками. Докажите, что образующиеся таким образом два отрезка пересекаются и каждый делится точкой пересечения пополам.

2. Докажите на основании механических соображений, что три медианы треугольника имеют общую точку, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины[1].

3. Докажите, что прямая, проходящая через вершину при основании треугольника и через середину медианы, проведенной к основанию, делит боковую сторону в отношении 1 : 2.

4. В произвольном шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (плоском или пространственном) отмечены середины сторон A_1A_2, A_2A_3,... и полученные точки B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 соединены через одну так, что образуются два треугольника $B_1B_3B_5$ и $B_2B_4B_6$. Докажите, что точки пересечения медиан у этих двух треугольников совпадают.

5. Докажите, что три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер произвольного тетраэдра, имеют общую точку и делятся ею пополам.

6. Докажите, что четыре отрезка, соединяющие центры тяжести граней тетраэдра с противолежащими им вершинами, проходят через одну точку и каждый отрезок делится этой точкой в отношении 3 : 1 (считая от вершины).

7. Даны шесть точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Наугад выбираются три из них; точка пересечения медиан треугольника с вершинами в этих точках соединяется отрезком с точкой пересечения медиан треугольника с вершинами в оставшихся трех точках. Выбирая всевозможными

[1] Отметим, что впервые эта теорема была доказана именно с помощью механических соображений. Это сделал еще Архимед. А то доказательство, которое приводится в школьных учебниках, было получено значительно позже, в XII веке.

способами тройки точек из шести данных, мы таким образом построим несколько отрезков. а) Сколько будет таких отрезков? б) Докажите, что все они пересекаются в одной точке; в) в каком отношении делит эта точка каждый из рассматриваемых отрезков?

Приведем три задачи, которые потребуются в дальнейшем.

8. На луче SN расположены n материальных точек A_1, A_2, ..., A_n с массами m_1, m_2, ..., m_n. Их расстояния от начала S этого луча равны соответственно x_1, x_2, ..., x_n. Чему равно расстояние z от точки S до центра тяжести Z этой системы материальных точек?

9. Пусть на луче SN расположена система из нескольких материальных точек и пусть вся масса какой-либо одной из них (или ее часть) переносится вдоль луча, удаляясь от начала луча. Убедитесь, что при этом центр тяжести системы тоже будет удаляться от начала луча.

10. В плоскости по одну сторону от данной прямой a расположены n материальных точек A_1, A_2, ..., A_n с массами m_1, m_2, ..., m_n. Их расстояния от прямой a равны соответственно z_1, z_2, ..., z_n. Тогда расстояние z от их центра тяжести до прямой a можно найти по формуле:

$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

а) Докажите эту формулу при $n = 2$; при $n = 3$; при $n = 4$; б) докажите ту же формулу при любом n методом математической индукции (для учащихся IX—X классов).

§ 4. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Вы хорошо знаете эту теорему: «Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах».

Эта теорема, открытие которой приписывают знаменитому древнегреческому философу Пифагору, на самом деле была известна в древнем Вавилоне по меньшей мере за 1200 лет до Пифагора. Видимо, Пифагор узнал о ней во время одного из своих путешествий в Вавилон или Египет.

То доказательство теоремы Пифагора, которое приведено в знаменитом учебнике древнегреческого геометра Евклида, затем без существенных изменений переходило и в другие учебники. Оно сравнительно сложно; к нему с неприязнью относились школьники, слабо успевавшие по математике, и подбирали для него всякие нелестные клички вроде «ослиный мост» или «бегство убогих». Следует заметить, что для теоремы Пифагора были найдены и другие доказательства; во всяком случае сейчас известно не менее двухсот таких доказательств.

1. В зданиях романского стиля верхние части окон для прочности и украшения расчленяли на части в виде орнамента. На рисунке 78 изображено одно из них. Если ширина окна b, то радиусы полуокружностей: $R = \frac{b}{2}$; $r = \frac{b}{4}$.
Вычислите радиус x внутренней окружности.

2. Известен такой прямоугольный треугольник, у которого длины всех сторон выражаются целыми числами: это «египетский треугольник» (длины сторон: 3, 4, 5, $3^2 + 4^2 = 5^2$). а) Имеются ли еще такие «целочисленные» прямоугольные треугольники? б) Укажите несколько таких треугольников.

3. Пифагор указал такой способ нахождения любого числа целочисленных прямоугольных треугольников. Возьмите два произвольных последовательных натуральных числа (например, 4 и 5), составьте их сумму (в нашем примере 9) и удвоенное произведение (в нашем примере 40). Пифагор утверждал, что в прямоугольном треугольнике, у которого длины катетов выражаются этими числами, длина гипотенузы тоже будет выражаться целым числом. Прав он или нет? Проверьте на примерах. Докажите в общем случае.

4. Пусть k, m и n — произвольные натуральные числа, $m > n$. Докажите, что прямоугольный треугольник, у которого длины катетов a и b равны соответственно $k(m^2 - n^2)$ и $2kmn$, является целочисленным (то есть длины всех его сторон выражаются целыми числами). Сформулируйте алгоритм для составления целочисленных треугольников. Приведите примеры.

5. На сторонах равнобедренного прямоугольного треугольника построены квадраты. Докажите, что два меньших квадрата можно разрезать на куски, из которых можно составить больший квадрат.

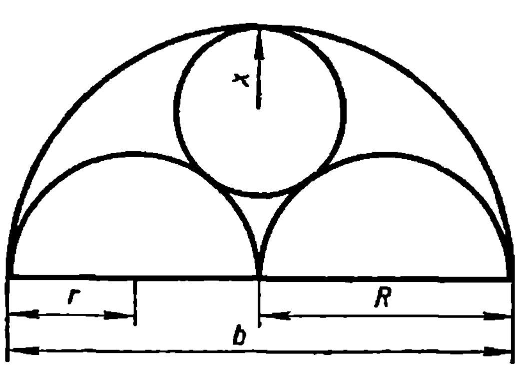


Рис. 78.

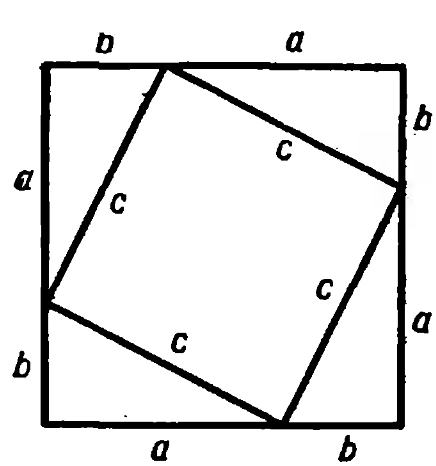


Рис. 79

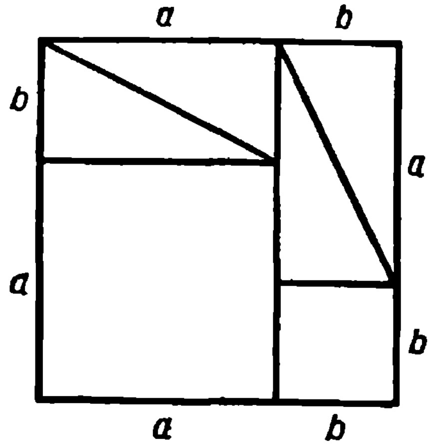


Рис. 80.

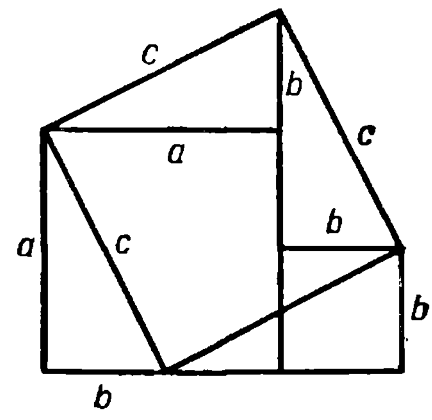


Рис. 81

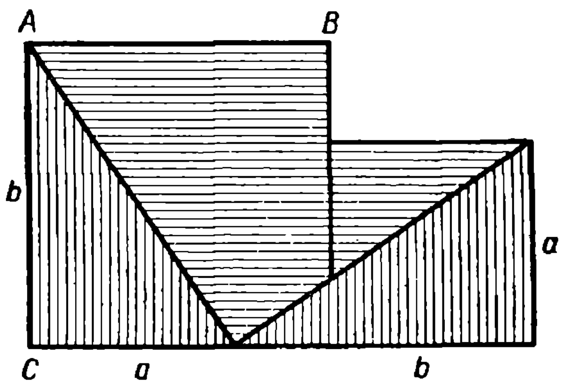


Рис. 82.

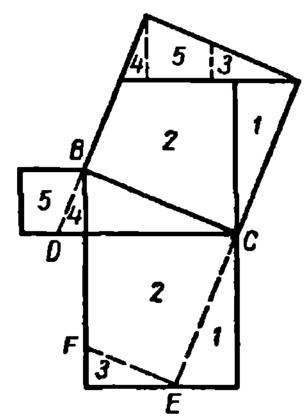


Рис. 83.

6. Докажите теорему Пифагора, пользуясь: а) рисунком 79, б) рисунками 79 и 80 (не прибегая к алгебре), в) рисунком 81.

7. Квадраты, построенные на катетах прямоугольного треугольника, можно разрезать на куски, из которых можно составить квадрат, построенный на гипотенузе. Докажите это, пользуясь: а) рисунком 82, б) рисунком 83.

§ 5. ТЕОРЕМА СТЮАРТА

Из школьного курса геометрии известно, как вычислить высоты и медианы треугольника, если даны его стороны. А как выражается биссектриса через стороны треугольника? Оказывается, что можно доказать тождество, из которого вытекают как частные случаи формулы для биссектрисы, медианы и высоты треугольника (через его стороны). Тождество это позволяет упростить решение и ряда других задач. Речь идет о следующем утверждении, которое было впервые опубликовано шотландцем Мэтью Стюартом в 1746 году:

При любом положении точки D на стороне AB треугольника ABC (рис. 84).

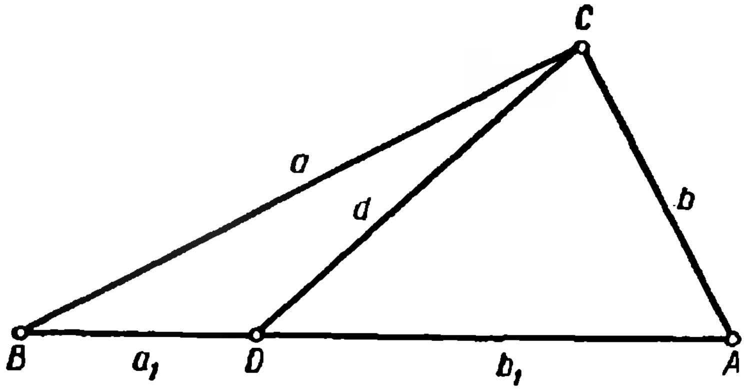


Рис. 84.

$$a^2b_1 + b^2a_1 - d^2 \cdot c = a_1 \cdot b_1 \cdot c.$$

1. Докажите теорему Стюарта.

2. Из теоремы Стюарта выведите формулу для биссектрисы угла треугольника: $l_c^2 = ab\,\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}$.

3. Докажите теорему: если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный.

4. В данный треугольник ABC со сторонами a, b, c вписана окружность. Вычислите длину отрезка, соединяющего вершину C и точку C_1 касания окружности со стороной AB.

5. В треугольнике ABC $AB = 10$ *м*, $BC = 3$ *м*, $AC = 8$ *м*. Докажите, что один из его углов втрое больше другого.

§ 6. ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Клавдий Птолемей, знаменитый древнегреческий астроном, жил в египетском городе Александрии во II веке нашей эры. Он решил составить таблицу, которая позволила бы по градусной мере дуги окружности (α) сразу найти (и с большой точностью) длину стягивающей ее хорды a (разумеется, если радиус окружности известен); такие таблицы были ему необходимы для астрономических расчетов (предсказание видимого движения планет и т. п.).

Так как $a = 2\sin\frac{\alpha}{2}$, то таблица Птолемея была фактически таблицей синусов.

Для составления такой таблицы Птолемей пользовался одним замечательным предложением элементарной геометрии, которое носит сейчас его имя:

Если в окружность вписан произвольный (выпуклый) четырехугольник, то произведение его диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон. Эта теорема является «родоначальной» теорем современной тригонометрии: из нее можно вывести важнейшие тригонометрические формулы.

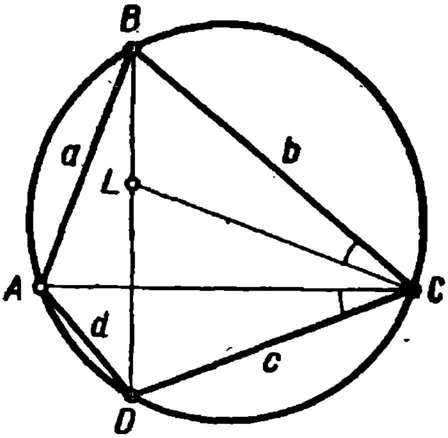


Рис. 85

1. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$ (рис. 85). На диагонали BD выбрана точка L так, что $\angle BCL = \angle ACD$. а) Докажите, что $\triangle BCL \sim \triangle ACD$; $\triangle DLC \sim \triangle ABC$; б) докажите теорему Птолемея:

$$AC \cdot BD = a \cdot c + b \cdot d.$$

2. Выведите из теоремы Птолемея теорему Пифагора.

3. Выразите диагональ правильного пятиугольника через его сторону a.

4. Докажите, что в правильном семиугольнике $A_1A_2A_3 \ldots A_7$

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}.$$

5. Выведите из теоремы Птолемея формулу

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

6. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BD^2 = BA \cdot BC - DA \cdot DC$.

7. Выразите с помощью теоремы Птолемея медиану треугольника через его стороны.

8. Выведите из теоремы Птолемея теорему Стюарта.

9. Проверьте: если четырехугольник нельзя вписать в окружность, то сумма произведений его диагоналей меньше суммы произведений его противоположных сторон.

§ 7. МЕХАНИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ГЕОМЕТРИИ

Мы сейчас ознакомимся с одной теоремой, которая обычно излагается в курсах механики и использует понятия из механики. Но в действительности это чисто геометрическая теорема: для доказательства ее никакие законы механики не используются. Эта теорема позволяет решать (и притом единым приемом!) разнообразные геометрические задачи. Впервые ее доказал французский математик XVIII века Жозеф Луи Лагранж.

Лет 200 назад крупнейший математик XVIII века Леонард Эйлер ввел понятие момента инерции системы материальных точек. Пусть (A_1, m_1), (A_2, m_2), ..., (A_n, m_n) — несколько материальных точек (на плоскости или в пространстве); O — произвольно взятая точка. **Моментом инерции** этой системы ма-

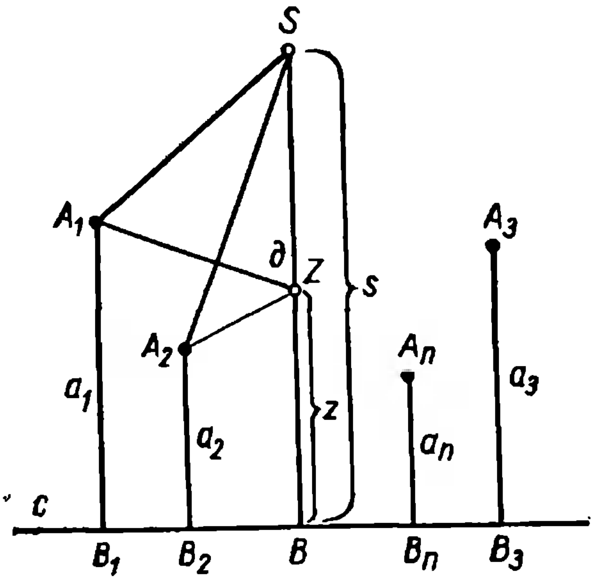


Рис. 86.

териальных точек относительно точки O Эйлер назвал такое выражение:

$$J_0 = m_1 \cdot OA_1^2 + m_2 \cdot OA_2^2 + \ldots + m_n \cdot OA_n^2$$

(то есть сумму произведений масс этих точек на квадраты их расстояний от точки O).

Это понятие оказалось очень полезным в различных разделах механики. Современник Эйлера Лагранж подметил такое свойство момента инерции.

Теорема Лагранжа: *Момент инерции J_s любой системы материальных точек $(A_1, m_1), \ldots, (A_n, m_n)$ относительно произвольной данной точки S равен сумме двух величин: момента инерции J_z той же системы относительно ее барицентра и момента инерции материального центра системы относительно точки S*:

$$J_s = J_z + M \cdot SZ^2, \tag{1}$$

где

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n. \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы опирается, по существу, только на теорему Пифагора и на несколько других, более простых геометрических фактов. Хотя теорема верна при любом выборе точек $A_1, \ldots, A_n, S$ в трехмерном пространстве, мы ради простоты ограничимся тем случаем, когда все эти точки лежат в одной плоскости.

Доказательство теоремы Лагранжа. Проведем такую прямую c (рис. 86), что SZ перпендикулярна к c и все точки $A_1, A_2, \ldots, A_n, S$ лежат по одну и ту же сторону от c. Обозначим расстояния от точек $A_1, A_2, \ldots, A_n, Z, S$ до прямой c соответственно через $a_1, a_2, \ldots, a_n, z, s$, а проекции точек $A_1, A_2, \ldots, A_n, Z, S$ на прямую c — через $B_1, \ldots, B_n, B$.

Из трапеций A_1B_1BS и A_1B_1BZ легко усмотреть, что

$$SA_1^2 = (a_1 - s)^2 + BB_1^2, \quad ZA_1^2 = (a_1 - z)^2 + BB_1^2;$$

$$SA_1^2 - ZA_1^2 = (a_1 - s)^2 - (a_1 - z)^2 = [(a_1 - z) - (s - z)]^2 - (a_1 - z)^2 = (s - z)^2 - 2(s - z)(a_1 - z),$$

$$m_1 \cdot SA_1^2 - m_1 \cdot ZA_1^2 = m_1 SZ^2 - 2(s - z)(m_1 a_1 - m_1 z).$$

Применяя сходные рассуждения к точкам $A_2, A_3, \ldots, A_n$, получим:

$$m_2 \cdot SA_2^2 - m_2 \cdot ZA_2^2 = m_2 \cdot SZ^2 + 2(s-z)(m_2 z - m_2 a_2).$$

. . . .

$$m_n \cdot SA_n^2 - m_n \cdot ZA_n^2 = m_n \cdot SZ^2 + 2(s-z)(m_n z - m_n a_n).$$

Сложив найденные n равенств и учтя (2), получим:

$$J_s - J_z = M \cdot SZ^2 + 2(s-z)[M \cdot z - m_1 a_1 - m_2 a_2 - \ldots - m_n a_n].$$

Но Z — это центр тяжести системы точек (A_1, m_1), ..., (A_n, m_n); поэтому, как известно (гл. V, § 3, задача 10),

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)z = m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n.$$

Следовательно,

$$J_s - J_z = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n) \cdot SZ^2,$$

то есть получили формулу (1). Теорема доказана.

Рассмотрим несколько задач.

1. В треугольнике длины его медиан m_a, m_b, m_c и радиус описанной окружности R. Чему равно расстояние между точкой пересечения медиан и центром описанной окружности?

2. Дан треугольник, в котором расстояние от точки пересечения медиан до центра описанной около него окружности равно одной трети радиуса этой окружности. Докажите, что треугольник прямоугольный.

3. В окружность радиуса R вписан правильный 1970-угольник. Точка P отстоит от центра O окружности на расстояние d. Вычислите сумму квадратов расстояний от точки P до всех вершин этого многоугольника.

4. В окружность вписан треугольник ABC; его медианы пересекают окружность в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что если G — центр тяжести треугольника ABC, то

$$\frac{AG}{A_1G} + \frac{BG}{B_1G} + \frac{CG}{C_1G} = 3.$$

5. Пусть A и B — две точки на плоскости. Найдите на плоскости множество всех таких точек P, для которых величина

$$2PA^2 + 3PB^2$$

имеет одно и то же значение c^2.

6. Пользуясь теоремой Лагранжа, докажите, что среднее арифметическое нескольких положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n не больше их среднего квадратического, то есть

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

В каком случае будет иметь место равенство?

§ 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА МЕСТНОСТИ[1]

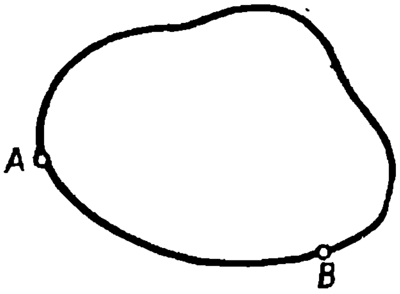


Рис. 87.

1. Как провести на местности прямую, перпендикулярную данной (провешенной) прямой a и проходящую через данную точку A? (Рассмотрите два случая: точка A на данной прямой, точка A вне данной прямой.)

2. Как измерить расстояние между доступной точкой и недоступной точкой, пользуясь: а) равенством треугольников; б) подобием треугольников?

3. Как через данную точку M провести на местности прямую, параллельную данной доступной прямой AB: а) пользуясь эккером, б) не пользуясь им?

4. Как построить на местности биссектрису данного угла AOB? (Точки A, O, B и все точки внутри и на контуре $\triangle AOB$ доступны.)

5. Как продолжить провешенный прямолинейный отрезок за непрозрачное препятствие?

6. Постройте основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB, если на пути этого перпендикуляра лежит препятствие.

7. Точки A и B (рис. 87) — на берегу озера. Из точки A видна точка B. Как измерить AB?

8. Точки A и B — на опушке леса (рис. 87). Из точки A не

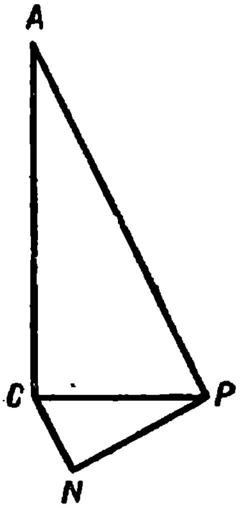


Рис. 88.

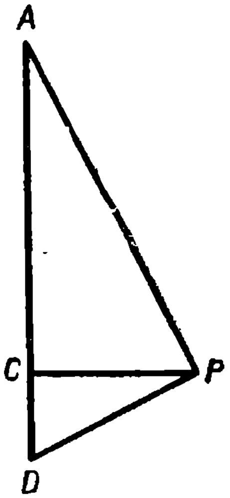


Рис. 89.

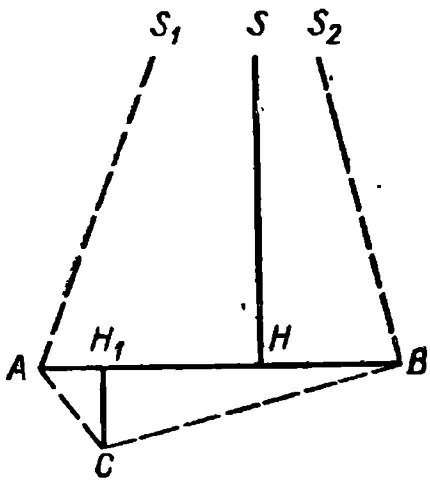


Рис. 90.

[1] Для решения задач из § 8 разрешается пользоваться вехами, эккером, мерной лентой, колышками; построение прямой понимается как ее провешивание.

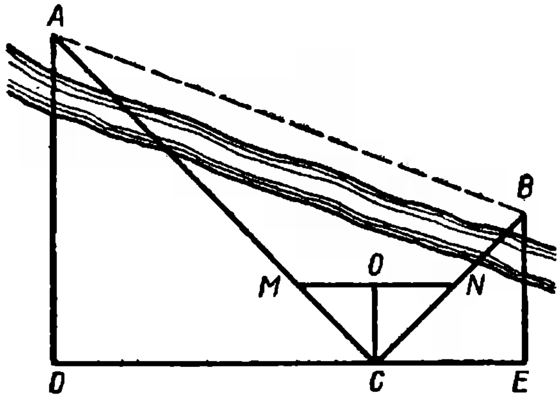


Рис. 91.

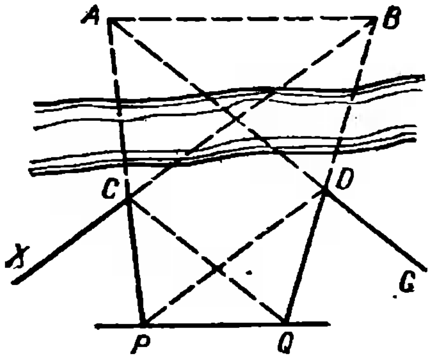


Рис. 92.

видна точка B. Провешивание в лесу невозможно. Как измерить расстояние AB?

9. Как, располагая метровой линейкой, вехами и веревкой длиной 10—15 *м*, измерить расстояние до недоступной точки?

10. Чтобы найти ширину реки (рис. 88) CA (точка A недоступна), провешивают прямую, проходящую через C и перпендикулярную CA; на ней выбирают произвольную точку P, провешивают прямую $PN \perp AP$, находят на ней основание перпендикуляра, опущенного из C на PN. Как теперь вычислить AC?

11. Если доступен небольшой участок набережной, то применяется способ определения ширины реки, который ясен из рисунка 89. Здесь $CP \perp CA$, $PD \perp PA$. Найдите CA.

12. Через точку A нужно провешить параллель к прямой MN. Местность ровная. Из A видны две точки C и D прямой MN. Как провешить искомую прямую: а) если доступна на прямой MN только точка C, б) если ни одна из этих точек C и D не доступна?

13. Укажите способ для нахождения расстояния между двумя недоступными точками C и D.

14. Требуется определить расстояние (кратчайшее) от дороги, направление которой можно принять за прямолинейное, до весьма отдаленного предмета S. Для этого из двух точек дороги A и B (рис. 90) провешивают на некотором расстоянии прямые AS_1 и BS_2, направленные к предмету S; из A к AS_1 и из B к BS_2 восставляют перпендикуляры AC и BC. Из точки их пересечения C опускают перпендикуляр CH_1 на AB и измеряют AH_1, BH_1, CH_1. Обозначим через H — основание перпендикуляра, опущенного из S на AB. Докажите, что расстояние $SH = \frac{AH_1 \cdot BH_1}{CH_1}$.

15. Чтобы измерить расстояние между двумя недоступными точками A и B, провешили часть произвольной прямой AC (рис. 91), идя по ней, нашли с помощью эккера такую точку C,

что $\measuredangle ACB = 90°$, затем отложили на AC и CB два равных отрезка CM и CN, нашли середину O отрезка MN, к OC восставили перпендикуляр в точке C и нашли на нем точки D и E, такие, что $\angle ADC = \angle BEC = 90°$. Измерив CD и CE, вычислите AB.

16. Прямая AB недоступна, но точки A и B хорошо видны. Через точку P требуется провести прямую, параллельную AB (рис. 92). Для этого был предложен следующий прием:

Выбрать доступную точку C на отрезке PA; провешить какой-нибудь отрезок CX на прямой CB; через P провести (на местности) прямую, параллельную CX; выбрать на ней доступную точку D; провешить отрезок DG прямой AD; через C провести прямую, параллельную DG. Пусть Q — точка встречи этой прямой с прямой BD. Тогда $PQ \parallel AB$. Докажите это.

§ 9. ДЕСЯТЬ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ выбраны 20 точек (считая в том числе точки A и B), а на стороне CD — 30 точек (в том числе C и D). Точки на сторонах AB и CD так соединены отрезками, что любых два отрезка либо вовсе не имеют общих точек, либо имеют только общий конец. Оказалось, что этими отрезками прямоугольник был разбит на треугольники. На сколько треугольников был разбит прямоугольник?

2. Внутри выпуклого n-угольника даны k точек. Отрезками, соединяющими эти k точек и n вершин многоугольника, последний разбивается на треугольники. Предполагается, что каждые 2 отрезка могут иметь общий конец, но не имеют общих внутренних точек; каждая точка соединяется отрезком еще хотя бы с одной точкой. Сколько получится треугольников?

3. Трапеция $ABCD$ пересечена прямой MN, параллельной ее основаниям и пересекающей боковые стороны в точках E и F. Известно, что если MN делит боковые стороны трапеции пополам, то отрезок EF — среднее *арифметическое* оснований трапеции. Докажите, что: а) если MN делит трапецию на две подобных трапеции, то EF — среднее *геометрическое* оснований; б) если MN проходит через точку пересечения диагоналей, то EF — среднее *гармоническое* оснований. Указание: число x называется *средним гармоническим* чисел a и b, если $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

4. Два отрезка взаимно перпендикулярны. Концы одного лежат на противоположных сторонах квадрата, концы другого — на двух других его сторонах. Докажите, что эти отрезки равны.

5. В одном прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла отсекла от гипотенузы одну четверть. В каком отношении разделила гипотенузу высота треугольника?

6. Медианы одного треугольника служат сторонами другого треугольника. Найдите отношение их площадей.

7. Точка C лежит внутри угла в $60°$. Ее расстояния от сторон угла — a и b. Каково ее расстояние от вершины угла?

8. Через точку M, лежащую внутри угла, проведена прямая, отсекающая от этого угла наименьший по площади треугольник. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла, делится в точке M пополам.

9. Как определить диаметр цилиндрического стержня с помощью штангенциркуля, если известна длина ножек штангенциркуля, но эти ножки короче радиуса стержня?

10. Докажите тождество: $S^2 = \frac{1}{2} h_a \cdot h_b \cdot h_c \cdot R$, где S—площадь треугольника, h_a, h_b, h_c — его высоты, R — радиус описанного круга.

Глава VI

ПОНЯТИЕ ПЛОЩАДИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

§ 1. РАВНОВЕЛИКИЕ И РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Как известно, равновеликие плоские фигуры — это такие, которые имеют одинаковую площадь. Два плоских многоугольника называются равносоставленными, если один из них можно разрезать на такие многоугольники, из которых затем можно составить второй. С простейшими примерами перекраивания одних многоугольников в другие, неравные им многоугольники, мы уже встречались раньше (гл. 1, § 6). Рассмотрим здесь еще некоторые задачи.

Предварительный подсчет площадей встречающихся в задаче фигур может облегчить решение задачи.

1. Трапеция разбита диагоналями на 4 части. Докажите, что части, примыкающие к боковым сторонам, равновелики.

2. Разрежьте квадрат со стороной, равной 3 *см*, на куски, из которых можно было бы составить 2 квадрата с площадью 5 *см*² и 4 *см*².

3. а) Разрежьте восьмиугольник (рис. 93) на 4 равные части; б) разрежьте тот же восьмиугольник на 5 частей, из которых можно составить квадрат.

4. Как перекроить крест (рис. 94) в квадрат?

5. Пользуясь рисунками 95, а) и б), укажите способ, как перекроить два данных неравных квадрата в один квадрат (на рисунке 95, а) квадрат $EFGA$ наложен на квадрат $ABCD$).

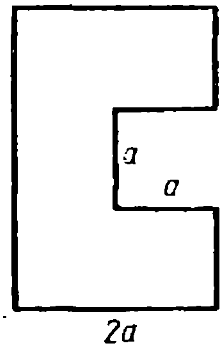


Рис. 93.

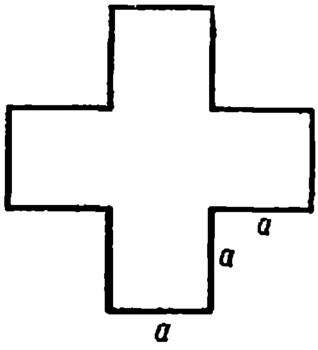


Рис. 94.

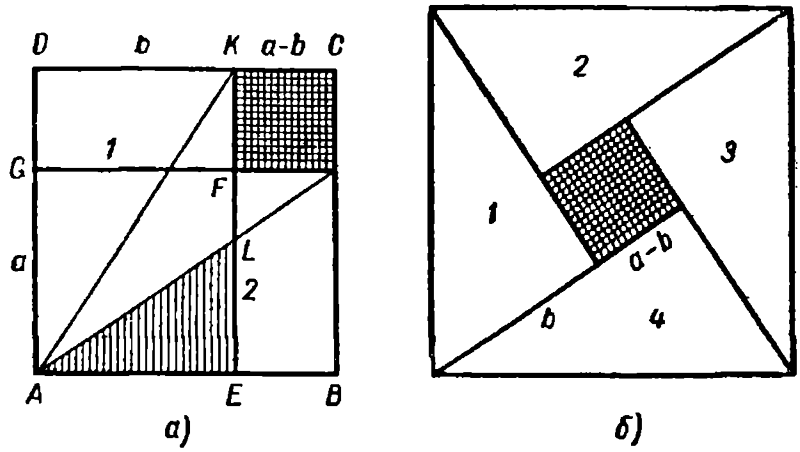


Рис. 95.

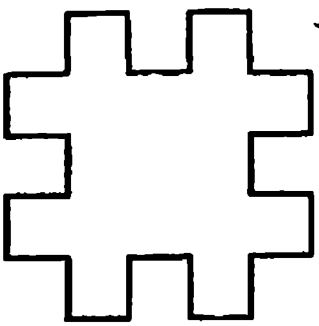


Рис. 96.

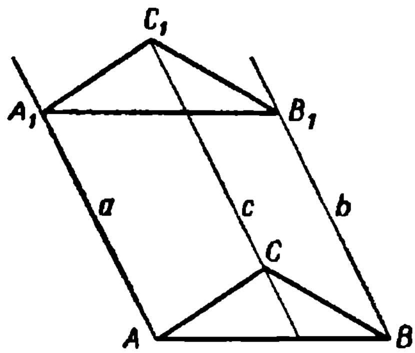


Рис. 97.

6. Докажите, что два параллелограмма с равными основаниями и равными высотами равносоставлены.

7. Докажите: если произведение двух смежных сторон одного прямоугольника равно произведению двух смежных сторон второго прямоугольника, то эти прямоугольники равносоставлены.

8. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке 96, двумя прямыми на 4 куска, из которых можно сложить квадрат.

9. Через три вершины A, B и C треугольника ABC (рис. 97) проходят три параллельные прямые a, b, c, причем на a и b не лежат никакие внутренние точки сторон треугольника. $\triangle ABC$ скользит («как по рельсам») своими вершинами по этим прямым, не меняя ни своей формы, ни размеров. а) Докажите, что площадь участка, который опишет (или, как говорят иногда, «заметет») сторона AB, равна сумме площадей участков, «заметаемых» двумя другими сторонами; б) выведите отсюда теорему Пифагора.

10. Как разрезать данный равнобедренный треугольник на четыре куска, из которых можно составить два треугольника, подобных данному?

11. а) Как разрезать треугольник на n^2 равных между собой треугольников ($n = 2, 3, 4, 5, \ldots$)?

б) Можно ли из n^2 равных между собой треугольников составить треугольник, подобный каждому из них?

в) Как разрезать треугольник за четыре части, из которых можно составить два треугольника, подобных данному?

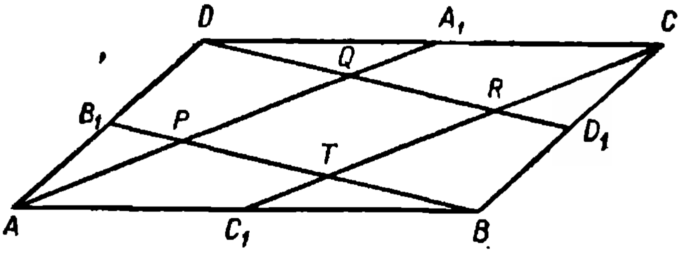


Рис. 98.

12. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 98); A_1,B_1,C_1,D_1—середины его сторон. Во сколько раз площадь четырехугольника $PQRT$ меньше площади $ABCD$?

13. Допустим, что вы перекроили какой-то треугольник в прямоугольник, а ваш товарищ перекроил другой треугольник в тот же прямоугольник. Могли бы вы указать способ, как перекроить первый треугольник во второй?

14. (Обобщение.) Докажите: если каждый из двух многоугольников Φ_1 и Φ_2 можно перекроить в многоугольник Φ, то можно многоугольник Φ_1 перекроить в многоугольник Φ_2.

15. Докажите: а) равновеликие прямоугольники равносоставлены, б) равновеликие треугольники равносоставлены, в) многоугольник можно перекроить в некоторый треугольник.

16*. Докажите следующую теорему, принадлежащую венгерскому математику Фаркашу Бойяи и немецкому любителю математики Гервину: если два многоугольника равновелики, то они и равносоставлены.

§ 2. ДВОЯКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ПЛОЩАДИ (ИЛИ ОБЪЕМА) КАК СПОСОБ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В ряде случаев удается упростить решение геометрической задачи, в которой нет и речи о площадях, если двумя способами выразить площадь какой-либо фигуры (связанной с данной задачей) через данные и искомые величины, и полученные выражения приравнять. Нередко получается уравнение, из которого можно найти искомую величину.

1. а) Докажите, что сумма расстояний любой точки основания равнобедренного треугольника до боковых его сторон равна высоте треугольника, опущенной на боковую сторону; б) сформулируйте и решите аналогичную задачу для треугольной пирамиды.

2. а) Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, лежащей внутри или на контуре правильного треугольника, до трех сторон треугольника равна высоте треугольника; б) сфор-

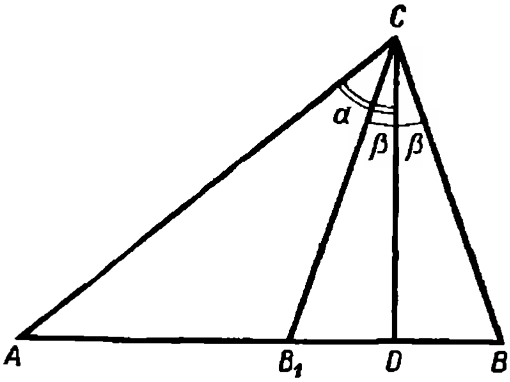


Рис. 99.

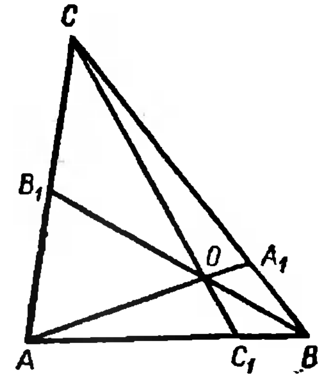


Рис. 100.

мулируйте и докажите аналогичную теорему для тетраэдра.

3. Пусть $\triangle ABC$ правильный. Найдите на плоскости множество точек, для которых сумма расстояний от прямых AB, BC и CA равна данному отрезку d. Рассмотрите случаи: а) $d = h$ (h — высота $\triangle ABC$), б) $d < h$, в) $d > h$.

4. а) Вычислите биссектрису угла A треугольника ABC, если этот угол равен α, а заключающие его стороны равны b и c; б) в том же треугольнике вычислите отрезок биссектрисы внешнего угла при вершине A, заключенный между вершиной A и продолжением стороны BC.

5. Пусть α и β — острые углы. Докажите, пользуясь рисунком 99, что:

а) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$,

б) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

6. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри или на контуре правильного многоугольника, до прямых, на которых лежат его стороны, не зависит от положения выбранной точки.

7. Найдите множество точек плоскости, для которых сумма расстояний от прямых, на которых лежат стороны данного правильного n-угольника, равна данному отрезку d (можно ограничиться случаем $n = 4$).

8. Французский геометр Жергон установил в 1818 году такую теорему: «Если три прямые AO, BO и CO (рис. 100), проходящие через вершины A, B, C треугольника ABC и произвольную точку O внутри него, встречают стороны треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1, то

а) $\frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1$; б) $\frac{OA}{A_1A} + \frac{OB}{B_1B} + \frac{OC}{C_1C} = 2$».

Докажите теорему Жергона.

9. Сформулируйте и докажите для тетраэдра теорему, аналогичную теореме Жергона.

§ 3. ТЕОРЕМА ЧЕВЫ

1. Пусть отрезки AA_1, BB_1, CC_1 (рис. 100), соединяющие вершины треугольника ABC с точками на противоположных сторонах, проходят через общую точку O. Докажите, что

$$S_{\triangle AOC} : S_{\triangle BOC} = AC_1 : C_1B.$$

2. Почти 300 лет назад, в 1678 году итальянский геометр Джованни Чева доказал такую теорему: «Пусть A, B, C — вершины треугольника ABC, A_1, B_1, C_1— точки на сторонах BC, CA, AB; если прямые AA_1, BB_1, CC_1 имеют общую точку, то имеет место равенство:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1».$$

Докажите теорему Чевы.

3. Остается ли теорема Чевы в силе, если некоторые из точек A_1, B_1, C_1 лежат не на сторонах треугольника ABC, а на их продолжениях?

4. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Чевы.

5. Пользуясь задачей 4, докажите, что три медианы треугольника проходят через одну точку.

6. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную задаче 5: а) для биссектрис треугольника, б) для высот треугольника.

7. В треугольник вписана окружность, и каждая из трех точек ее касания со стороной треугольника соединена с противоположной вершиной. Докажите, что образующиеся таким образом три прямые имеют общую точку.

8. Пусть отрезки AA_1, BB_1, CC_1, соединяющие вершины треугольника с точками A_1, B_1, C_1 на противоположных им сторонах, имеют общую точку O. Докажите, что

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C} \text{ (теорема Ван-Обеля).}$$

9. В треугольнике ABC известны стороны a, b, c. Вычислите, в каком отношении делит биссектрису угла A точка пересечения биссектрис.

10. Докажите теоремы Чевы и Ван-Обеля с помощью понятия о центре тяжести.

1. Более двух тысячелетий назад было подмечено, что все окружности длиннее своих диаметров в одно и то же число раз. Впоследствии это было строго доказано.

Отношение длины окружности к ее диаметру лет 250 назад стали обозначать кратко одной буквой π. Эта греческая буква — первая буква греческого слова *периферия* (περιφερια), что означает окружность. В Древнем Вавилоне считали, что окружность длиннее ее диаметра в 3 раза (то есть $\pi=3$). Но древнегреческие геометры уже знали, что $\pi \neq 3$. Число π удивительное. Оно не целое, но оно и не дробное. Можно применить к целым числам любое конечное число раз и в любой последовательности арифметические действия или действия извлечения корней, но никогда в результате этих операций не получится число π. Лет 90 назад немецкий математик Линдеман доказал, что, решая любые алгебраические уравнения с целыми или дробными коэффициентами, мы не получим числа π.

То обстоятельство, что число π не выражается в виде какой-либо простой дроби, представляет некоторые неудобства. Известен даже случай, когда законодательное собрание штата Индиана (США) приняло закон, по которому число π должно считаться равным 3,2. Понятно, что такой закон пришлось вскоре отменить: число π не подвластно юридическому законодательству.

Число π можно представить в виде бесконечной десятичной непериодической дроби. Было найдено много различных рациональных приближений для числа π. Так, например, древнеримский архитектор Витрувий принимал $\pi \approx 3\frac{1}{8}$. Это было очень удобное приближение для строительной практики тех времен, так как, если измерить длину диаметра окружности, то затем легко получить отрезок, равный по длине окружности.

Архимед нашел, еще за несколько столетий до Витрувия, более точное приближение для числа π; он показал, что

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7},$$

так что $\pi \approx 3\frac{1}{7}$.

Чтобы вычислить приближенно число π, в течение многих столетий поступали так: в окружность с диаметром, равным единице, мысленно вписывали правильный многоугольник с большим числом сторон и вычисляли периметр этого многоугольника, привлекая известную «формулу удвоения». Периметр такого многоугольника и принимался равным числу π. Для оценки погрешности такого приближения приходилось рассматривать также периметры правильных описанных многоугольников.

Так, например, голландский математик Лудольф Ван Цейлен после десятилетних вычислений подсчитал этим способом число π с точностью до двадцати знаков после запятой. Для этой цели ему пришлось рассматривать правильные многоугольники, у которых $60 \cdot 2^{29}$ сторон. Книгу, в которой он излагает эти вычисления, он заканчивает словами: «У кого есть охота, пусть пойдет дальше». Однако вскоре после этого такую охоту проявил он сам и, потратив еще 12 лет, нашел еще 15 десятичных знаков числа π.

2. Обычно число π привыкли связывать с окружностью, однако это число появляется в различных математических результатах, в которых ни о какой окружности речи не идет. Приведем несколько примеров.

1. Когда-то немецкий математик Лейбниц (1646—1716) заинтересовался, сколько получится в пределе, если последовательно будем складывать такие числа:

$$1, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, +\frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \ldots,$$

то есть если искать предел такой последовательности:

$$\begin{aligned}&1,\\ &1-\frac{1}{3},\\ &1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5},\\ &1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7},\end{aligned}$$

Оказалось, что в пределе мы получим $\frac{\pi}{4}$. (Для доказательства Лейбниц пользовался приемами высшей математики.)

2. Аналогичный вопрос поставил перед собой Леонард Эйлер. Его интересовала «сумма» чисел:

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \ldots,$$

точнее говоря, предел такой последовательности:

$$\begin{aligned}&1,\\ &1+\frac{1}{2^2},\\ &1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2},\\ &1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}, \ldots .\end{aligned}$$

Оказалось, что этот предел равен $\frac{\pi^2}{6}$.

3. Было найдено и много других формул, где неожиданно появляется число π. Вот формула английского математика Джона Валлиса:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots.$$

Иначе говоря, если рассматривать такую последовательность чисел:

$$\frac{2}{1},$$
$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3},$$
$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3},$$
$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5},$$
$$\cdots\cdots\cdot,$$

то в пределе получим $\frac{\pi}{2}$.

4. Французский естествоиспытатель Бюффон заинтересовался такой задачей. Представим себе, что большой лист бумаги, лежащий на столе, разграфлен параллельными линиями, причем расстояния между соседними параллелями равны d. На этот лист мы бросаем сверху иглу той же длины d и подсчитываем, сколько раз при данном числе бросаний игла пересечет одну из параллелей (безразлично какую). Допустим, что всего мы бросали иглу n раз и из них m раз она пересекла какую-либо параллель. Оказывается, что при больших n дробь $\frac{m}{n}\approx\frac{2}{\pi}$, и это равенство будет тем точнее, чем больше будет число бросаний.

Полученные формулы для числа π позволяют вычислить это число с большой точностью, не обращаясь к окружности и правильным многоугольникам, и притом значительно легче и быстрее.

Известно немало случаев, когда любители математики тратили многие годы на вычисление π с большей степенью точности.

В некоторых учебниках, например, упоминается, что англичанин Шенкс после 15-летних вычислений нашел 707 знаков этого числа (здесь стоит добавить, что на 528-м знаке Шенкс ошибся). Понятно, что получение такой большой точности для приближения числа π представляет лишь спортивный интерес, так как для всех практических целей в самых точных вычислениях вполне достаточно знания первых 10—12 десятичных знаков этого числа.

Желая продемонстрировать возможности современных вычислительных машин, их несколько раз использовали для вычисления числа π с большой точностью. Наиболее интересный эксперимент был поставлен в 1963 году на машине ИБМ 70—90. Менее чем за 9 часов работы эта машина нашла 100 000 десятичных знаков числа π. Эти первые цифры числа занимают 20 страниц убористого текста. Приведем 20 первых десятичных знаков этого числа:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots.$$

1. Верно ли, что $\pi = 3{,}14$?

2. Какова длина окружности радиуса 20 *см*?

3. Каков радиус окружности, если ее длина 0,7 *км*?

4. Представим себе, что Земля — совершенно гладкий шар и что он по экватору обтянут обручем в 40 млн. *м*. Если увеличить длину этого обруча на 10 *м*, то между Землей и обручем образуется промежуток. Сможет ли через него проползти человек?

Глава VII

МАТЕМАТИКА, ЛОГИКА, ЭВРИСТИКА

§ 1. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ И БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

1. Исчисление высказываний — это один из разделов бурно развивающейся математической дисциплины — математической логики.

Еще в XVII столетии знаменитый немецкий математик Лейбниц мечтал о том, чтобы создать вычислительный аппарат, который позволил бы *«вычислить ответы»* к различным логическим задачам.

Такое исчисление было создано в середине прошлого столетия и было опубликовано в 1854 году в книге английского математика Джорджа Буля «Исследование законов мысли». Оно получило название «алгебры логики» или «исчисления высказываний». И этот математический аппарат действительно позволяет в ряде случаев «вычислить истину»!

С понятием высказывания и простейшими примерами высказываний мы уже встречались раньше (глава II, § 3). Высказывание — это предложение, о котором имеет смысл сказать, что оно истинно или ложно. Например, предложения «Земля вращается вокруг своей оси» и «Болит голова» — это высказывания, а предложение: «О поле, поле, кто тебя усеял мертвыми костями?» — уже не следует считать высказыванием.

Каждое высказывание будем обозначать одной буквой: a, b, c и т. п. Можно интересоваться расположением слов в высказывании, его звучанием, наличием определенного ритма в нем и т. д. Алгебра логики этими вещами не интересуется. Для исчисления высказываний важно только одно: истинно ли данное высказывание или оно ложно. В зависимости от этого говорят, что значение истинности данного высказывания a равно единице или, соответственно, равно нулю.

В первом случае пишут

$$a = 1,$$

во втором —

$$a = 0.$$

Например, если высказывние a означает: «равносторонний треугольник имеет равные углы», а высказывание b означает: «рост человека составляет 40 *м*», то можно написать:

$$a = 1,$$

$$b = 0.$$

Может оказаться, что два высказывания a и b одновременно истинны или одновременно ложны; тогда их назовем равносильными (эквивалентными) и условимся писать

$$a = b$$

Например, высказывания
a: *«Этот треугольник равносторонний»*,
b: *«Этот треугольник равноугольный»* —
будут равносильными, так что $a = b$.

В том же § 3 из главы II мы условились называть отрицанием высказывания a такое высказывание $\bar{a}$, которое ложно, если a истинно, и истинно, если a ложно. Короче можно то же самое условие задать с помощью следующей таблицы.

a	$\bar{a}$
1	0
0	1

Эта таблица называется таблицей истинности для отрицания. Можно также сказать, что отрицание $\bar{a}$ (точнее говоря, его значение истинности) — это некоторая функция от высказывания a (опять-таки имеется в виду значение истинности этого высказывания), причем эта функция задается приведенной выше таблицей.

Обратимся теперь к рассмотрению составных (иногда говорят «сложных») высказываний, которые можно образовать из данных высказываний.

Составное высказывание окажется истинным или ложным в зависимости от того, истинны или ложны те более простые высказывания, из которых оно составлено. Иначе говоря, значение истинности составного высказывания является функцией от значений истинности его компонент.

Рассмотрим различные возможности образования составных высказываний из двух исходных высказываний a и b.

1. Конъюнкцией двух высказываний a и b называется такое высказывание, которое истинно тогда, и только тогда, когда оба высказывания a, b истинны.

Записывается так: $a \wedge b$, читается «a и b».

Значение истинности конъюнкции можно задать через значения истинности составляющих ее высказываний с помощью такой таблицы:

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Данное здесь определение конъюнкции «a и b» вполне согласуется с привычным для нас употреблением связки «и», в этом можно убедиться на конкретных примерах. Так, если a означает «Валерик читает книгу», а b означает «Саша собирает ягоды», то конъюнкцию $a \wedge b$, то есть высказывание «Валерик читает книгу, и Саша собирает ягоды», естественно, должны считать истинной, если одновременно и высказывание a истинно (Валерик действительно читает книгу), и высказывание b истинно (Саша на самом деле собирает ягоды); если же хотя бы одно из этих высказываний ложно (если неправда, что Валерик читает книгу, или неправда, что Саша собирает ягоды, или то и другое неправда), то мы, естественно, уже будем считать, что построенное выше составное высказывание ошибочно, ложно.

II. Дизъюнкцией двух высказываний a, b называется такое высказывание, которое истинно тогда, и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний a, b истинно.

Записывается так: $a \vee b$; читается: «a или b».

В соответствии с этим определением значения истинности дизъюнкции высказываний a, b могут быть заданы с помощью такой таблицы:

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Легко проверить на примерах, что случаи, предусмотренные первыми тремя строками этой таблицы, вполне соответствуют привычному для нас употреблению слова «или».

Немного сложнее в случае, соответствующем четвертой строчке: если a истинно и b истинно, то мы уславливаемся считать (согласно приведенному выше определению дизъюнкции), что «a или b» истинно; соответствует ли это нашему «житейскому» употреблению слова «или»? Если присмотреться повнимательнее, то нетрудно заметить, что в разговоре употребляем слово «или» в различных смыслах. «Или» может означать «либо одно, либо другое, либо то и другое» (например: «Он в прошлом году был в Болгарии или Румынии», а может быть, и там и там). Но «или» может означать «либо то, либо другое, но не то и другое вместе» (например, «Вот сейчас он в Болгарии или Румынии», но, разумеется, не в обеих странах одновременно). При рассмотрении дизъюнкции всегда имеют в виду употребление «или» в *первом* из этих смыслов. Заметим, что в математике употребляют еще в качестве самостоятельной логической функции так называемую «строгую дизъюнкцию», которой соответствует употребление слова «или» во втором (исключающем) смысле.

Строгая дизъюнкция двух высказываний a, b (записывается так: $a \dot{\vee} b$, читается: «строго a или b» или «либо a, либо b») определяется с помощью такой таблицы истинности:

a	b	$a \dot{\vee} b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

III. Импликацией двух высказываний a и b называется такое высказывание, значение истинности которого определяются следующей таблицей:

a	b	$a \to b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Записывается: $a \to b$; читается: «a влечет за собой b», «если a, то b».

Вот несколько примеров импликаций. Пусть истинно следующее предложение:

a: «Треугольник равносторонний».

Тогда, как известно, истинно высказывание

b: «Треугольник равноугольный».

Поэтому импликация «Если треугольник *ABC* равносторонний, то он равноугольный» истинна (см. первую строчку таблицы). А импликация «Е с л и *треугольник ABC равносторонний*, т о *он прямоугольный*» ложна (см. вторую строчку таблицы).

Последние две строчки нашей таблицы могут вызвать некоторые сомнения: хорошо ли они согласуются с привычным употреблением выражения «если ..., то...»? Ведь в этих случаях, согласно таблице, считаются истинными высказывания: «Если a ложно, то b истинно» и «Если a ложно, то b тоже ложно».

Однако такая договоренность отражает тот известный факт, что из ложного высказывания можно (с помощью правильных рассуждений) вывести как правильное, так и ошибочное заключение.

Мы рассмотрели четыре логические функции: конъюнкцию, дизъюнкцию, строгую дизъюнкцию, импликацию. Каждая характеризуется своей таблицей истинности. Но можно образовать и другие логические функции двух высказываний, определяя каждую из них с помощью своей таблицы истинности.

Нетрудно подсчитать, что всего различных логических функций двух высказываний может быть 16. Вот еще некоторые из этих функций.

Двойная импликация «$a \longleftrightarrow b$» («a и b одновременно истинны или ложны»):

a	b	$a \longleftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Операция Шеффера «a/b» («a и b несовместимы», то есть a и b не являются одновременно истинными):

a	b	a/b
1	1	0
0	0	1
0	1	1
1	0	1

Возможно образовать составные высказывания не из двух, а из любого другого числа высказываний. Однако оказывается, что любое *составное высказывание* можно выразить лишь с помощью двух простейших операций: отрицания и конъюнкции (или отрицания и дизъюнкции)*.

1. Ниже буквы a и b обозначают соответственно высказывания:

«Валерик читает книгу» и

«Саша собирает ягоды».

Прочтите словами следующие высказывания:

$$\bar{a} \vee b, \quad \overline{a \vee b}, \quad \overline{\bar{a} \wedge \bar{b}}.$$

2. Буквами a и b обозначены высказывания

a: *«Рука болит»*, b: *«Голова кружится»*.

Запишите с помощью символов алгебры логики следующие составные высказывания:
«Рука болит, и голова кружится»,
«Рука болит, но голова не кружится»,
«Неправда, что рука не болит и голова не кружится».

3. Сформулируйте отрицание следующего высказывания: данный $\triangle ABC$ является прямоугольным и равнобедренным.

4. Докажите следующие формулы:

$$a \to b = \bar{a} \vee b,$$

$$a \longleftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a).$$

5. а) Запишите с помощью символов алгебры логики теорему, у которой условием служит высказывание a, а заключением — высказывание b; б) запишите (с помощью той же символики) теоремы, обратную и противоположную данной; в) запишите высказывание «Если верна теорема, обратная данной, то верна и теорема, противоположная данной». Справедливо ли последнее высказывание?

6. Докажите следующие полезные логические тождества, носящие название «правил де Моргана»:

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}, \quad \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}.$$

7. Упростите следующие выражения:

$$\bar{\bar{a}}, \quad a \vee a, \quad a \wedge a, \quad a \vee \bar{a}, \quad a \wedge \bar{a}.$$

8. Убедитесь, что для высказываний имеют место следующие формулы:

1) $a \vee b = b \vee a$. 2) $a \wedge b = b \wedge a$.

3) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$. 4) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

5) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. 6) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

* И даже с помощью только одной операции — операции Шеффера.

2. Булевы алгебры. Если условимся писать вместо знаков $\vee$ и $\wedge$ соответственно более привычные знаки $+$ и $\cdot$, то, как легко видеть из задач 6—8, мы получим, что для любых высказываний справедливы следующие зависимости:

1) $a+b=b+a$ (коммутативность сложения);

2) $a\cdot b=b\cdot a$ (коммутативность умножения);

3) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность сложения);

4) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ (ассоциативность умножения);

5) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ (дистрибутивность умножения относительно сложения);

6) $a+b\cdot c=(a+b)\cdot(a+c)$ (дистрибутивность сложения относительно умножения);

7) $a+a=a$;

8) $a\cdot a=a$;

9) $a\cdot(b+\bar{b})=a$

10) $a+b\cdot\bar{b}=a$

(правила поглощения);

11) $\overline{a+b}=\bar{a}\cdot\bar{b}$

12) $\overline{a\cdot b}=\bar{a}+\bar{b}$

(правила де Моргана);

13) $\bar{\bar{a}}=a$ (правило двойного отрицания).

Кроме того, если обозначить через 0 высказывание, которое наверняка ложно, а через 1 — высказывание, которое заведомо истинно, то имеют место еще такие зависимости:

$$a+\bar{a}=1, \qquad a\cdot\bar{a}=0,$$
$$1+a=1, \qquad 1\cdot a=a,$$
$$0+a=a. \qquad 0\cdot a=0.$$

Указанными зависимостями удобно пользоваться для преобразования более сложных высказываний.

Помимо высказываний существуют и другие системы объектов a, b, c, ..., для которых можно так определить операции «сложения», «умножения» и «отрицания», чтобы удовлетворялись те же 13 требований (или аксиом).

Система объектов a, b c, ..., для которой введены операции «сложения», «умножения» и «отрицания», причем выполняются указанные выше 13 требований (аксиом), называется *булевой алгеброй*.

3. Можно указать различные конкретные булевы алгебры.

Алгебра множеств. Иногда бывает, что в ходе каких-то рассуждений мы имеем дело только с такими множествами, которые являются частями одного и того же вполне определенного множества. Например, в планиметрии каждая фигура является частью множества всех точек плоскости. Мы можем говорить о различных множествах школьников, и все эти множества — части множества всех школьников нашей планеты.

Итак, мы сейчас будем рассматривать только такие множества, которые являются частями некоторого заданного множества U. Это множество U в подобных случаях называют универсальным или единичным (в первом из приведенных выше примеров универсальным множеством было множество всех точек плоскости, во втором — множество всех школьников Земли).

Рассмотрим всевозможные множества A, B, C, ..., являющиеся частями единичного множества U; сумма $A + B$ — это объединение A и B (ч. II, гл. II, § 1), произведение $A \cdot B$ — их пересечение; «отрицание» $\bar{A}$ будем истолковывать как дополнение множества A до универсального множества U (то есть разность $U - A$). Легко проверить, что в таком случае все написанные выше условия (аксиомы) булевой алгебры выполняются — иначе говоря, множество всех частей универсального множества U образуют булеву алгебру. Роль нуля выполняет пустое множество, роль единицы — универсальное множество U. Этим можно пользоваться для решения различных задач, в том числе и по элементарной математике.

9. а) Пусть A, B, C, D — какие-нибудь множества (являющиеся частями некоторого множества U). Докажите, что

$$\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D};$$

б) Перед началом занятий в учебных заведениях в вагоне поезда Москва — Смоленск ехало 80 человек. Из них: 70% мужчин, 80% студентов и студенток средних и высших учебных заведений, 75% моложе 20 лет, 85% ехало до Смоленска. Определите минимальное количество студентов — юношей моложе 20 лет, ехавших до Смоленска в этом вагоне.

Алгебра событий. Для теории вероятностей (с которой ознакомимся позднее) весьма полезна «алгебра событий», которая оказывается булевой алгеброй. Мы нередко сталкиваемся с тем, что производится какое-либо испытание (эксперимент, наблюдение и т. п.). Исходом, результатом всякого испытания является некоторое *событие*. Общее свойство событий состоит в том, что они либо происходят («осуществляются»), либо не происходят.

Например, пусть испытание состоит в том, что из ящика, в котором имеются 100 одноименных деталей (среди которых могут оказаться и бракованные по размерам или окраске), мы берем наугад одну и выясняем, является ли она по размерам или окраске стандартной или бракованной. Итогом этого опыта могут быть такие события:

A: вынутая деталь стандартная;

B: вынутая деталь бракованная по размерам;

C: вынутая деталь бракованная по окраске.

Для событий можно ввести операции сложения: суммой двух событий P и Q называют событие R, которое происходит тогда, и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий P, Q; его записывают так:

$$R = P + Q$$

(читается «P плюс Q», «P или Q»). В нашем примере событие S: «Вынутая деталь оказалась бракованной» — является суммой двух событий B и C.

Произведением двух событий P, Q назовем событие R_1, которое происходит тогда, и только тогда, когда происходят оба события P, Q. Пишут

$$R_1 = P \cdot Q$$

(«P умножить на Q», «P и Q»). В нашем примере событие R_1: «Вынутая деталь бракованная и по размерам и по окраске» — является произведением двух событий B и C.

Под отрицанием (или дополнением) какого-либо события P условимся понимать такое событие, которое происходит тогда, и только тогда, когда P не происходит (обозначается так: $\overline{P}$. Читается: «не P»).

В нашем примере событие S: «Вынутая деталь (при указанном выше испытании) бракованная» — это отрицание события A:

$$S = \overline{A}.$$

Если одно из двух событий является отрицанием другого, то их еще называют противоположными.

Роль единицы (будем писать E) будет выполнять достоверное событие (то есть такое, которое в результате испытания заведомо осуществится), а роль нуля (будем писать 0) — невозможное событие, то есть такое, которое в результате испытания осуществиться не может.

Например, если известно, что все детали в ящике стандартные, то извлечение стандартной детали — достоверное событие, а извлечение бракованной — невозможное. Легко проверить, что все требования булевой алгебры будут справедливы и для «алгебры событий».

10. Из ящика с деталями извлекают последовательно три детали и выясняют, являются ли они стандартными или бракованными. Пусть A_1, A_2, A_3 — события, которые состоят в появлении стандартной детали соответственно при первом, при втором и при третьем извлечении детали; пусть B — событие, которое состоит в появлении (в точности) *одной* бракованной детали после трех извлечений. Выразите событие B через события A_1, A_2, A_3 с помощью алгебраических операций.

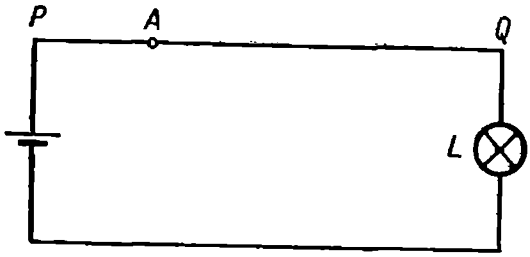


Рис. 101.

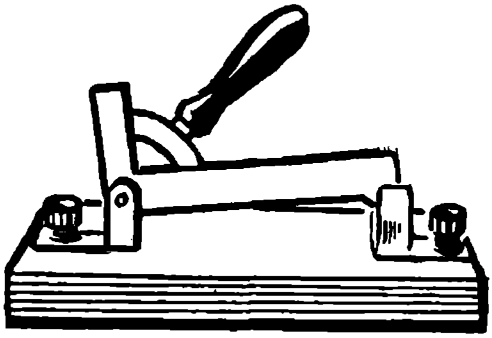


Рис. 102.

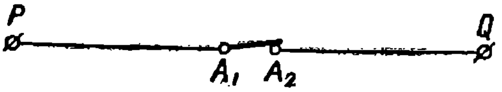


Рис. 103.

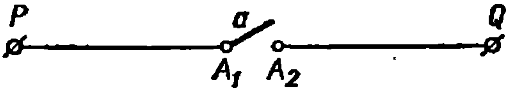


Рис. 104

11. Разъясните словами смысл записей
$$A+B=E,\quad A\cdot B=0,\quad A\cdot B=E.$$
(здесь A, B — события).

12. Чему равны $A+A$, $A\cdot A$?

13. Пусть события A, B, C несовместимы (то есть если одно из них происходит, то два других уже невозможны). Запишите это требование формулой.

4. Советский математик В. И. Шестаков и американский инженер К. Шеннон обратили внимание на то обстоятельство, что булеву алгебру мы получаем при рассмотрении контактных и релейно-контактных схем. Ограничимся рассмотрением контактных схем. Рассмотрим электрическую цепь (рис. 101); для определенности будем полагать, что это цепь постоянного тока.

Вообразим себе какой-либо провод PQ, у которого один конец присоединен к положительному полюсу источника постоянного тока, а второй конец через некоторое сопротивление, например через электрическую лампочку, к отрицательному полюсу того же источника. По цепи будет течь ток, что можно обнаружить по горящей лампочке.

В дальнейшем будем рисовать только провод PQ, а остальную часть рисунка 101 будем лишь подразумевать.

Возьмем однополюсный рубильник (рис. 102) (ниже слово «однополюсный» будем опускать). Разорвем провод PQ в какой-нибудь точке A и образовавшиеся два конца A_1 и A_2 подключим к клеммам рубильника. Образовавшуюся картину схематично изобразим так, как на рисунках 103, 104. Если рубильник включен, то положение будет таким же, как раньше: ток по цепи будет течь (лампочка будет гореть). Если же рубильник выключен, то тока в цепи не будет, лампочка гореть не будет.

Рубильник — одна из разновидностей контактного устройства.

Рис. 105.

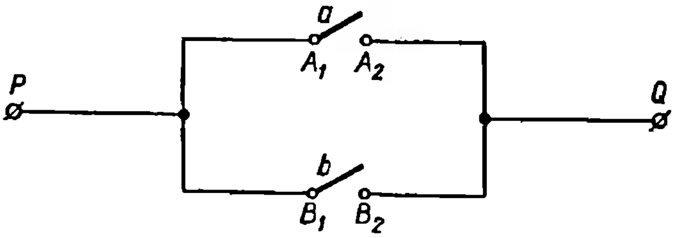


Рис. 106.

Основное свойство каждого контакта состоит в том, что он, будучи включенным в электрическую цепь, может быть лишь в одном из двух состояний: либо он замыкает цепь (рис. 103), либо ее размыкает (рис. 104). Каждый контакт (рубильник) будем обозначать одной буквой, скажем a, b, c, x, ... В том случае, когда рубильник a замыкает участок электрической цепи, условимся писать $a = 1$, а если рубильник a размыкает участок электрической цепи, будем писать $a = 0$.

У каждого рубильника мы можем различать входную клемму («вход») и выходную клемму («выход»).

Пусть теперь у нас имеется *два* рубильника a и b. Мы можем их соединить проводами в более сложные схемы *последовательно* (рис. 105) или *параллельно* (рис. 106). Мы получим две новые «схемы из рубильников», которые тоже отнесем к «контактным схемам». Каждая из этих схем имеет «вход» (P) и «выход» (Q). Каждую такую схему обозначим для краткости одной буквой (например, x).

Такую схему мы можем как единое целое включить в электрическую цепь, присоединив «вход» P к положительному полюсу источника тока, а выход Q — через некоторое сопротивление, например через электрическую лампочку, к отрицательному полюсу того же источника.

В зависимости от того, включены или выключены рубильники a или b, по цепи будет проходить ток (лампочка горит) или ток не будет проходить. При этом, если контактная схема x пропускает ток, будем писать: $x = 1$. В противном случае будем писать: $x = 0$.

Вникнем теперь, как будет работать каждая из схем, изображенных на рисунках 105 и 106.

Контактное устройство, изображенное на рисунке 105 (последовательное соединение контактов), будет пропускать ток лишь тогда, когда *оба* рубильника включены; во всех остальных случаях ток проходить не будет. Контактное устройство, изображенное на рисунке 105, назовем **произведением** (или **конъ-**

ю н к ц и е й) контактов a и b и обозначим так: $a \cdot b$. Можем написать следующую таблицу

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица совпадает с таблицей для конъюнкции в исчислении высказываний. Аналогично можно определить произведение трех, четырех и более контактов.

Контактное устройство, приведенное на рисунке 106 (параллельное соединение контактов), лишь тогда пропускает ток, когда *хотя бы один* из рубильников a или b пропускает ток (то есть включен). Мы такую схему назовем с у м м о й (или д и з ъ ю н к ц и е й) контактов a и b и обозначим так: $a + b$. Таким образом, возможны лишь случаи, указанные в следующей таблице:

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Аналогично можно определить сумму нескольких (трех, четырех,...) контактов.

Два рубильника можно жестко объединить (и притом двумя принципиально различными способами) в одно устройство, которое условимся здесь называть п е р е к л ю ч а т е л е м.

Рассмотрим обе возможности.

I. Рубильники могут быть объединены (рис. 107) так, чтобы они включались или выключались одновременно (иногда говорят «синхронно»)[1]. В этом случае условимся оба рубильника обозначать одной и той же буквой (например, a).

II. Два рубильника a и b могут быть смонтированы так (рис. 108), что при включении одного из них второй выключается, и наоборот[2].

---

[1] В электротехнике такое устройство называют обычно двухполюсным рубильником.

[2] В электротехнике такое устройство обычно называют однополюсным переключателем.

В таком случае будем контакт (рубильник) b обозначать $\bar{a}$, и будем его называть «отрицанием контакта a». Связь между контактами a и $\bar{a}$ определяется таблицей:

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

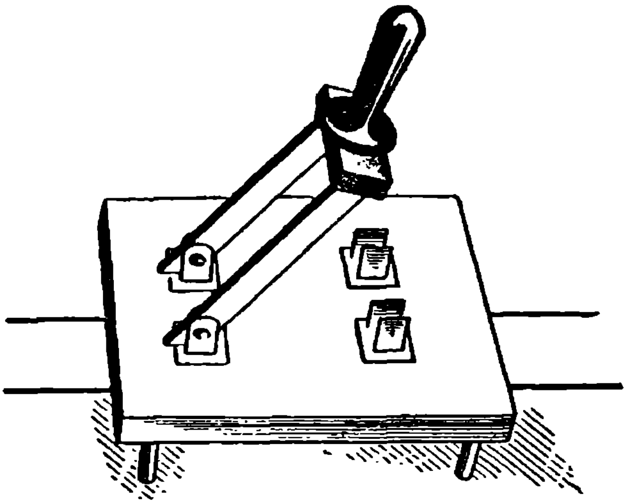


Рис. 107.

Подобно тому как мы жестко объединяли *два* рубильника в один «переключатель», можно, разумеется, поступить и с тремя, четырьмя и большим числом рубильников. Например, можно три рубильника объединить так, чтобы два из них включались синхронно, а третий рубильник при этом выключался, и наоборот: когда два первых рубильника выключены, третий включен.

Нетрудно понять, что с помощью одного многополюсного переключателя можно одновременно несколько контактов замкнуть, а несколько других — разомкнуть.

Имея несколько рубильников, мы можем их соединить в более сложные контактные схемы, располагая одни из них параллельно, другие — последовательно, проделывая аналогичные операции с образовавшимися схемами, и т. д. Так можно образовать очень сложные и разнообразные схемы. Но у всех таких схем одно общее: если вход (P) схемы подключен к положительному полюсу источника тока, а выход (Q) — к отрицательному полюсу (через некоторое сопротивление), то наличие или отсутствие тока в цепи зависит только от того, какие рубильники в контактной схеме включены, а какие нет.

Каждую контактную схему можно рассматривать как *единое целое* и до поры до времени не вникать в то, каким образом она со-

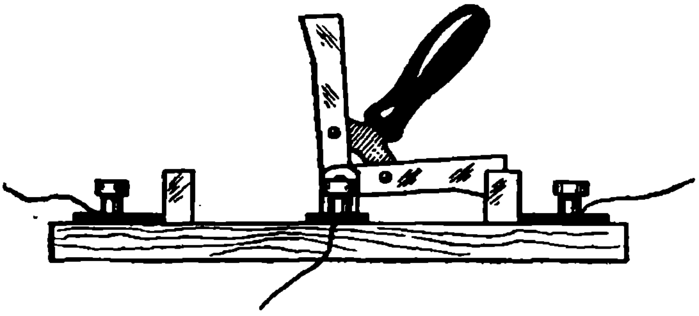


Рис. 108.

ставлена из отдельных рубильников. Подчеркивая это обстоятельство, говорят, что контактную схему можно рассматривать как «черный ящик»; ее обозначают одной буквой x, y, a, b, c, . . . (так же, как и отдельный рубильник).

Данное выше определение суммы и произведения двух контактов можно перенести и на тот случай, когда имеем две *произвольные* контактные схемы.

Произведением $a \cdot b$ двух контактных схем a и b можно назвать такую контактную схему, которая образуется, если схемы a и b соединены последовательно, а их суммой $a + b$ называют контактную схему, которая образуется, если схемы a и b соединить параллельно.

Следует договориться, какие контактные схемы следует считать «равными» (или эквивалентными, или равносильными). Пусть имеются две контактные схемы x и X, составленные из рубильников a, b, c, ..., l (если два рубильника, входящие в схемы x и X, обозначены одной и той же буквой, то это означает, что они включаются и выключаются одновременно). Схемы x и X естественно считать равносильными (или «равными»), если при любой комбинации включенных рубильников первая схема пропускает ток тогда, и только тогда, когда и вторая пропускает ток. В таком случае будем писать: $X = x$.

Например, легко проверить (перебрав все возможные случаи включения рубильников), что схему $a \cdot b + a \cdot c$ (рис. 109) и схему $a \cdot (b + c)$ (рис. 110) следует согласно этому определению считать равносильными.

Если же при любой комбинации включения рубильников вторая контактная схема не пропустит тока, когда первая пропускает ток, и наоборот, то говорят, что схема X является отрицанием схемы x, и пишут:

$$X = \bar{x}.$$

Например, легко проверить, что если a и b — два рубильника, то схема $\bar{a} + \bar{b}$ (рис. 111) является отрицанием схемы $a \cdot b$ (рис. 112), то есть $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a \cdot b}$ (сравните с правилом де Моргана!).

Можно проверить, что контактные схемы, для которых указанным выше образом определены операции сложения, умножения и отрицания, удовлетворяют всем требованиям (аксиомам) булевой алгебры. (Роль единицы выполняет любая контактная схема, всегда пропускающая ток; роль нуля выполняет контактная схема, которая тока не пропускает.)

Из этого можно извлечь реальную выгоду: пользуясь аксиомами булевой алгебры, можно иногда упростить контактную схему, заменить ее равносильной схемой, но с меньшим числом контактов.

Рассмотрим несколько примеров.

14. Пусть a — какой-либо рубильник. Составьте схемы $a \cdot a$, $a \cdot \bar{a}$ и $a+\bar{a}$. Замените каждую из них равносильной ей, но более простой схемой.

15. а) Три товарища Алик, Володя и Сережа решили создать контактную схему с тремя рубильниками a, b, c, причем каждый из товарищей может включить или выключить один (свой) рубильник; лампочка в схеме должна загореться, если хотя бы один из трех товарищей включит свой рубильник. Как составить такую схему?

б) Как составить схему, в которой лампочка должна загореться, если любые два (но не все) из трех ребят включат свои рубильники?[1]

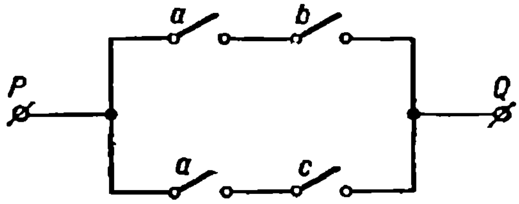


Рис. 109.

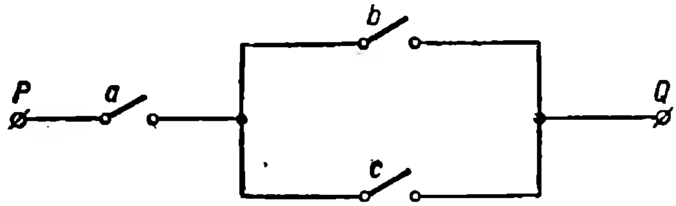


Рис. 110

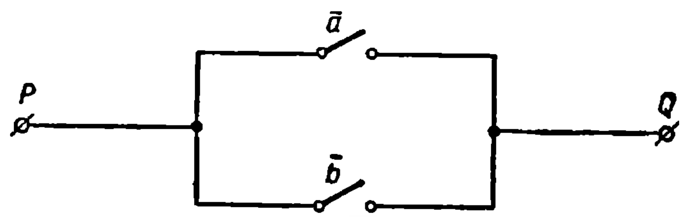


Рис. 111.

Рис. 112.

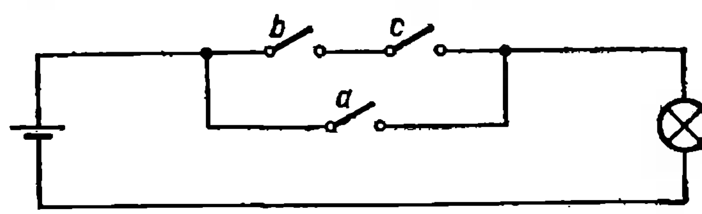


Рис. 113.

в) Как составить схему, в которой лампочка должна загореться, когда большинство ребят включат свои рубильники?

16. Имеется электрическая цепь (рис. 113), в которую включены три рубильника a, b, c. При некоторых комбинациях включения рубильников лампочка L загорится, при других — гореть не будет. Заменяя в случае необходимости рубильники переключателями, составьте другую схему, в которой лампочка загорится, если лампочка L не горит, и наоборот.

---

[1] В случае необходимости разрешается рубильники заменить переключателями.

17. В столовой имеется одна электрическая лампочка. В столовую ведут две двери: из спальни и кухни. Требуется создать электрическую схему с одним переключателем у каждой двери, которая позволила бы включать и выключать свет любым из этих переключателей.

18. В комиссии 4 человека. Каждое решение считается принятым, если за него проголосовало больше половины комиссии. Требуется создать контактную схему с четырьмя переключателями и одной лампочкой, фиксирующую результат голосования. При голосовании каждый член комиссии включает свой рубильник, если он голосует «за», и выключает его, если он «против». Схема должна работать так, чтобы лампочка загорелась, если решение комиссией принято, и не загоралась в противном случае. Как создать такую схему?

§ 2. ПРЕДИКАТЫ И КВАНТОРЫ

1. Математическая логика выработала аппарат, который позволяет значительно сократить записи математических рассуждений. Это удается благодаря введению сокращений для отдельных высказываний и для логических связок («и», «или», «не», «если ..., то...»). С этим мы уже отчасти встречались при рассмотрении исчисления высказываний.

Сейчас мы остановимся на других таких возможностях. Прежде всего дадим понятие о предикате.

Бывает, что высказывание зависит от каких-то переменных (которые могут быть самой разнообразной природы), и значение истинности высказывания зависит от значений этих переменных.

Например, когда мы говорим, «натуральное число x делится на натуральное число y», то это может быть и истиной и ложью: все зависит от того, какими окажутся числа x и y.

Истинность высказывания: «В городе больше миллиона жителей» — зависит от того, какой именно город имеется в виду.

В первом примере мы имели дело с двумя независимыми переменными, во втором — с одним (в нем «переменное» — это город).

Можно себе представить высказывание, истинность или ложность которого зависит от n переменных, где n—какое угодно заданное натуральное число. При этом *известно*, каковы множества возможных значений переменных. Так, в первом примере x и y могли «пробегать» всевозможные натуральные значения.

Высказывание, истинность или ложность которого зависит от одного или нескольких переменных, называют предикатом.

Приведем несколько примеров предикатов.

Пусть $P(x)$ означает: «Рациональное число x является корнем уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$».

Легко проверить, что $P(2) = 1$ (истина), $P(0) = 0$ (ложь). Вот другой пример. Пусть $P(x, y)$ означает: «Целое число x меньше целого числа y». Тогда $P(5, 3) = 0$ (ложь), $P(3, 5) = 1$ (истина).

Из предикатов можно образовать новые предикаты, употребив *логические связки* «и», «или», «не», «если... , то...». Например, пусть x может быть любым натуральным числом, $P(x)$ означает: «Число x делится на 3», а $Q(x)$ означает: «Число x делится на 5». Тогда $P(x) \wedge Q(x)$ означает: «Число x делится и на 3 и на 5» (иными словами: «Число x делится на 15»);

$\overline{P(x)}$ означает: «Число x не делится на 3», и т. д.

2. Располагая каким-либо предикатом, можно строить новые предикаты, привлекая так называемые к в а н т о р ы — приставки, которые ставятся перед предикатом.

Употребляются два вида кванторов:

1) квантор существования и 2) квантор всеобщности.

Объясним, что это такое.

Пусть $P(x, y)$ — какой-нибудь предикат (для определенности — двучленный, то есть зависящий от двух переменных).

Запись $\exists x P(x, y)$ расшифровывается так: «Существует такой x, что имеет место $P(x, y)$». Приставка $\exists x$ и называется квантором существования. Например, пусть x и y — натуральные числа. Пусть $P(x, y)$ означает:

$$x < y.$$

Запись

$$\exists x P(x, y) \tag{1}$$

выражает следующий предикат:

«Существует такое натуральное число x (хотя бы одно), что $x < y$».

В частности, $\exists x P(x, 1) = 0$ (ложно), $\exists x P(x, 5) = 1$ (истинно).

Говорят, что предикат (1) образуется из предиката $P(x, y)$ путем *навешивания* квантора $\exists x$.

Второй вид кванторов — это к в а н т о р в с е о б щ н о с т и. Запись

$$\forall x P(x, y)$$

расшифровывается так: «Для *каждого* x имеет место $P(x, y)$». Приставка $\forall x$ и называется к в а н т о р о м в с е о б щ н о с т и.

Например, если $P(x, y)$ означает $x \geqslant y$ (x и y — натуральные числа), то $\forall x P(x, y)$ означает: «Для каждого x имеет место неравенства $x \geqslant y$». Очевидно, что $\forall x P(x, 1) = 1$ (истинно); $\forall x P(x, 20) = 0$ (ложно).

Пользуясь логическими связками и кванторами, можно компактно записать громоздкие словесные формулировки. Например, предложение (рис. 114):

«Если точка B лежит между точками A и C, а точка C — между точками B и D, то точка C лежит между точками A и D» —

Рис. 114.

можно записать короче, если ввести предикат (X, Y, Z), который означает: «Точка Y лежит между точками X и Z». Предложение принимает такой компактный вид:

$$(A,B,C) \wedge (B,C,D) \rightarrow (A,C,D).$$

1. Пусть предикат $T(n)$ означает: «Теорема верна для натурального числа n». Запишите с помощью кванторов и логических связок («и», «или», «не», «если... , то...») следующее предложение («принцип математической индукции»): «Если теорема верна при $n = 1$ и если для каждого k из справедливости теоремы при $n = k$ следует ее справедливость при $n = k + 1$, то для каждого натурального n теорема верна».

2. Пусть буквы A, B, C, ... обозначают точки некоторой плоскости; a, b, c, ... — прямые той же плоскости; предикат «$A \in a$» означает: «Точка A принадлежит прямой a». Запишите с помощью кванторов и логических связок такую аксиому: «Через любые две точки плоскости проходит прямая».

3. Пусть x может оказаться любым параллелограммом и пусть предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ означают:

$P(x)$ — «x является прямоугольником»;

$Q(x)$ — «x имеет равные диагонали».

Используя эти предикаты, запишите теорему: если параллелограмм является прямоугольником, то его диагонали равны.

4. Введя предикаты, запишите с их помощью предложения:

I. «Через точку M, лежащую вне данной прямой a, проходит прямая, параллельная данной»;

II. «Через точку M вне данной прямой проходит не более чем одна прямая, параллельная данной».

5. Будем точки обозначать латинскими буквами A, B, C, D,... а плоскости — греческими α, β, γ, ... Предикат «$A \in \alpha$» означает: «Точка A принадлежит плоскости α». Пользуясь этим предикатом, логическими связками и кванторами, запишите такие два утверждения:

I. «Существуют четыре точки, не принадлежащие одной и той же плоскости»;

II. «Не существуют четыре точки, принадлежащие одной и той же плоскости».

6. Будем пользоваться теми же обозначениями, что в предыдущей задаче. Кроме того, будем прямую, проходящую через точки X и Y, обозначать так: XY. Предикаты «$x \perp y$» и «$x \perp \alpha$» означают, соответственно, что «прямые x и y взаимно перпендикулярны», «прямая x перпендикулярна плоскости α». Используя эти предикаты, запишите теорему о трех перпендикулярах.

3. Для опровержения ошибочных утверждений, для доказательства теорем способом от противного и в ряде других случаев полезно уметь формулировать отрицания высказываний, образованных из предикатов с помощью кванторных операций и логических связок.

Имея какое-либо высказывание, мы можем образовать его отрицание, написав перед ним слова «неверно, что ...». Но в такой форме отрицание обычно мало полезно. Предложение, записанное в такой форме, приходится каждый раз преобразовывать к более удобному, более обозримому виду.

Правильно сформулировать отрицание громоздкого математического высказывания довольно трудно. Но в исчислении предикатов разработаны простые приемы, которые позволяют это сделать почти автоматически.

Прежде всего заметим, как строится отрицание высказывания вида

$$\forall x P(x).$$

Запись $\overline{\forall x P(x)}$ означает: «Неверно, что для каждого x истинно $P(x)$», то есть высказывание

$$\overline{\forall x P(x)}$$

означает, что хотя бы для одного x ложно $P(x)$; иными словами, хотя бы для одного x истинно $\overline{P(x)}$. А это можно записать так:

$$\exists x \overline{P(x)}.$$

Итак, мы видим, что

$$\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}^{1}.$$

Аналогично можно убедиться, что справедливо соотношение

$$\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}.$$

Сходные формулы верны и для предикатов от нескольких переменных, например:

$$\overline{\exists x \forall y P(x,y)} = \forall x \exists y \overline{P(x,y)}.$$

Кроме того, в случае предикатов верны те же правила для построения отрицаний, как и в исчислении высказываний, например:

$$\overline{P(x) \wedge Q(x)} = \overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)},$$

$$\overline{P(x) \vee Q(x)} = \overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}^{2},$$

[1] Иначе говоря, эти два высказывания равносильны.

[2] То есть для каждого x левая и правая части представляют собой равносильные высказывания.

$$\overline{P(x) \to Q(x)} = P(x) \wedge \overline{Q(x)}.$$

Пользуясь этими замечаниями, можно построить отрицания для различных высказываний.

Пример. Построим отрицание высказывания A: *«Каждый четырехугольник с равными и взаимно перпендикулярными диагоналями есть квадрат».*

Введем обозначения: x — произвольный четырехугольник; $D(x)$ — предикат «Диагонали четырехугольника x взаимно перпендикулярны и равны»; $Q(x)$ — предикат «x является квадратом».

A запишется так:

$$A = \forall x\,[D(x) \to Q(x)].$$

Тогда

$$\overline{A} = \exists x\,[\,\overline{D(x) \to Q(x)}\,] = \exists x\,[D(x) \wedge \overline{Q(x)}\,].$$

Высказывание $\overline{A}$ можно прочесть так: «Существует четырехугольник, у которого диагонали равны и взаимно перпендикулярны и который не является квадратом». Заметим, что высказывание $\overline{A}$ верно (четырехугольник, о котором говорится в $\overline{A}$, нетрудно построить); поэтому высказывание A ошибочно.

7. Кто-то нарисовал на листе клетчатой бумаги 100 концентрических окружностей. Каждый круг, чьей границей служит такая окружность, обозначим буквой δ. Кроме того, рассматриваем на листе всевозможные узлы (точки пересечения линий, образующих сеть клеток); такие точки обозначим через x. Введем предикат: «$\delta \ni x$» (Круг δ содержит узел x»). Используя его, а также кванторы и логические связки, запишите следующие предложения:

А: «Каждый круг содержит хотя бы один узел».

В: «Существует круг, который содержит хотя бы один узел».

С: «Ни один круг не содержит ни одного узла».

Сформулируйте отрицания этих высказываний.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЯ В МАТЕМАТИКЕ

1. В каждой математической дисциплине мы встречаемся с большим числом разнообразных понятий. Так, например, в элементарной геометрии мы пользуемся понятиями: «параллелограмм», «прямоугольник», «трапеция», «окружность», «куб», «шар» и многими другими. Не обязательно, чтобы понятие обозначалось одним словом — оно может обозначаться и двумя или более словами. Таковы, например, понятия «параллельные прямые», «правильный многогранник», «правильная пирамида», «двугранный угол», «подобные

и подобнорасположенные многоугольники», «взаимно однозначное преобразование» и т. п.

Каждое понятие вполне характеризуется своим *объемом*, то есть множеством *всех объектов*, которые относятся к этому понятию. Например, в объем понятия «трапеция» входят все без исключения трапеции, которые когда-либо где-либо имелись или будут иметься.

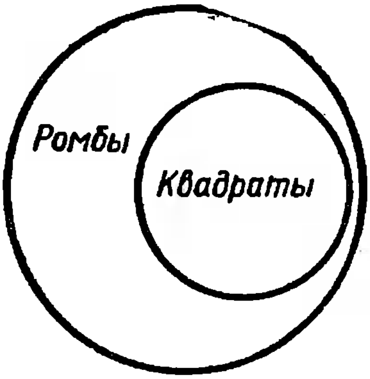


Рис. 115.

Каждое понятие вполне характеризуется также своим *содержанием*, то есть множеством *всех свойств*, которым должно обладать это понятие. Например, в *содержание* понятия «трапеция» входят такие свойства: «Трапеция является четырехугольником»; «Те две стороны трапеции, которые параллельны, не равны между собой»; «Площадь трапеции равна произведению полусуммы двух ее параллельных сторон (оснований) на расстояние между ними (высоту)» и др.

Бывает так, что среди бесконечного множества свойств какого-нибудь понятия удается выделить одно или несколько таких, из которых уже вытекают все без исключения остальные свойства этого понятия. Такое свойство (или набор свойств) называется **характеристическим свойством** этого понятия.

Вот, например, характеристическое свойство понятия «ромб»: «Ромб является четырехугольником, у которого диагонали взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам». А вот другое его характеристическое свойство: «Ромб есть параллелограмм, у которого все стороны равны».

Определение — это предложение, которое вводит новое понятие.

Каждое определение выражает какое-либо характеристическое свойство вводимого понятия. Для примера вспомните определение ромба: ромбом *называется* параллелограмм, у которого все стороны равны.

Объем одного понятия может содержаться в объеме другого понятия. Так, например, множество всех квадратов — это часть множества всех ромбов. Наглядно можно представить картину так. Условно изобразим множество всех ромбов в виде некоторого круга (рис. 115) и множество всех квадратов — тоже в виде круга; тогда второй круг должен оказаться внутри первого.

Если объем одного понятия входит в объем другого понятия, то первое называется **видом** (или видовым понятием) второго, а второе — **родом** (родовым понятием) для первого. Так, например, квадрат — это *вид* ромба; ромб — это *род* для квадрата (квадраты принадлежат *роду* ромбов).

Определение строится чаще всего путем указания *рода* и *видово-*

го отличия (то есть свойства, которое отличает выбранный нами вид от других видов, входящих в тот же род). Короче:

определяемое понятие—род + видовое отличие.

Например, определяя понятие «квадрат», мы указываем род («ромб») и видовое отличие («все его углы — прямые»).

Вот другое определение квадрата: «Квадратом называется равносторонний прямоугольник». Род — прямоугольник, видовое отличие — равносторонний.

2. Имеется несколько требований, которым обязано удовлетворять каждое определение.

I. *Нельзя определять новое понятие через неизвестные ранее понятия*. Еще хуже, если определение одного понятия дано через другое, а определение другого — через первое.

Например, если некто определил «угловой градус» как $\frac{1}{90}$ часть прямого угла и затем на вопрос: «Что такое прямой угол?» — ответил: «Прямой угол — это такой угол, который содержит 90 угловых градусов», то он допустил логическую ошибку.

II. *Определяемое понятие должно существовать*. Например, определение «обтюзионом называется плоский четырехугольник с четырьмя тупыми углами» бессмысленно, но, разумеется, не потому, что мы использовали странный термин «обтюзион», а потому, что такой плоский четырехугольник вовсе не существует.

Имеется еще несколько пожеланий, которым рекомендуется следовать при построении определений.

1) *Определяйте понятие через ближайший род*. Выбрать родовое понятие для определяемого понятия можно обычно не одним способом. Например, родовым понятием для квадрата являются «прямоугольник», «параллелограмм», «четырехугольник», «многоугольник», «плоская фигура» и т. д. Так вот, из двух определений заслуживает предпочтения то, в котором родовое понятие имеет «меньший объем». При таком условии определение получается более обозримым, более компактным, более простым. Если же взять родовое понятие очень широким, то можно легко допустить ошибку.

Например, если начать определение так: «Квадрат — это фигура...» (и т. д.), то, по всей вероятности, определение будет плохим: слишком много надо потребовать от фигуры, чтобы она оказалась квадратом, и очень легко при этом что-либо упустить. Значительно меньше шансов на ошибку, если начать так: «Квадрат — это прямоугольник...» (и т. д.).

2) *Стройте определения экономно*. Не следует включать в определение такие свойства определяемого понятия, которые вытекают из других указанных в этом же определении свойств. Например, определение: «ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны и диагонали взаимно перпендикулярны» — явно неэкономно: ведь из свойства «стороны параллелограмма равны» уже *вытекает*, что его «диагонали взаимно перпендикулярны». Вот пример

более экономного определения: ромб — это параллелограмм, имеющий 2 равные смежные стороны.

Заметим, что иногда в преподавании допустимы неэкономные определения, если они наглядны и сразу дают яркое представление об определяемом понятии (вспомните, например, определение *подобных треугольников*).

3) *Предпочитайте неотрицательные определения.* Разумеется, это весьма расплывчатое требование. Смысл его в том, чтобы, по возможности, указать на такие свойства, которые у определяемого понятия есть, а не на такие, которых у него нет. Например, принадлежащее Платону определение: «Человек — это двуногое животное без перьев» — с этой точки зрения неудовлетворительно.

В математике указанное пожелание довольно часто не выполняется. Вспомните, например, определение *трапеции* или *простого числа*: целое число называется простым, если оно не делится ни на какое другое целое число, кроме самого себя и единицы.

Очень часто можно требование об *отсутствии* какого-либо свойства выразить другими словами как требование о *наличии* какого-нибудь другого свойства. Например: «Целое число называется простым, если оно делится только на себя и на единицу».

3. *Равносильные определения.* Сравните два предложения: «Квадрат — это равносторонний прямоугольник»; «Квадрат — это равноугольный ромб».

Любое из этих предложений можно рассматривать как определение квадрата: ведь в каждом из них указан род и видовое отличие.

Эти два определения выделяют *один и тот* же класс фигур: нетрудно доказать, что каждая фигура, которая подходит под первое определение (равносторонний прямоугольник), подходит и под второе (является также равноугольным ромбом), и *наоборот*. Эти два определения квадрата *равносильны*. Аналогично и в общем случае: *два определения одного и того же понятия называются равносильными* (*или эквивалентными*), *если каждый объект, который подходит под первое определение, обладает также всеми свойствами, о которых говорится во втором определении, и наоборот.*

4. *Правильные и неправильные определения.* Определение должно быть отвергнуто как неправильное, если в нем пропущено указание на род или видовое отличие, или если не соблюдены те два обязательных требования, о которых было сказано выше. В таких случаях можно говорить, что определение содержит *логическую* ошибку. Например, определение «окружность, это когда все точки равноудалены от центра» неправильно уже потому, что пропущено указание на родовое понятие; определение «окружность — плоская фигура, все точки которой равноудалены от ее центра» также неправильно, ибо в нем понятие «окружность» определяется через понятие «центр окружности», которое само не определяется независимо от понятия «окружность».

Может случиться, что определение не обладает указанными выше недостатками, но тем не менее не может считаться правильным. Так обстоит дело, если для определяемого понятия уже существует общепринятое определение, а предложенное нами определение не равносильно ему; определение некоторого понятия нельзя считать правильным, если из него логически не вытекают все те свойства, которыми это понятие должно обладать. В подобных случаях можно сказать, что определение содержит фактическую ошибку.

Например, если дано определение:« Ромб—это четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями», то в нем не будет логической ошибки, но будет *фактическая* ошибка: из этого определения не следует, например, что ромб является параллелограммом.

Выясните, правильны ли следующие определения:

а) Луч — это прямая, ограниченная с одной стороны.

б) Окружность — это фигура, все точки которой находятся на заданном расстоянии от заданной точки.

5. *Приемы, сходные с определением.* Существуют несколько приемов разъяснения понятий, которые иногда смешивают с определениями. При всей их полезности, они не могут заменить определение. Перечислим наиболее важные из них.

1) Объяснение слова. Если говорите, что «геометрия — это землемерие», то вы только разъясняете смысл слова, только даете дословный перевод этого слова с греческого. На самом деле геометрия не есть землемерие (и, наверное, никогда не была только землемерием).

Если объясняете, что по-гречески «трапеция» — это столик, то вы тоже только разъясняете *слово* «трапеция»; чтобы раскрыть *понятие* «трапеция», следует дать *определение*.

2) Указание («вот»). Например: «Что такое куб?». «Вот это куб и это куб, а это не куб» .

3) Сравнение и противопоставление. Приведем несколько примеров: «Математика — это гимнастика ума, это поэзия мысли». «Логика — это грамматика мышления». «Физика — это драма, драма идей» (Эйнштейн). «Диалектика — это алгебра революции» (Герцен). «Эллипс — это сплюснутый круг».

4) Характеристика. Отмечаются лишь некоторые наиболее важные свойства объекта, но не дается полный набор существенных признаков этого объекта, так чтобы из них вытекали уже все остальные признаки. Например, «Математика — это одна из основ современной техники».

5) Описание. Разъясняется смысл понятия с помощью других — может быть, недостаточно ясных или не определенных ранее понятий. Например, «Линия — это след движущейся точки», «Тело — это часть пространства, ограниченная со всех сторон».

**6. *Приведем еще несколько упражнений для учащихся десятого класса.*

2. В чем недостатки следующих определений?

а) Пирамидой называется многогранник, в основании которого лежит многоугольник, а все боковые грани имеют общую вершину.

б) Усеченной пирамидой называется многогранник, боковые грани которого представляют собой трапеции, а верхнее и нижнее основания — подобные многоугольники с параллельными сторонами.

в) Призмой называется многогранник, у которого основания представляют собой равные многоугольники с параллельными сторонами, а боковые грани — параллелограммы.

3. Являются ли следующие определения правильными (в том смысле, что они равносильны определениям, принятым в школьном курсе геометрии)? Для доказательства неправильности определения достаточно привести пример многогранника, который подходит под это определение, но не удовлетворяет «школьному» определению.

а) Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — произвольный многоугольник, а остальные грани являются треугольниками.

б) Призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами.

в) Усеченной пирамидой называется многогранник, у которого две грани — одноименные многоугольники с параллельными соответственными сторонами, а остальные грани — трапеции.

г) Усеченная пирамида — многогранник, у которого две грани — подобные многоугольники (можно добавить: лежащие в параллельных плоскостях), а остальные грани — трапеции.

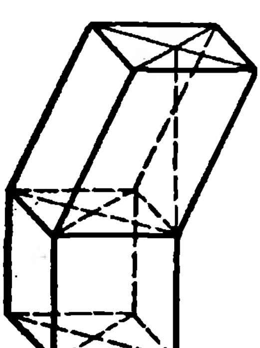


Рис. 116.

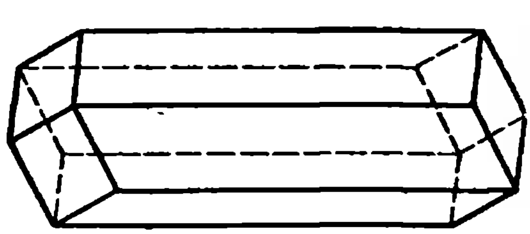


Рис. 117.

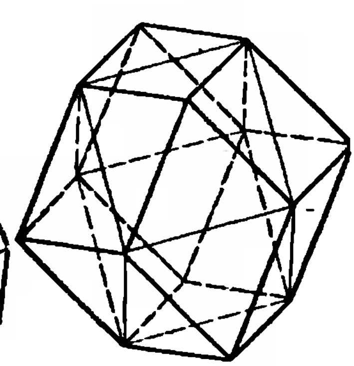


Рис. 118.

д) Усеченная пирамида — многогранник, у которого две грани — подобные многоугольники с параллельными соответственными сторонами, а остальные грани — трапеции.

4. Определение призмы, данное в школьном учебнике А. П. Киселева («Геометрия», ч. II, § 68, 1969), неверно (в том смысле, что из него нельзя строго научно вывести все те свойства призм, о которых говорится в той же книге). При построении всей теории призм в этой книге неявно используются такие признаки понятия призмы, которые не содержатся в определении явно и не вытекают из него. Чтобы доказать это, достаточно привести пример такого многогранника, который подходит под определение призмы, данное в учебнике Киселева, но не обладает каким-либо свойством призмы, сформулированным в той же книге. Такие примеры изображены на рисунках 116, 117 и 118. Многогранник на рисунке 118 называется *ромбическим двенадцатигранником*. Грани его — 12 равных ромбов. Многогранник можно получить, если на каждой грани куба как на основании построить правильную четырехугольную пирамиду с высотой, равной половине ребра куба (рис. 118).

Многогранник на рисунке 116 состоит из двух параллелепипедов, имеющих равные основания.

Пользуясь моделями этих многогранников, объясните, почему определение призмы, принятое в учебнике А. П. Киселева, неполно. Приведем примеры правильных определений призмы и усеченной пирамиды.

Призмой (соответственно—усеченной пирамидой) называется многогранник, у которого две грани—равные (соответственно—подобные) многоугольники с параллельными соответственными сторонами, а остальные грани — параллелограммы (трапеции), каждый (каждая) из которых имеет с каждой из ранее названных параллельных граней по общей стороне. Другое (правильное) определение призмы см. в «Элементарной геометрии» Н. А. Глаголева, ч. II.

(!) § 4. АНАЛОГИЯ И ИНДУКЦИЯ В МАТЕМАТИКЕ

Иногда ученики заявляют, что теорию они знают, все выучили, а вот решать задачи не умеют, не знают, где и когда нужно воспользоваться тем или другим фактом, теоремой, определением, и совсем не представляют себе, с помощью каких соображений удалось открыть ту или иную теорему.

Оказывается, существуют определенные *приемы*, которые в ряде случаев облегчают *поиск* способа решения задачи или способа доказательства теоремы.

Наиболее ценные из них — это аналогия и индукция.

1. Аналогия в определениях понятий. «Аналогия» — греческое слово, в переводе оно означает «сходство».

В математике при построении различных теорий нередко вводятся понятия по аналогии с ранее имевшимися.

Так вводилось, например, для различных фигур понятие д и а м е т р а. Из школьного курса планиметрии известно понятие диаметра круга (и окружности), которое определяется как хорда, проходящая через центр. По аналогии с этим вводится в стереометрии понятие диаметра шара (и сферы). А в аналитической геометрии аналогичным образом вводятся понятия диаметра эллипса и гиперболы. Можно идти дальше и ввести сходным образом понятие диаметра для любой плоской или пространственной фигуры, имеющей центр симметрии. Можно исходить и из другого определения диаметра круга: диаметр круга — это наибольшая хорда круга, то есть наибольший из отрезков, соединяющих какие-либо две точки круга. В математике по аналогии с этим вводится и часто находит применение понятие диаметра произвольной ограниченной фигуры как наибольшего отрезка, соединяющего какие-либо две точки данной фигуры[1].

Приведем еще несколько примеров из школьного курса геометрии.

По аналогии с понятием угла между двумя лучами вводится понятие угла между двумя полуплоскостями.

По аналогии с определением параллельности двух прямых строится определение понятий параллельности плоскостей или параллельности прямой и плоскости.

По аналогии с длиной отрезка вводится понятие площади плоской фигуры и объема тела.

Аналогия часто является отправным пунктом при построении новых научных теорий. Так, например, основные понятия многомерной геометрии были введены по аналогии с понятиями геометрии на плоскости и в трехмерном пространстве.

Приведем несколько простых примеров.

П р и м е р 1. При изучении в стереометрии вопроса о перпендикуляре и наклонных можно самостоятельно определить понятие наклонной к плоскости по аналогии с понятием наклонной к прямой.

П р и м е р 2. Зная определение касательной к окружности, можно по аналогии сформулировать определение касательной плоскости к шару.

1. По аналогии с понятием медианы треугольника введите понятие медианы произвольного многоугольника с нечетным числом сторон.

[1] При этом, естественно, предполагаем, что такой наибольший отрезок действительно существует. Однако это определение можно видоизменить так, чтобы оно было применимо и к более общему случаю.

2. По аналогии с понятием средней линии трапеции введите понятие средней линии четырехугольника.

2. Аналогия в свойствах фигур. Весьма часто оказывается, что аналогичные фигуры обладают какими-то аналогичными свойствами.

Обратим внимание с самого начала, что это далеко не всегда так. *Подмеченная аналогия не может служить доказательством!* Предложения, сформулированные по аналогии с истинными предложениями, могут оказаться ложными. Например, по аналогии с истинными предложениями: «Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3»; «Если сумма цифр делится на 9, то и число делится на 9» — можно сформулировать предложение: «Если сумма цифр числа делится на 27, то и само число делится на 27». Но это предложение явно ошибочно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрите число 2799 — сумма его цифр делится на 27, а само число на 27 не делится.

Однако существенно то, что по аналогии *часто* на самом деле получаем истинные предложения либо предложения, которые облегчают поиск истинных предложений.

Поэтому важно прежде всего *научиться формулировать математические предложения по аналогии*, не задерживаясь *на первых порах* на том, являются ли эти суждения истинными или ложными. Этого можно достигнуть только путем систематических упражнений.

Каждый раз нужно четко себе представлять, какие фигуры и какие свойства мы считаем аналогичными.

** При рассмотрении аналогии между плоскостью и пространством чаще всего пространственные фигуры сопоставляются плоским следующим образом:

На плоскости	В пространстве	
	чаще	реже
точка	точка	прямая
прямая	плоскость	цилиндрическая поверхность
окружность	сфера	цилиндр
круг	шар	—
параллельные прямые	параллельные плоскости	—
треугольник	тетраэдр	—
многоугольник	многогранник	—
сторона многоугольника	грань многогранника	ребро многогранника

3. Приведите несколько предложений, в которых проявляется аналогия между треугольником и трехгранным углом.

4. Справедливо предложение: «Сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри правильного треугольника (или на его контуре), до его сторон есть величина постоянная».

Сформулируйте аналогичное предложение: а) для многоугольника, *б) для тетраэдра, *в) для многогранника.

*5. Рассматривая тетраэдр как фигуру, аналогичную треугольнику, сформулируйте какую-либо теорему, аналогичную теореме Пифагора.

6. В равносторонний треугольник можно вписать окружность. Сформулируйте аналогичное предложение для многоугольника.

7. Верно предложение: «Существует правильный многоугольник с любым наперед заданным числом сторон $n \geqslant 3$».

Сформулируйте аналогичное предложение для правильного многогранника. Верно ли оно?

8. «Каждый равносторонний треугольник является также равноугольным». Сформулируйте аналогичное предложение для шестиугольника.

3. Аналогия при доказательстве теорем и при поиске способа решения задач. В одной из смоленских школ учащимся IX класса предложили следующую задачу:

З а д а ч а 1. *Зная стороны треугольника a, b, c, вычислите радиус r_1 вневписанной окружности, касающейся стороны a и продолжений сторон b и c.*

В течение 15 минут ни один из школьников не мог найти спосо-

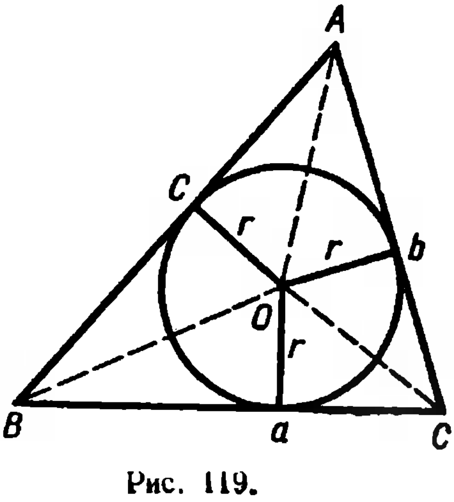


Рис. 119.

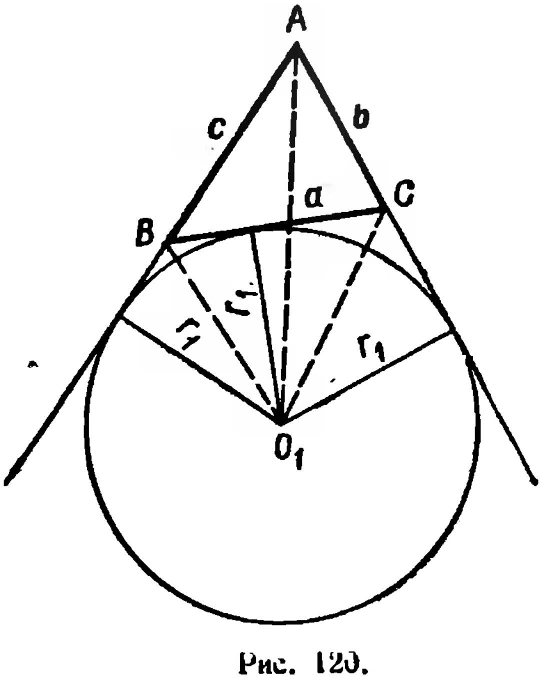


Рис. 120.

ба решения этой задачи. Тогда предложили им сформулировать более простую или известную им аналогичную задачу.

Учащиеся привели задачу:

Задача 2. *Зная стороны треугольника a, b, c, вычислить радиус r вписанной окружности.*

Затем они решили эту задачу (см. ниже). Решение было разбито на отдельные простейшие «шаги».

После этого учащиеся легко обнаружили, что можно получить решение исходной задачи (№ 1) *по аналогии* с решением вспомогательной задачи (№ 2). Для этого им было достаточно провести эту аналогию на каждом шаге решения. Окончательная запись выглядела так:

Вспомогательная задача (рис. 119).	Исходная задача (рис. 120).
1) Соединим центр O вписанной окружности с вершинами треугольника ABC.	1) Соединим центр O_1 вневписанной окружности с вершинами треугольника ABC.
2) $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta AOC} + S_{\Delta BOC}$.	2) $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AO_1B} + S_{\Delta AO_1C} - S_{\Delta BO_1C}$.
3) Обозначим площадь треугольника ABC через S, тогда по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$.	3) То же.
4) $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}c \cdot r$, $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} b \cdot r$, $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} a \cdot r$.	4) $S_{\Delta AO_1B} = \frac{1}{2}c \cdot r_1$, $S_{\Delta AO_1C} = \frac{1}{2} b \cdot r_1$, $S_{\Delta BO_1C} = \frac{1}{2} a \cdot r_1$.
5) Из 2) и 4) следует: $S = \frac{1}{2}(c+b+a) \cdot r = p \cdot r$, откуда $r = \frac{S}{p}$, или $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.	5) Из 2) и 4) следует: $S = \frac{1}{2}(c+b-a) \cdot r_1 = (p-a) \cdot r_1$, откуда $r_1 = \frac{S}{p-a}$, или $r_1 = \sqrt{\frac{p(p-c)(p-b)}{p-a}}$.
Задача решена.	Задача решена.

На этом примере мы проследили за одним весьма полезным приемом поиска решения задач. Он сводится, как мы видели, к следующему:

I. Подбираем задачу, аналогичную исходной, то есть такую, что у нее и у исходной задачи сходные условия и сходные заключения. Вспомогательная задача должна быть проще или ее решение должно быть нам известно.

II. Решив вспомогательную задачу, проводим аналогичные рассуждения для решения исходной задачи.

Вот несложная задача, которая обычно затрудняет учащихся, но, привлекая аналогию, легко получить ее решение.

9. Постройте точку (P), делящую внешним образом данный отрезок AB в данном отношении $m : n$ (m и n—данные отрезки). Таким образом, точка P должна лежать на продолжении отрезка AB, причем $\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$.

Далеко не всегда удается построить полное решение исходной задачи по аналогии с решением вспомогательной задачи; однако, рассуждая по аналогии с решением вспомогательной задачи, можно упростить решение исходной, свести ее к более простой и т. д.

Разумеется, что не только при решении задач, но и при доказательстве теорем из школьного учебника геометрии полезно привлечь аналогию.

Так, например, теорему о биссектрисе *внешнего* угла треугольника легко доказать самостоятельно, прослеживая «по шагам» доказательство теоремы о биссектрисе *внутреннего* угла треугольника. После доказательства теоремы об измерении угла с вершиной *внутри* круга полезно самостоятельно доказать по аналогии теорему об измерении угла с вершиной *вне* круга.

Привлекая аналогию, докажите следующие теоремы:

10. В трехгранном угле сумма двух плоских углов больше третьего.

11. В трехгранном угле разность двух плоских углов меньше третьего.

**12. Сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри равногранного тетраэдра[1] до плоскостей его граней, есть величина постоянная.

**13. Боковые ребра некоторого тетраэдра (то есть треугольной пирамиды) взаимно перпендикулярны и равны a, b, c. Найдите высоту тетраэдра.

**14. Выразите радиус шара, вписанного в тетраэдр, через высоты тетраэдра.

***4.** *Применение аналогии при разыскании фигуры по характеристическому свойству ее точек.* Одним из весьма важных типов задач в школьном курсе геометрии являются задачи на разыскание

[1] То есть такой треугольной пирамиды, у которой все 4 грани — равные треугольники.

«геометрических мест точек», то есть нахождение фигуры, являющейся совокупностью всех точек (плоскости или пространства), обладающих заранее указанным свойством.

При решении таких задач возникают обычно трудности.

Во-первых, необходимо *догадаться*, какая же фигура является искомым ГМТ.

Во-вторых, следует затем *доказать*, что все точки этой фигуры и только они обладают указанным свойством.

В ряде случаев на каждом из этих этапов удается с успехом применить аналогию. Особенно часто удается привлечь аналогию при разыскании ГМТ в пространстве. При решении такой задачи мы сами формулируем себе аналогичную задачу на поиск ГМТ на *плоскости*.

Решение этой вспомогательной задачи и использование аналогии позволяет часто решить исходную задачу. Проиллюстрируем это на одном примере.

Пусть требуется найти в пространстве ГМТ, для которых разность квадратов расстояний от концов данного отрезка AB есть величина постоянная (c^2).

Поиск решения. Сначала формулируем аналогичную вспомогательную задачу на *плоскости*: Найти *на плоскости* ГМТ, для которого разность квадратов расстояний от концов данного отрезка AB есть величина постоянная (c^2).

Допустим, что нам уже удалось найти решение этой вспомогательной задачи: искомым ГМТ во *вспомогательной* задаче является прямая (a), перпендикулярная к прямой AB и проходящая через такую точку M на прямой AB, что $AM^2 - MB^2 = c^2$ (см., например, Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [2], стр. 57, пример 3).

После этого легко догадаться, что в *исходной* задаче искомым ГМТ в пространстве служит плоскость (α), перпендикулярная к прямой AB и проходящая через такую точку M этой прямой, что $AM^2 - MB^2 = c^2$.

Эта *гипотеза* нуждается в доказательстве. Для этого доказательства можно опять-таки воспользоваться вспомогательной задачей, сформулированной выше. Пусть P — какая-либо точка пространства, не лежащая на прямой AB. Рассмотрим еще плоскость β, проходящую через A, B и P. Согласно решению вспомогательной задачи, точка P плоскости β тогда, и только тогда удовлетворяет условию $AP^2 - BP^2 = c^2$, когда прямая $PM \perp AB$, то есть когда PM, а вместе с ней и точка P, принадлежит плоскости α. Отсюда уже легко заключить, что плоскость α является искомым ГМТ.

Привлекая аналогию, найдите в пространстве следующие ГМТ.

*15. ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей.

*16. ГМТ, которые вдвое дальше от точки A, чем от точки B.

Индукция

Рассмотрим другой важный прием, облегчающий поиск способов решения задач, — *индукцию.*

В чем сущность этого приема?

При поиске решения какой-либо задачи или доказательства какой-либо теоремы оказывается чрезвычайно полезным предварительное рассмотрение частных или предельных случаев.

Само слово «индукция» в переводе с латинского означает «наведение»; им обозначается прием перехода от частного к общему. Его обычно противопоставляют дедукции (выведению), то есть переходу от общего к частному. Соображения индуктивного характера находят самые широкие применения в математических исследованиях. Это одно из основных орудий каждого научного работника, это один из основных инструментов его творческой лаборатории.

Индукция при поиске математических закономерностей. Рассматривая какой-либо класс геометрических фигур, иногда удается подметить, что некоторые частные виды этих фигур обладают одним и тем же общим свойством. Это может нас навести на мысль, что *все* фигуры рассматриваемого класса обладают тем же свойством. Например, рассматривая правильный треугольник, равнобедренный треугольник, прямоугольный треугольник, можно подметить, что в каждом из них любая из медиан меньше суммы двух других медиан. Это нас наталкивает на мысль, что *в любом треугольнике любая из медиан меньше суммы двух других его медиан.*

Следует, однако, иметь в виду, что в результате рассмотрения частных случаев мы можем прийти только к некоторой *гипотезе*, к некоторому *предположению.* Не исключено, что эта гипотеза окажется ложной, даже если рассмотрено очень большое число частных случаев.

Приведем пример. Обозначим через S_n наибольшее число областей, на которые можно разбить плоскость n окружностями.

Легко проверить, что $S_1 = 2$, $S_2 = 4$, $S_3 = 8$.

Возникает *предположение*, что при любом натуральном n будет $S_n = 2^n$. Однако можно показать, что это заключение ошибочно, например $S_4 = 14$, а не 16 (рис. 121).

Предположение, полученное из индуктивных соображений, нуждается еще в доказательстве. Прежде всего необходимо научиться *формулировать* математические предположения на основании наблюдений, проведенных в ряде частных случаев, а затем уже выяснять, будут ли полученные гипотезы истинными или ложными.

17. а) $1 + 3 = 4$, то есть сумма первых двух нечетных чисел равна 2^2. Для суммы трех первых нечетных чисел имеем: $1 + 3 + 5 = 9$. Какую гипотезу подсказывают эти примеры? б) проверьте эту гипотезу еще на нескольких примерах; в) докажите или опровергните вашу гипотезу; г) в пункте а) речь шла о том, что число 2^2 представимо в виде суммы двух последовательных нечетных чисел. Какое аналогичное предложение верно для числа 2^3? Для 3^3?

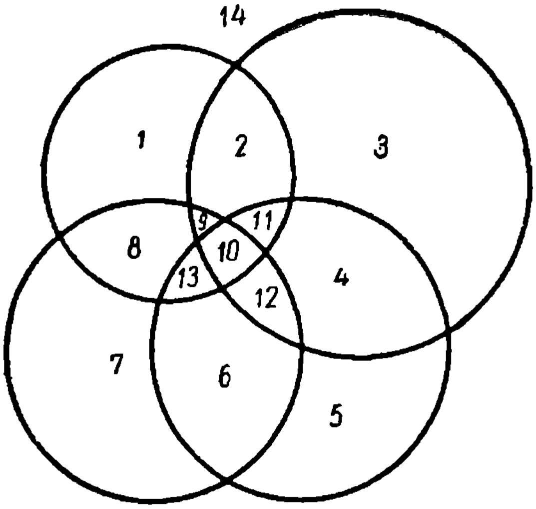


Рис. 121.

д) Какая закономерность кажется в данном случае правдоподобной? е) Проверьте ее для нескольких точных кубов; ж) Докажите ее в общем случае (для числа n^9).

Индукция при поиске способа решения задачи. Предварительное рассмотрение *частных случаев* предложенной нам задачи может навести нас на метод ее решения в *общем* случае. Встретившись с трудной задачей, начинаем поиск ее решения с вопроса: «В каком частном случае, при каких частных предположениях относительно данных умеем решить эту задачу?» После того как удалось нащупать такой частный случай, ставим перед собой уже новый вопрос: «Нельзя ли воспользоваться этим решением (или приобретенным нами опытом), чтобы решить задачу в каком-либо более общем (но, быть может, тоже еще частном) случае?»

Такие рассуждения повторяем достаточное число раз, пока не доберемся до решения исходной задачи.

Рассмотрим пример:

«Доказать, что сумма расстояний от любой точки M, лежащей внутри или на контуре правильного треугольника ABC, до его сторон есть величина постоянная, не зависящая от положения этой точки»[1].

Способ решения этой задачи легко найти, если последовательно рассмотреть такие случаи: а) точка M — вершина треугольника, тогда ясно, что сумма ее расстояний от сторон треугольника равна его высоте; б) точка M — на стороне треугольника (скажем, M — на BC). Этот случай сводится к предыдущему, если через M провести прямую $MN \parallel AC$ и положить $A' = MN \times AB$; тогда M — *вершина* правильного треугольника $A'BM$; в) (общий случай) M — произвольная точка из $\triangle ABC$, этот случай сводится к случаю б), если провести прямую $MN \parallel AC$, рассмотреть точки $A' = MN \times \times AB$, $C' = MN \times BC$ и $\triangle A'BC'$.

Стоит обратить внимание на то, что при решении этой задачи мы вначале (в случаях а и б) выбирали точку M на к о н т у р е треугольника. Это не случайно. При поиске способа решения задач

[1] Ранее мы уже встречались с этой задачей, которая решалась способом двойного определения площади (см. главу VI, § 2). Мы намерены рассмотреть другой способ, без привлечения понятия площади. Этот способ доступен семиклассникам.

с помощью индукции особую ценность представляют именно различные «крайние» случаи.

18. В двух ящиках имеются шары: в одном — m, в другом — n, $m > n$. Двое играющих поочередно вынимают шары из ящика. Каждый раз игроку разрешается взять любое число шаров, но только из одного ящика. Выигравшим считается тот, кто вынимает последний шар. Как должен играть первый (тот, кто начинает игру), чтобы выиграть?

Предельный случай

Как при поиске математической закономерности, так и при поиске способа доказательства теоремы или решения задачи часто оказывается очень полезным рассмотрение предельного случая. Например, некоторые из фигур, о которых говорится в исходной задаче, заменяются их предельными положениями. Разумеется, что для одной и той же задачи можно подобрать различные предельные случаи.

Рассмотрение предельного случая полезно также при выяснении правдоподобия того или иного готового результата (ответа к задаче, данной формулы), а также для построения опровержения.

Пример 1. Ученику было предложено вычислить площадь S вписанного четырехугольника $ABCD$, если известны его стороны a, b, c, d. После некоторых довольно кропотливых выкладок он получил формулу:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \tag{1}$$

где p — полупериметр. Верна ли такая формула?

Будем непрерывно деформировать четырехугольник, чтобы сторона a стягивалась в точку, при этом будет непрерывно изменяться площадь четырехугольника. В пределе, когда a стремится к нулю (A неограниченно приближается к D), четырехугольник $ABCD$ деформируется в треугольник BCD, по формуле (1) получаем для площади этого треугольника

$$S = \sqrt{p^2(p-b)(p-c)}. \tag{2}$$

С другой стороны, формула Герона для треугольника BCD дает

$$S = \sqrt{p(p-b)(p-c)(p-d)}. \tag{3}$$

Так как, очевидно, $p \neq p-d$, то ответ, полученный по формуле (2), отличен от значения площади, даваемого формулой Герона (3). Итак, формула (2) ошибочна. Это указывает на то, что и формула (1) ошибочна или во всяком случае, весьма сомнительна[1]. Сделав

[1] В действительности для площади вписанного четырехугольника имеет место формула Брамагупты:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

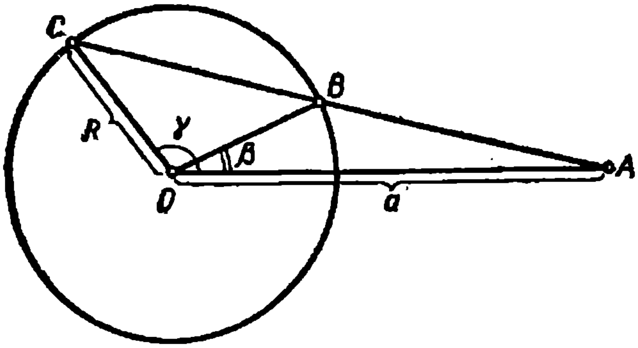


Рис. 122.

такой вывод, мы должны, естественно, заново пересмотреть свое решение и выявить в нем ошибку.

Пример 2. Дана окружность радиуса R (рис. 122). Из точки A, лежащей вне окружности и отстоящей от центра O на расстояние a, проведена секущая. Точки B и C ее пересечения с окружностью соединены с центром O. Найти $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, если $\angle COA=\gamma$, $\angle BOA=\beta$.

Поиск решения. Нам требуется найти величину $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ в зависимости от данных, то есть от R и a, причем ответ должен быть одним и тем же при *любом* выборе секущей. Правдоподобно, что этот же ответ должен получиться и в *предельном* случае, когда секущая вырождается в касательную. Поэтому сначала рассмотрим этот предельный случай. Тогда $\gamma=\beta$ (рис. 123). В этом случае

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2=\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}=\frac{1-\frac{R}{a}}{1+\frac{R}{a}}=\frac{a-R}{a+R}.$$

Итак, в предельном случае $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{a-R}{a+R}$.

Попытаемся теперь доказать, что и в общем случае имеет место то же самое соотношение.

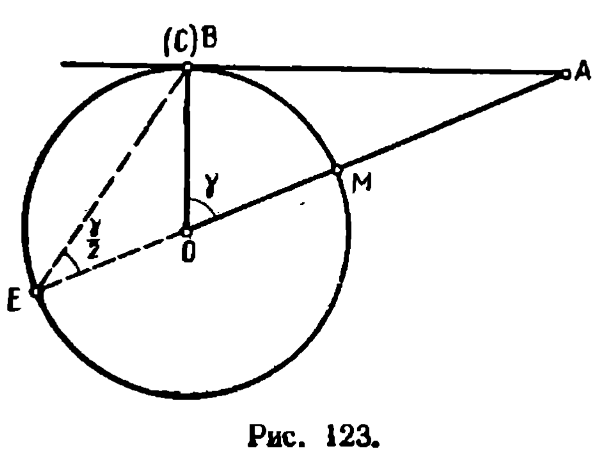


Рис. 123.

Наличие в этой формуле отрезков $(a-R)$ и $(a+R)$ подсказывает нам мысль, что эти отрезки желательно ввести в чертеж (рис. 124), то есть желательно рассмотреть отрезки AE и AM, где E и M — точки пересечения прямой AO с окружностью.

Используя эти предварительные соображения, можно уже сравнительно легко решить задачу.

Р е ш е н и е. Ясно, что $\angle CEM = \frac{\gamma}{2}$; $\angle BEM = \frac{\beta}{2} = \angle\ BCM$. А так как $\triangle ECM$ и $\triangle\ EBM$— прямоугольные, то $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{CM}{CE}$; $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{MB}{BE}$;

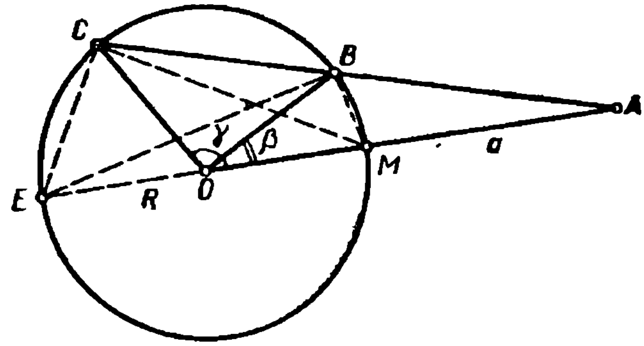


Рис. 124.

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{CM}{CE}\cdot\frac{MB}{BE}. \qquad (1)$$

Так как $\triangle\ CMA \sim \triangle\ EBA$, то

$$\frac{CM}{BE} = \frac{AC}{AE}. \qquad (2)$$

А из того, что $\triangle CAE \sim \triangle BAM$ ($\angle A$—общий и $AB\cdot AC = AM\cdot AE$ по теореме об отрезках секущей), следует, что

$$\frac{MB}{CE} = \frac{AM}{AC}. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{AM}{AE} = \frac{a-R}{a+R}.$$

З а м е ч а н и е. Другое решение (не связанное с рассмотрением предельных случаев) можно получить с помощью тождества

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \left(\cos\frac{\gamma-\beta}{2} - \cos\frac{\gamma+\beta}{2}\right) : \left(\cos\frac{\gamma-\beta}{2} + \cos\frac{\gamma+\beta}{2}\right).$$

19. В четырехугольнике $ABCD$ две стороны AD и BC не параллельны. Что больше: полусумма этих сторон или отрезок (MN), соединяющий середины двух других сторон?

20. О двух четырехугольниках $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ известно следующее: $A_1A_2A_3A_4$— выпуклый четырехугольник с неравными диагоналями; $B_1B_2B_3B_4$ вписан в $A_1A_2A_3A_4$ (т.е. вершины B_1, B_2, B_3, B_4 лежат соответственно на сторонах четырехугольника A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1). Может ли оказаться, что сумма диагоналей четырехугольника $B_1B_2B_3B_4$ (вписанного) больше суммы диагоналей четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ (описанного)?

21. Известно, что в прямоугольнике каждая медиана меньше суммы двух других медиан. Верно ли аналогичное утверждение для биссектрис треугольника? Для его высот?

1. Для доказательства формул и теорем, справедливых для всех натуральных чисел, часто применяется метод математической индукции. Впервые этот метод встречается в одном трактате французского математика, физика и философа Блэза Паскаля (1623—1662). После Паскаля им пользовались многие математики.

Некоторые сведения о методе математической (или полной, или совершенной) индукции получают школьники в X (иногда в IX) классе. Однако опыт показывает, что большинство учащихся только запоминает общую схему применения этого метода, не вдаваясь в сущность его. Это и не удивительно, так как метод математической индукции действительно довольно труден. Нельзя не согласиться со следующими словами известного советского математика А. Н. Колмогорова [1]:

«По-видимому, наибольшую трудность в отношении понимания логической структуры математического утверждения для школьников часто представляет принцип математической индукции, изучаемый в конце курса алгебры. Здесь уже самое понимание смысла высказывания для многих тонет в чрезмерном нагромождении всяких «если», «то» и т. д. Понимание и умение применять принцип математической индукции является хорошим критерием логической зрелости, которая совершенно необходима математику».

2. Предварительные задачи. Прежде чем перейти к методу математической индукции, рассмотрим несколько предварительных задач.

1. Дано, что $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Чему равно S_5? S_2? S_1?

2. Проверьте справедливость равенства:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

при $n = 2$, при $n = 1$.

3. Были заданы три числа a, b, c.

Некто утверждает, что $a+c=2b$. Докажите, что если он прав, то $\frac{1}{a\cdot b} + \frac{1}{b\cdot c} = \frac{2}{a\cdot c}$.

4. а) Проверьте справедливость формулы:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad (1)$$

при $n = 3$.

б) Как проще всего проверить справедливость формулы (1) при $n = 4$?

в) Кто-то доказал, что формула (1) верна при $n = 50$. Пользуясь этим, докажите, что формула верна при $n=51$, при $n=52$.

г) Докажите, что если при $n = k$ формула (1) верна, то она верна и при $n = k + 1$.

5. а) Проверьте, что $\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$ (1)
при $n = 66$ является целым числом.

Как теперь докажете, что выражение (1) также является целым числом при $n = 67$? $n = 68$?

б) Докажите, что если число k такое, что при $n = k$ выражение (1) является целым числом, то это выражение является целым числом также для следующего натурального числа, то есть при $n = k + 1$. в) Докажите, что выражение (1) является целым числом при любом натуральном n от 1 до 30.

3. Иногда бывает, что какая-то формула или теорема, в которой говорится о натуральном числе n, верна для большого числа номеров, и тогда напрашивается мысль, что эта формула или теорема верна для всех без исключения номеров n. Однако такое заключение может иногда оказаться и ошибочным. Вот несколько примеров.

1) Формула

$$2\left[n + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\right] = 2^n$$

верна при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, но не верна при $n = 7$.

2) Можно доказать, что формула[1]

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^m = 2^n$$

(m — какое-то натуральное число, например 1 миллиард) верна при $n = 1, 2, 3, \ldots, m$, но уже не верна при $n = m + 1$.

3) Число вида $2^{2^n} + 1$ называется «n-м числом Ферма́». При $n = 1, 2, 3, 4$ получим числа 5; 17; 257; 65537. Эти числа простые. П. Ферма́ (1601—1665) высказал теорему: «*Всякое число вида* $2^{2^n} + 1$ *является простым*». Оказалось, что эта теорема н е в е р н а: при $n = 5$ получим 4294967297; это составное число, оно делится на 641.

4. *Сущность метода.* Пусть требуется доказать какую-либо формулу (теорему).

I. Показываем, что эта формула (теорема) верна при $n = 1$ (или в более общем случае: при $n = n_0$, где n_0 — фиксированное целое число, например $n_0 = 0$; $n_0 = 8$).

II. Доказываем следующее предложение: «Если k — такое число, что при $n = k$ формула (теорема) верна, то она верна и для следующего натурального числа (то есть при $n = k + 1$).

---

[1] Ниже C_n^k (при любых натуральных n и $k \leqslant n$) означает такое выражение: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots k}$; при $n < k$ полагаем, что $C_n^k = 0$.

Отсюда из (I и II) делаем *вывод*, что формула (теорема) верна для *всех* натуральных чисел n (или, соответственно, для *всех* $n \geqslant n_0$). Утверждение, что такой вывод *можно* сделать, называется *принципом математической индукции*. Это утверждение (или равносильное ему) принимается без доказательства, является аксиомой.

6. Докажите, что для всех натуральных n справедлива формула:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

7. Докажите, что для всех натуральных n справедливо равенство:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}. \quad (1)$$

8. Докажите, что для всех натуральных n число

$\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}$ является целым.

9. Один ученик, доказывая формулу методом математической индукции, начал с того, что проверил ее при $n = 1, 2, 3, 4$. Что он сделал лишнего?

10. а) Другой ученик, доказывая одну формулу методом математической индукции, сначала проверил ее при $n = 1$, а затем рассуждал так: «Допустим, что формула верна при $n = k$. Но k — *любое* натуральное число; следовательно, можно вместо k подставить $k + 1$; тогда получим, что формула верна при $n = k + 1$. А так как при $n = 1$ формула верна, то она верна для всех натуральных чисел». В чем его ошибка?

б) Его товарищ рассуждал так: «Решая задачу методом индукции, допускаем, что формула верна при $n = k$, и доказываем, что она верна при $n = k + 1$. Но что такое k? Любое натуральное число. А если так, то что же нам еще остается доказать, если мы уже знаем, что формула верна для любого натурального номера?» В чем ошибка этого рассуждения?

11. Докажите, что любое целое число рублей, большее 7, можно уплатить без сдачи денежными билетами достоинством в 3 рубля и 5 рублей.

12. Докажите, что при натуральном $n \geqslant 5$ справедливо неравенство $2^n > n^2$.

13. Докажите, что при $n > 1$ число $2^{2^n} + 1$ оканчивается цифрой 7.

14. Докажите известные из школьного курса формулы для общего члена и для суммы n членов геометрической прогрессии.

15. На плоскости имеются n окружностей, из которых любые две пересекаются и никакие три не проходят через общую точку. Докажите, что они разбивают плоскость на $2 + n(n - 1)$ областей.

16. Пользуясь методом математической индукции, мы сейчас докажем явно нелепое утверждение: «Все мальчики одного роста». Это удастся потому, что в ходе доказательства мы сознательно допустим ошибку. Найдите то место в рассуждении, где эта ошибка допущена.

Итак, мы беремся доказать следующее: при любом натуральном n любые n мальчиков имеют одинаковый рост!

«Доказательство». При $n = 1$ теорема, очевидно, верна. Пусть она верна при $n = k$ (то есть любых k мальчиков одинакового роста). Докажем, что отсюда следует справедливость теоремы при $n = k + 1$ (то есть любых $k + 1$ мальчиков одинакового роста). Действительно, занумеруем мальчиков в каком-либо порядке числами $1, 2, 3, \ldots, k, k + 1$. По индуктивному допущению мальчики с номерами от 1 до k имеют один и тот же рост — такой же, как у «мальчика номер k».

С другой стороны, k мальчиков с номерами $2, 3, 4, \ldots, k, k + 1$ также имеют один и тот же рост (в силу того же допущения), опять-таки такой же, как у мальчика номер k. Следовательно, все $k + 1$ мальчиков имеют один рост.

Итак, теорема проверена при $n = 1$, и из ее справедливости при $n = k$ мы вывели ее справедливость при $n = k + 1$. Следовательно, теорема верна для всех натуральных n. В чем ошибка?

Глава VIII

КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Комбинаторика занимается подсчетом числа всевозможных соединений (комбинаций) того или иного вида.

Такими задачами усиленно занимались еще в XVII веке известные математики Паскаль и Лейбниц. Само слово «комбинаторный» впервые встречается в названии сочинения двадцатилетнего Лейбница «Диссертация о комбинаторном искусстве» (1666 г.).

Современная вычислительная техника значительно расширила возможности перебора большого числа комбинаций, и это повлекло за собой повышение интереса к комбинаторной математике. Методы последней находят сейчас применение в теории вероятностей, экономике, статистической физике, кристаллографии, теории кодирования, биологии и других науках.

Здесь мы предлагаем несколько занимательных задач комбинаторного характера.

1. Из 6 учеников IX класса и 8 учеников X класса надо выбрать комиссию из четырех человек. Сколькими способами можно это сделать, если в комиссию должен войти: а) лишь один девятиклассник, б) не более чем один девятиклассник, в) хотя бы один девятиклассник?

2. Сколько различных пятизначных чисел можно составить: а) из цифр 1, 2, 3, 4, 5; б) из цифр 0, 1, 2, 3, 4; в) из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5; г) какова сумма чисел в каждом из этих случаев; д) сколько в случае в) чисел, делящихся на 4? (Среди цифр, входящих в одно и то же число, не должно быть одинаковых.)

3. 28 студентов уезжают из Москвы на каникулы. Им предоставлены семь купе (№ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). Сколькими способами они могут разместиться в этих купе? Порядок расположения студентов внутри купе несуществен. В каждом купе помещаются 4 человека.

4. а) Сколько различных (натуральных) делителей у числа 5000000 (числа 1 и 5000000 тоже относятся к числу делителей)?

б) Обобщите эту задачу.

5. Имеются 3 курицы, 4 утки и 2 гуся. Сколько возможно комбинаций для выбора нескольких птиц так, чтобы среди выбранных были куры, гуси и утки? Две комбинации считаются различными лишь тогда, когда они содержат различные количества птиц хотя бы одной породы.

6. Имеется большое количество цветов трех сортов: астры, левкои и розы. Сколько различных букетов по 10 цветов в каждом можно из них составить? (Букеты считаются различными лишь тогда, когда в них различные количества цветов хотя бы одного сорта.)

7. Сколькими способами можно выдать 5 различных книг: а) двум читателям? б) трем? (Каждый читатель должен получить хотя бы одну книгу.)

8. Среди пятизначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4, сколько будет таких, которые больше 23000?

9. Сколько можно составить различных пятизначных чисел: а) из четырех цифр 2 и одной цифры 3? б) из двух двоек и трех пятерок? в) десятизначных чисел из трех двоек, четырех пятерок и трех семерок?

10. Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? Рассмотрите два случая: а) цифры, входящие в одно и то же число, различные; б) среди цифр, входящих в одно и то же число, могут быть и одинаковые.

11. Сколько можно на шахматной доске насчитать различных (по расположению) квадратов?

12. Имеется n шаров, в том числе один красный. Сколькими способами можно из них выбрать k шаров так, чтобы: а) среди них заведомо не было красного шара, б) чтобы среди них заведомо был красный шар?

13. Докажите тождество

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k.$$

§ 2. БИНОМИАЛЬНАЯ ФОРМУЛА НЬЮТОНА

В курсе алгебры VI класса уже встречаются формулы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

А как выглядит аналогичная формула для $(a+b)^4$; $(a+b)^5$ и т. д.? Оказывается, что при любом натуральном n и любых a и b верно следующее тождество (известное под названием «биномиальная формула Ньютона»):

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^nb^n,$$

или короче: $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k.$$

(здесь C_n^k — число сочетаний из n элементов по k элементов).

Заметим, что к этой формуле пришли различные математики и до Ньютона. В частности, ее знал математик Николо Тарталья (изобретатель формулы для решения любого алгебраического уравнения третьей степени, 1496—1568); знал ее и французский ученый Блэз Паскаль. Однако Ньютон (в 1676 году) сумел обобщить эту формулу и на случай, когда показатель n — произвольное рациональное число.

Биномиальная формула находит многочисленные приложения в математике. Так, например, современник Ньютона Якоб Бернулли (Швейцария, 1654—1705) успешно применил эту формулу для решения важных задач теории вероятностей.

Карл Маркс, который был большим знатоком математики, считал, что открытие биномиальной формулы «произвело революционный переворот во всей алгебре прежде всего потому, что сделало возможной общую теорию уравнений»; он отмечает также, что эта формула очень важна и для дифференциального исчисления (см.: К. Маркс. Математические рукописи. М., «Наука», 1968, стр. 193).

1. Докажите методом математической индукции, что при любом натуральном n имеет место следующая формула:

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 \cdot x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n,$$

где

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Выведите отсюда биномиальную формулу Ньютона.

2. Пусть a и b — два произвольных числа, причем $b \neq -a$.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^2b^{n-2} + $$
$$+ nab^{n-1} + b^n.$$

Подставим $n = 1$. Получим $(a+b)^1 = a + b + 0 + \ldots + 0 + + a + b$, то есть $a+b = 2(a+b)$. Так как $b \neq -a$, то $a + b \neq 0$ и поэтому можно сократить на $a + b$. Получим: $1 = 2$! В чем ошибка?

3. Зная, что $\lg 2 = 0{,}30103\ldots$, вычислите, сколько цифр имеет число:

$$1+10^4+\frac{10^4(10^4-1)}{1\cdot 2}+\frac{10^4(10^4-1)\cdot(10^4-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+$$
$$+\frac{10^4(10^4-1)}{1\cdot 2}+10^4+1.$$

4. Найдите все рациональные члены разложения

$$(\sqrt[7]{7}+\sqrt[13]{13})^{100}$$

по формуле бинома Ньютона.

5. Пусть A — сумма членов с четными номерами, B — сумма членов с нечетными номерами разложения $(1+a)^m$. Выразите A^2-B^2 через m и a.

6. Найдите действительные корни уравнения:

$$\frac{x^7+21x^5+35x^3+7x}{7x^6+35x^4+21x^2+1}=\frac{1094}{1093}.$$

7. Сколько членов в разложении $(a+b+c)^n$ (n — натуральное число)?

8. Тот же вопрос относительно $(a+b+c+d)^n$.

9. Какой цифрой оканчивается число 123^{456}? Найдите две цифры в конце этого числа.

10. Что больше: 100^{101} или 101^{100}?

11. Докажите так называемую «малую теорему Ферма»: при любом натуральном n и простом p число n^p-n делится на p.

§ 3. ПОНЯТИЕ О ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. В обыденной жизни, давая какие-либо прогнозы, мы нередко употребляем выражения «вероятно», «вероятность». Например, мы говорим: «Вероятно, он опять весь вечер просидит у телевизора», или «Вероятно, чемпионами по футболу снова станут киевляне». Мы иногда отдаем себе отчет, что в одних случаях «вероятности» может быть «много», а в других — «мало».

Например, техник радиоателье в ответ на высказанные вами опасения относительно купленной новой радиолампы типа СП-6, говорит: «Маловероятно, чтобы лампа СП-6 перегорела после трех часов работы. По всей вероятности, она будет исправно работать не менее 200 часов».

Со случайными событиями (или явлениями), то есть такими, которые могут произойти в результате какого-либо испытания, а могут и не произойти, мы встречаемся в жизни очень часто. Вот несколько примеров.

Ученик извлекает экзаменационный билет — это испытание. Появление при этом билета № 13 — это случайное событие. Появление билета № 4 — другое случайное событие при этом испытании.

Зенитная пушка производит выстрел по летающему самолету — это испытание. Попадание снаряда в самолет при этом выстреле — случайное событие. Непопадание — тоже случайное событие.

Выбор наугад какой-либо страницы в книге — это испытание. То, что первой буквой на этой странице окажется «М» — это случайное событие.

Теория вероятностей и изучает закономерности, управляющие массовыми случайными явлениями.

В XVII столетии математики заметили, что «вероятность какого-либо случая» можно и з м е р и т ь (то есть охарактеризовать вероятность прогноза *числом*), подобно тому как мы измеряем длину, площадь, объем, массу. Тогда и были решены первые, простейшие задачи на вычисление вероятностей.

В 1713 году появился посмертный трактат известного швейцарского математика Якоба Бернулли «Искусство предположения» — первое систематическое руководство по исчислению вероятностей. С тех пор теория вероятностей бурно развивалась и нашла многочисленные приложения в практике. Ею занимались такие видные математики, как П. Лаплас (Франция, 1749—1827), К. Ф. Гаусс (Германия, 1777—1855), С. Пуассон (Франция, 1781—1840), П. Л. Чебышев (Россия, 1821—1894), А. А. Марков (Россия, 1856—1922), А. М. Ляпунов (Россия, 1857—1918), Дж. В. Гиббс (США, 1839—1903), А. Я. Хинчин (СССР, 1894—1959), С. Н. Бернштейн (СССР, 1880—1968), А. Н. Колмогоров (СССР, род. 1903) и многие другие.

Теория вероятностей является основой математической статистики, практические применения которой огромны. Теория вероятностей широко используется в ядерной физике, астрономии, термодинамике, баллистике (то есть теории стрельбы), теории связи, биологии и многих других науках. На теорию вероятностей существенно опираются такие новые, недавно возникшие отделы математики, как теория игр, теория информации, теория надежности, теория массового обслуживания и многие другие.

2. Мы теперь объясним, что же понимают математики под «мерой вероятности», или, короче, под «вероятностью» события. При этом ограничимся наиболее простым (но очень важным) случаем — случаем испытаний с конечным числом исходов.

Вообразим себе, что мы проводим какое-то испытание. Например, пусть имеется ящик, в котором тщательно перемешаны шары: 100 белых, 10 синих и 1 красный; шары отличаются только цветом, в остальном они одинаковы; *испытание* состоит в том, что наугад извлекают шар и устанавливают его цвет.

Исходом каждого испытания является некоторое *событие* или *случай*. Так, в нашем примере событиями будут, в частности:

A — извлеченный шар оказался белым,

B — » » » синим,

C — » » » красным.

Может случиться, что в каком-то опыте события A, B, C, ..., L *единственно возможны*, то есть в результате данного испытания одно из этих событий обязательно наступит.

В нашем примере события A, B и C — это *единственно возможные случаи*, а события B и C не являются единственно возможными.

Иногда бывает, что несколько различных событий, которые могут осуществиться в результате данного испытания, равновозможны, то есть нет оснований полагать, что при многократном повторении этого испытания чаще наступит одно событие, чем другое. В нашем примере если бы мы занумеровали шары в ящике значками A_1, ..., A_{100}, B_1, ... B_{10}, C_1, то появление, скажем, шара A_{77} или шара B_9 — равновозможные события.

Наконец, говорят еще о несовместимых (или несовместных) событиях, то есть о таких, что осуществление одного исключает осуществление другого. Например, в нашем эксперименте появление белого шара и появление цветного шара — несовместимые события. Появление шара A_{77} и шара A_{38} — тоже несовместимые события. В том же примере появление цветного шара и появление красного шара — совместимые события.

Допустим, что в результате данного испытания может осуществиться любой из n случаев и что эти случаи единственно возможны (при этом испытании), равновозможны и несовместимы; допустим, что в m случаях из этих n случаев осуществляется событие A. Тогда число $\frac{m}{n}$ называют вероятностью события A при этом испытании. Это записывают так:

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Так, в нашем примере в результате испытания (извлечения шара) могут осуществиться всего 111 различных случаев ($100 + 10 + 1$); эти случаи единственно возможны, равновозможны и друг друга исключают (несовместимы). Из этих 111 случаев в 100 случаях появится белый шар. Значит, $p(A) = \frac{100}{111}$. Аналогично $p(B) = \frac{10}{111}$, $p(C) = \frac{1}{111}$.

Очевидно, что вероятность любого случайного события — это число, заключенное между числами 0 и 1 (или равное одному из этих чисел).

Подумайте теперь над такими вопросами и задачами.

1. а) Если событие **достоверное** (то есть в результате испытания оно должно обязательно произойти), то чему равна его вероятность?

б) Какова вероятность невозможного события (то есть такого, которое в результате данного опыта произойти не может)?

2. (Задача французского математика Даламбера, XVIII век.) Монету подбрасывают кверху несколько (n) раз. Какова вероятность того, что герб появится[1] хотя бы 1 раз? Рассмотрите случаи, когда $n = 1, 2, 3$.

3. Игральная кость — это кубик, на гранях которого отмечены очки от 1 до 6. а) Кубик подбрасывают 1 раз. Какова вероятность появления 4 очков? б) Какова вероятность того, что 4 очка появятся дважды при двух бросаниях? в) Какова вероятность получить 8 очков (в сумме), бросив 2 кости один раз? г) А бросив одну кость дважды?

4. Две игральные кости бросают трижды. Какова вероятность того, что хотя бы при одном бросании выпадет а) сумма 12, б) дублет (то есть на обеих костях одно и тоже число)?

5. (Эта задача — одна из первых по теории вероятностей — была предложена Галилею одним игроком в кости. Галилей дал правильное решение.) Три кости подбрасываются одновременно. Что более вероятно: появление на трех костях суммы 10 или суммы 9?

6. (Эта задача была предложена известному французскому математику Паскалю в 1654 году его приятелем, кавалером де Мере, заядлым игроком в кости. Паскаль решил эту задачу в более общем виде и предложил ее другому крупнейшему французскому математику того времени — Ферма. Тот также решил значительно более общую задачу. Ниже текст задачи несколько видоизменен.) Как известно, игра в лото не требует от игрока никакого искусства, результат зависит целиком от случая, ничья исключена. Два игрока играют в лото на деньги. Они поставили поровну и условились, что всю ставку получит тот, кто первый выиграет определенное, заранее назначенное число (n) партий. По какой-то причине им пришлось прервать игру тогда, когда одному не хватало до нужного количества выигранных партий одной партии, а второму — двух партий. Как они должны поделить ставку?

7. Один завод выпускает радиолампы определенного типа. Каждый комплект, отпускаемый заказчику, содержит 10 одинаковых ламп. В ОТК (отделе технического контроля) принята такая система проверки качества продукции: контролер из 10 ламп комплекта проверяет только пять взятых наугад, и если

[1] То есть, на упавшей монете герб окажется сверху.

они все небракованные, то весь комплект из 10 ламп принимается; если же хотя бы одна из проверяемых ламп оказывается с браком, то комплект откладывается для дополнительной проверки. Какова вероятность того, что контролер примет комплект, в котором содержится 5 неисправных ламп?

8. В ящике m стандартных (небракованных) деталей и n бракованных ($m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$). Детали одинаковы по форме и размерам и хорошо перемешаны. Какова вероятность того, что взятые из ящика наугад две детали окажутся обе стандартными.

9. В ящике 20 шаров совершенно одинаковых по форме и размерам: 4 красных, 5 белых и 11 синих. Извлекается шар, устанавливается его цвет, и шар возвращают обратно в ящик. Эта операция повторяется дважды. Какова вероятность того, что: а) дважды будет извлечен красный шар; б) только один раз будет извлечен красный шар; в) первым будет извлечен красный шар; г) хотя бы 1 раз будет извлечен красный шар; д) красный шар не будет извлечен вовсе; е) красный шар будет извлечен не более одного раза?

10. Ответьте на вопросы, поставленные в задаче 9, если шар после извлечения и установления его цвета в ящик не возвращается.

11. (Задача-шутка.) Каждый из трех граждан говорит правду лишь в одном случае из трех. Их спросили о чем-то, они ответили. Насколько вероятно, что все три солгали? Поставьте вопросы, аналогичные вопросам в задаче № 9, и ответьте на них.

12. В партии, содержащей 200 деталей, 8 бракованных. Внешне бракованные и стандартные детали не отличаются. Контролер ОТК наугад выбирает из партии 3 детали. Какова вероятность того, что среди них окажется только одна бракованная деталь?

3. Мы уже раньше отмечали, что события можно складывать и умножать; более того, они образуют *булеву алгебру*. Прежде чем читать дальше, вспомните, что означает $A + B + C$, $\bar{A}$, $A \cdot B$, если A, B, C — какие-то события (гл. VII, § 1).

13. В ящике имеются красные, зеленые и белые шары, которые ничем, кроме цвета, не отличаются. Испытание состоит в том, что наугад извлекают шар и устанавливают его цвет. Вероятность появления красного шара равна $\frac{1}{2}$, вероятность появления зеленого шара равна $\frac{1}{3}$. Какова вероятность появления цветного шара?

14. Обобщая рассуждения, которые были использованы при решении предыдущей задачи, докажите следующую теорему о сложении вероятностей:

«Если в некотором испытании события A и B несовместимы, то

$$p(A+B)=p(A)+p(B)».$$

Обобщите ее на случай любого конечного числа несовместимых событий.

15. Докажите: «Если событие $\overline{A}$ противоположно событию A, то

$$p(\overline{A})=1-p(A)».$$

Условная вероятность. Начнем с рассмотрения двух ситуаций.

Ситуация № 1. Пусть в ящике имеется 9 белых шаров и 1 красный; шары отличаются только цветом. Испытание состоит в следующем: наугад извлекаем шар, устанавливаем его цвет и возвращаем в ящик. Это испытание повторяется дважды.

Событие A — это появление красного шара при первом испытании. Событие B — появление красного шара при втором испытании. Очевидно, что

$$p(B)=\frac{1}{10}$$

независимо от того, появится ли красный шар при первом испытании или не появится.

Ситуация № 2. Испытание состоит в том, что мы извлекаем шар из того же ящика, устанавливаем его цвет, но в ящик шар не возвращаем. Этот опыт тоже выполняется дважды.

Событие A — это появление красного шара при первом испытании.

Событие B — появление красного шара при втором испытании.

Если при первом испытании будет извлечен красный шар, то (так как он единственный) при втором испытании он уже появиться не может, и $p(B)=0$.

Если же при первом испытании будет извлечен белый шар, то тогда, как легко сосчитать,

$$p(B)=\frac{1}{9}.$$

Таким образом, вероятность события B существенно зависит от того, осуществится событие A или нет. Эти примеры наводят нас на следующее определение.

Событие B называется независимым от события A, если вероятность события B не зависит от того, осуществится или не осуществится событие A. В противном случае события называются *зависимыми.* Точнее говоря, выражение «событие B зависимо от события A» означает, что вероятность события B зависит от того, имело ли место событие A или нет.

Вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A имело место, называется короче «условной вероятностью события B при A» и записывается так:

$$p(B/A) \text{ или } p_A(B).$$

Так, например, в ситуации № 2

$$p(B/A) = 0, \text{ а } p(B/\overline{A}) = \frac{1}{9}.$$

Рассмотрим несколько задач.

16. В ящике 20 белых шаров и 30 черных. Среди белых 5 костяных и 15 деревянных, среди черных — 12 костяных и 18 деревянных. Вы извлекаете шар и устанавливаете его цвет и материал, из которого он сделан. Пусть событие A — «извлечение белого шара», событие B — «извлечение костяного шара». В чем заключаются события $A \cdot B$ и B/A? Подсчитайте вероятности

$$p(A), \ p(B/A), \ p(A \cdot B).$$

17. Пользуясь тем же приемом, что и в предыдущей задаче докажите следующую теорему об умножении вероятностей:

Вероятность произведения двух событий (то есть вероятность совместного наступления этих событий) *равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при допущении, что первое событие уже осуществилось*:

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B/A).$$

Заметим, что из теоремы умножения вероятностей вытекают таких два полезных следствия:

I. *Если событие B независимо от события A, то*

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B).$$

Иначе говоря, вероятность совместного наступления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

II. *Если событие B независимо от события A, то и, обратно, событие A независимо от события B.*

В самом деле, если $p(B/A) = p(B)$, то $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$. С другой стороны, $p(A \cdot B) = p(B) \cdot p(A/B)$. Поэтому $p(A/B) = p(A)$, то есть событие A независимо от события B.

Учитывая свойство II, можно короче говорить о независимости двух событий A и B. «Теорема умножения» значительно упрощает вычисление вероятностей. Рассмотрим несколько задач.

18. Два незнакомых школьника садятся в пригородный поезд, в котором 8 вагонов. Каждый школьник выбирает себе вагон наугад. Какова вероятность того, что а) оба школьника попадут в один и тот же вагон; б) в вагон № 1; в) в разные вагоны? Решите задачу, применяя теоремы сложения и умножения вероятностей.

19. В радиоприемниках, выпускаемых одним заводом, имеется радиолампа определенного типа, которая с вероятностью, равной 0,8, работает исправно не менее 200 часов. Для повышения надежности приемника иногда подключают к радиолампе параллельно еще такую же лампу. Какова вероятность того, что радиоприемник досрочно не выйдет из строя из-за неисправности указанных ламп? Какой была бы вероятность, если лампы включались бы последовательно?

20. Вероятность того, что один боец выстрелом из винтовки собьет вражеский истребитель, равна 0,001. Какова вероятность того, что батальон, в котором 1000 бойцов, дав залп по вражескому истребителю, собьет его?

21. В ящике имеется 11 стандартных деталей и 3 бракованных. Дважды извлекается деталь, причем после каждого извлечения деталь возвращается обратно в ящик. Какова вероятность, что при этом ровно 1 раз появится стандартная деталь?

22. Вы намерены подбросить монету 5 раз. Какова вероятность, что при этом 3 раза появится герб и 2 раза — оборотная сторона?

4. «Закон больших чисел». На практике нередко бывает трудно заранее сказать, какова вероятность какого-либо события. В то же время можно на основании наблюдений сказать, какова частота появления события, если один и тот же опыт повторяется много раз.

Частотой (или, точнее, относительной частотой) события называется отношение числа появлений события в серии однотипных испытаний к числу всех проведенных испытаний.

Например, если при 1000-кратном бросании монеты герб появился 450 раз, то частота появления герба в этой серии опытов равна

$$\frac{450}{1000} = 0{,}45.$$

Еще Якоб Бернулли обнаружил такое замечательное обстоятельство, которое носит название «закона больших чисел»: чем больше производится однотипных испытаний, тем ближе частота появления события к вероятности этого события. Точнее говоря, теорема Бернулли заключается в следующем: *если в серии независимых испытаний вероятность события A сохраняет в каждом испытании одну и ту же величину p и если число испытаний n растет неограниченно, то с вероятностью, сколь угодно близкой к 1, можно утверждать,* *что относительная частота $\frac{m}{n}$ события A станет сколь угодно близкой к его вероятности.* Пользуясь этой теоремой, можно написать:

$$p \approx \frac{m}{n},$$

причем это приближенное равенство тем точнее (тем вероятнее), чем больше n. Этот результат можно дать в уточненной формулировке, а именно: можно оценить вероятность, с которой можно ожидать, что частота $\frac{m}{n}$ отличается от вероятности p меньше, чем на наперед заданное число (скажем, меньше, чем на 0,001).

Уточнения закона больших чисел принадлежат известным русским математикам П. Л. Чебышеву, А. М. Ляпунову, А. А. Маркову, А. Н. Колмогорову и другим.

Закон больших чисел позволяет на основании большого числа наблюдений найти вероятность события с большой точностью.

§ 4. КАК ИЗМЕРЯЕТСЯ ИНФОРМАЦИЯ

1. В практике часто получают информацию, то есть сведения о тех или иных явлениях. Простейшими примерами информации могут служить сообщения о результате какого-нибудь матча, или о дате, на которую назначена операция, или о температуре, которая была в городе сегодня в 6 часов утра. Все книги, журналы, газеты, радиопередачи, письма, телеграммы, телефонные разговоры несут в себе информацию.

В одних случаях информация может оказаться более содержательной, в других — менее содержательной. Сообщение «Операция состоится зимой» менее содержательное, чем сообщение «Операция состоится 25 января в 10 часов утра», а сообщение «Волга впадает в Каспийское море» (для человека, уже знающего школьный курс географии) вообще не несет никакой (новой) информации.

Начиная с 20-х годов нашего столетия предпринимались энергичные попытки оценить информацию каким-либо числом, подобно тому, как мы оцениваем числом объем тела или вероятность события.

В 1947—1948 годах американскому инженеру и математику Клоду Шеннону действительно удалось это проделать: он указал такую количественную оценку для информации, которая очень полезна для ряда практически важных задач. Тем самым были заложены основы новой математической дисциплины — *теории информации*.

Расскажем теперь, каким образом определяется в этой теории мера информации.

2. Как уже отмечалось раньше, различные сообщения (говорим, разумеется, только о правдивых сообщениях) имеют различную ценность. Один из возможных способов оценки сообщений — по мере их неожиданности. Например, сообщение о том, что ваши друзья выиграли по лотерейному билету автомобиль, более неожиданное, чем сообщение о том, что они вообще ничего не выиграли.

Почему же считают одно сообщение более неожиданным, чем другое? Чаще всего — по вероятности события, о котором говорится в сообщении. Если вероятность (p) этого события очень мала, а событие все же имело место, то сообщение о нем — сенсация, «ч.п.» (чрезвычайное происшествие). Если же вероятность события близка к достоверности и событие на самом деле осуществилось, то сообщение об этом никого не удивит и даже не заинтересует. Сообщение: «Один заяц оказался храбрее молодого льва» (если оно правда) — сенсация; сообщение: «Один молодой лев оказался храбрее зайца» — не удивит никого.

Пусть в сообщении S говорится о том, что в результате какого-то испытания (или наблюдения) α осуществилось некоторое событие A. Каждое такое сообщение можно оценить некоторым числом, которое характеризует неожиданность, сенсационность этого сообщения. Это число называют *логарифмической мерой информации* или *частной информацией*, содержащейся в сообщении.

Мера информации, содержащейся в сообщении, должна обладать такими свойствами:

1. Сообщение о том, что достоверное событие имело место, не несет никакой неожиданности. Меру информации такого сообщения следует считать равной нулю.

2. Чем событие менее вероятно, тем более сенсационным является сообщение о том, что оно осуществилось. Иначе говоря, чем меньше вероятность события, тем больше должна быть мера информации сообщения о том, что это событие осуществилось.

3. Если в сообщении содержатся две независимые между собой сенсации, то мера информации в таком сообщении такая же, как в двух сообщениях, из которых одно содержит только одну из этих сенсаций, а другое — другую сенсацию.

Нетрудно подобрать такую формулу, чтобы требования 1—3 были выполнены. Для этого достаточно условиться вычислять меру информации, содержащейся в сообщении S, числом $\log\frac{1}{p}$, где p — вероятность того события A, о котором говорится в данном сообщении S (обычно берут логарифм при основании 2). При этом мы должны, разумеется, в каждом случае четко знать, о каком событии идет речь и в каком опыте или наблюдении оно имело место.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Идет жеребьевка, которая должна решить, кто из двух грос-

смейстеров — Петросян или Спасский — будут играть белыми первую партию их матча. Сообщили, что белыми будет играть Петросян. Сколько единиц информации содержит это сообщение?

2. Из разрезной русской азбуки наугад выбирают какую-нибудь букву и сообщают результат (название выбранной буквы). Сколько единиц информации будет содержать такое сообщение?

3. Представим себе теперь, что имеется большое количество (N) сообщений об исходах каких-то однотипных испытаний — например, 100000 сообщений об исходах 100000 опытов, состоящих в извлечении шара из ящика, в котором 1 красный и 7 белых шаров, и установлении цвета шара (шар после извлечения возвращается в ящик). Тогда представляет интерес уже не количество единиц информации в каждом отдельном сообщении, а то, сколько *в среднем* приходится единиц информации на одно сообщение.

Вычислим сначала эту «среднюю информацию» в нашем конкретном примере. Вероятность появления красного шара равна $\frac{1}{8}$, белого — $\frac{7}{8}$. Сообщения могут быть двух сортов.

S_1: «Извлечен красный шар» (вероятность $p_1 = \frac{1}{8}$);

S_2: «Извлечен белый шар» (вероятность $p_2 = \frac{7}{8}$).

Мера информации в каждом из этих сообщений равна

$$\log_2 \frac{1}{p_1} = \log_2 8 = 3,$$

$$\log_2 \frac{1}{p_2} = 3 - \log_2 7 = 3 - \frac{\lg 7}{\lg 2} \approx 3 - \frac{0{,}845}{0{,}301} \approx 0{,}2.$$

Если сообщение S_1 передается в n_1 случаях, а сообщение S_2 — в n_2 случаях ($n_1 + n_2 = N = 100\,000$), то в среднем количество информации на одно сообщение равно

$$\frac{n_1 \cdot \log \frac{1}{p_1} + n_2 \cdot \log \frac{1}{p_2}}{N} = \frac{n_1}{N} \log \frac{1}{p_1} + \frac{n_2}{N} \log \frac{1}{p_2}.$$

Но при больших N имеют место приближенные равенства

$$\frac{n_1}{N} \approx p_1 = \frac{1}{8}, \quad \frac{n_2}{N} \approx p_2 = \frac{7}{8}.$$

Поэтому *в среднем* в одном сообщении содержится примерно

$$\frac{1}{8} \log_2 8 + \frac{7}{8} \log_2 \frac{8}{7} \approx 0{,}55$$

единиц информации (это утверждение тем точнее, чем больше N).

Аналогично можно рассуждать и в общем случае. Пусть опыт α может иметь несколько (k) независимых исходов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ с

вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Пусть передано N сообщений об исходах этого испытания;
n_1 раз передано сообщение
S_1: «Имел место исход A_1»;
n_2 раз передано сообщение
S_2: «Имел место исход A_2» и т. д.
Наконец, n_k раз передано сообщение
S_k: «Имел место исход A_k».

«Частная информация» в каждом из этих сообщений составляет соответственно

$$\log\frac{1}{p_1},\quad \log\frac{1}{p_2},\ \ldots,\ \log\frac{1}{p_k}.$$

А в среднем на одно сообщение приходится

$$\frac{n_1\log\frac{1}{p_1}+n_2\log\frac{1}{p_2}+\ldots+n_k\log\frac{1}{p_k}}{N}=\frac{n_1}{N}\log\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{n_k}{N}\log\frac{1}{p_k}$$

единиц информации.

При больших N это число примерно равно числу

$$p_1\cdot\log\frac{1}{p_1}+p_2\cdot\log\frac{1}{p_2}+\ldots+p_k\cdot\log\frac{1}{p_k},$$

и это тем точнее, чем больше N.

Число $H(\alpha)$, определяемое формулой

$$H(\alpha)=p_1\cdot\log\frac{1}{p_1}+p_2\log\frac{1}{p_2}+\ldots+p_k\cdot\log\frac{1}{p_k}=\sum_{i=1}^{k}p_i\log\frac{1}{p_i},\quad(1)$$

называется э н т р о п и е й опыта α. Оно показывает, сколько единиц информации содержит *в среднем* одно сообщение об исходе опыта α, если таких сообщений очень много. Вместо слова «энтропия» говорят также «средняя информация» или просто «информация» об опыте. Именно эта величина, а не частная информация об исходе опыта, содержащаяся в конкретном сообщении, находит разнообразные применения.

4. Энтропия характеризует «неопределенность» опыта. Разъясним, в чем здесь дело.

Пусть один человек должен сообщить другому о результате какого-либо опыта. Например, должен подбросить монету и сообщить о результате. Этот опыт — до его выполнения — несет некоторую *неопределенность* (неизвестно, что именно появится). Аналогично обстоит дело, если какой-либо опыт (обозначим его буквой α) имеет не два равновероятных исхода (как в нашем примере), а любое число исходов $A_1, A_2, \ldots, A_k$, осуществляемых с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Он также обладает некоторой неопределенностью. Эту неопределенность желательно охарактеризовать некоторым числом, которое можно назвать **мерой неопределенности**.

Рассмотрим требования, которые естественно предъявить к мере неопределенности.

1) Если исход опыта известен (иначе говоря, вероятность этого исхода равна единице), то никакой неопределенности в опыте уже нет, она равна нулю; если вероятность одного из исходов опыта мало отличается от 1 (а тогда вероятности остальных исходов близки к нулю), то неопределенность опыта должна мало отличаться от нуля. Например, неопределенность наблюдения «Лошади едят овес» следует считать равной нулю.

2) Сопоставим два опыта.

Опыт № 1. Из партии, в которой имеется 99 исправных лампочек и одна перегоревшая, выбираем наугад одну, которую ввинчиваем в патрон (патрон исправный). Сообщается результат: загорится лампочка или нет.

Опыт № 2. Из другой партии, в которой 50 исправных лампочек и 50 перегоревших, выбирается одна и ввинчивается в патрон. Сообщается, будет ли лампочка гореть, или нет.

В первом случае «неопределенность» небольшая: лампочка почти наверняка загорится[1]; во втором опыте «неопределенности» больше.

Аналогичная картина имеет место и в опытах с тремя, четырьмя и большим числом исходов: здравый смысл подсказывает нам, что у всех опытов с одними и теми же мыслимыми исходами наиболее неопределенным будет тот, в котором мы не можем заранее отдать предпочтение какому-нибудь одному исходу перед другим (все исходы равновероятны).

3) Иногда приходится иметь дело с таким опытом α, который заключается в совместном осуществлении двух независимых[2] опытов β и γ. Так, например, опыт α: «Выбрать какой-либо день между 1 января (понедельник) и 10 марта (воскресенье) 1968 года» — можно рассматривать как «сложный» опыт, который сводится к совместному осуществлению двух опытов:

Опыт β: «Выбрать какую-нибудь *неделю* из первых 10 недель 1968 года» (в этом году между 1 января и 10 марта ровно 10 недель).

Опыт γ: «Выбрать какой-нибудь день недели (понедельник, вторник, и т. п.)».

В подобных случаях пишут иногда

$$\alpha = \beta \cdot \gamma.$$

---

[1] Точнее говоря, если бы такой опыт проделывался много раз, то лампочка будет в значительно большем числе случаев загораться, чем гаснуть.

[2] Независимость опытов означает, что исход одного из опытов не влияет на вероятность исхода другого опыта.

Естественно считать, что неопределенность всего «сложного» опыта α складывается из неопределенности опыта β и неопределенности опыта γ.

Можно показать, что всем отмеченным здесь требованиям удовлетворяет введенная выше энтропия. Поэтому и говорят, что *энтропию можно рассматривать как меру неопределенности опыта.*

Заметим, что в случае, когда все исходы $A_1, A_2, \ldots, A_k$ опыта α равновозможны $\left(p_1 = p_2 = \ldots = p_k = \frac{1}{k}\right)$, то энтропия опыта и частная информация, содержащаяся в сообщении об одном из исходов (A_i), равны между собой (оба числа равны $\log k$).

В формуле для энтропии (1) можно было бы вычислять логарифмы при *любом* фиксированном основании. Шеннон предложил брать эти логарифмы при основании 2.

5. Рассмотрим простой пример вычисления энтропии.

Пусть опыт α состоит в подбрасывании монеты и установлении того, выпал ли герб или оборотная сторона. Вероятность каждого из возможных двух исходов равна $\frac{1}{2}$. Поэтому

$$H(\alpha) = \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{2}\log_2 2 = 1.$$

Иными словами, данный опыт несет в себе неопределенность в 1 единицу. Такую же неопределенность несет, разумеется, и любой другой опыт, состоящий в выборе одной из двух равновероятных возможностей.

Единицу энтропии называют б и т (*bit* — начало и конец английского выражения *binary unit*, то есть «двоичная единица»). Можно сказать, что 1 бит — это энтропия опыта, состоящего в выборе одной из двух равновероятных возможностей.

3. а) В одном большом спортивном лагере собрались ребята 1953—1955 годов рождения. Спрашивают двух первых встречных из этих ребят, родились ли они 1 мая. Один отвечает «Да», второй — «Нет». Сколько единиц информации содержит каждый из этих ответов?

б) Опыт заключается в том, что выясняют у первого встречного школьника, родился ли он первого мая. Какова энтропия этого опыта?

4. Вы договорились с товарищем, что он выберет из русской разрезной азбуки («азбука № 1») наугад (не глядя на буквы) какую-нибудь букву, а затем так же поступит с разрезной «азбукой № 2». Результат он вам сообщит, причем в письме сначала будет написана выбранная буква из азбуки № 1, а затем — из азбуки № 2. Вы получили от него письмо, в котором написано: *ау*. Сколько битов содержит это сообщение?

5. По телеграфу должны передать 10 русских букв. Вероятность появления на первом месте любой из букв одна и та же; аналогично обстоит дело со вторым местом, с третьим и т. д. Когда передадут телеграмму, то сколько двоичных единиц информации получим?

6. Вы договорились с товарищем, что он подбросит гривенник и пятак и результат запишет:«дважды герб», «дважды оборотная сторона», «один раз герб, один раз оборотная сторона». Сколько двоичных единиц информации содержит каждая такая запись? Какова средняя информация данного опыта?

7. Подбрасывая гривенник и пятак, записываем одно из четырех выражений:
«гр» (это означает: «гривенник выпал гербом, пятак — оборотной стороной»); «рг» («гривенник выпал оборотной стороной, пятак — гербом»); «гг» («герб и герб»); «рр» («оборотная сторона в обоих случаях»). Сколько битов несет каждое из этих сообщений? Какова энтропия данного опыта?

8. Из 16 белых шахматных фигур выбираете наугад одну и сообщаете о результатах. Сколько единиц информации несут такие сообщения: «Выбранная фигура — пешка»; «Выбранная фигура — король»; «Выбранная фигура — ладья»? Какова средняя информация (энтропия) данного опыта?

6. Теория информации нашла разнообразные применения в науке и технике.

Устройства или среда, которая используется для передачи информации, называется к а н а л о м с в я з и. Например, каналами связи является телефон, телеграф, нерв, почтовое письмо, воздух (при передачи устной речи) и т. п.

По каналам связи информация передается всегда в виде каких-то *сигналов*. Например, в виде точек и тире (в телеграмме), в виде букв (в письме), в виде каких-то звуковых колебаний воздуха (в устной речи). Для передачи по каналу связи информация предварительно *кодируется* (то есть условно изображается) с помощью каких-то сигналов, которые можно передать по этому каналу. Например, для передачи какого-либо сообщения по телеграфу предварительно необходимо каждую букву сообщения закодировать в виде цепочки импульсов. Наличие импульса можно условно изобразить цифрой 1, отсутствие — цифрой 0. Тогда код каждой буквы предстает перед нами в виде последовательности из нескольких единиц и нулей, например 10001, 11111 и т. п. Обычно все буквы изображаются одним и тем же числом цифр (пятью цифрами). Но можно себе представить и такой код, где для различных букв используются различные количества цифр, например буква *а* имеет код 11, а буква *Я* — код 10001. Максимальное количество информации, которое можно передать по какому-либо каналу связи за единицу времени, называется *пропускной способностью канала связи*. Например, пропускная способность телеграфной линии —

это максимальное количество букв, которое можно передать по этой линии за единицу времени (скажем, за один час).

Возникает в этом случае такая практически важная задача: как следует выбрать коды для отдельных букв, чтобы передача одного и того же количества букв (скажем, передача каждой сотни букв) занимала минимальное время? Может быть, выгоднее кодировать не отдельные буквы, а слоги? Может быть, можно восстановить сообщение, если вовсе не передавать часть его букв? Подобные вопросы с успехом решает теория информации.

Глава IX

НЕРАВЕНСТВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 1. ЧТО БОЛЬШЕ?

Во всех предлагаемых в этом параграфе задачах требуется выяснить знак неравенства между двумя алгебраическими выражениями, которые либо наперед заданы, либо должны быть предварительно найдены из условия задачи. В некоторых из приведенных ниже задачах можно воспользоваться известным неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим двух чисел: при $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$.

Сначала докажите это неравенство, затем перейдите к приведенным ниже задачам.

1. Какое из чисел больше: $\sqrt[3]{4}$ или $\sqrt{3}$?

2. Что больше: $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ или $\sqrt{6}+\sqrt{11}$?

3. Какая из двух дробей: $\frac{a}{b}$ или $\frac{b}{a}$ — ближе к единице, если известно, что $0 < a < b$?

4. Пусть a и b — два положительных числа. Что больше: их среднее гармоническое $\frac{2ab}{a+b}$ или их среднее геометрическое $\sqrt{ab}$?

5. С поезда сошли два пассажира и отправились в один и тот же сельсовет. Первый шел половину времени со скоростью a *км/ч*, вторую половину времени со скоростью b *км/ч*; второй шел первую половину пути со скоростью b *км/ч*, вторую половину пути со скоростью a *км/ч*. Кто из них раньше пришел в сельсовет?

6. Самолет ежедневно совершает рейс из Смоленска в Москву и обратно. Туда и обратно он летит с постоянной собственной скоростью. Вчера погода была ветреная, ветер дул по направлению из Смоленска в Москву. Сегодня ветра нет. Когда самолет затратил меньше времени на перелет из Смоленска в Москву и обратно — вчера или сегодня?

7. а) У одного продавца оказались неверные весы (неравноплечные). Чтобы не прекратить торговлю, продавец взвешивает каждому покупателю половину отпускаемого количества товара на левой чаше, а на правую чашу кладет гири. При этом он пользуется весами так, как если бы они были правильными. Вторую половину товара продавец взвешивает на правой чаше (а на левую кладет гири). Кто окажется в убытке — продавец или покупатель?

б) Каким образом мог бы продавец отпустить покупателю нужное количество товара, пользуясь этими весами?

в) Положили груз на левую чашу весов; они уравновешиваются, если на правой чаше *a кг* гирь. Затем положили груз на правую чашу, а на левую (для равновесия) *b кг* гирь. Сколько весит груз, если коромысловые весы неравноплечные?

8. Ученик утверждает, что если найти цифры числа, равного разности $222^8 - 8^{22}$, то последняя цифра будет 2. Правильно ли это?

§ 2. ЧТО ТАКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Линейное программирование — одна из новых математических дисциплин, возникшая и оформившаяся в течение последних трех десятилетий. Эта дисциплина находит особенно большое применение для эффективного решения разнообразных экономических задач, для составления наиболее выгодных экономических планов.

Прежде чем определить, что такое линейное программирование, рассмотрим две простые задачи.

П р и м е р 1. Агроном пришел к выводу, что для повышения урожайности опытного участка необходимо внести в почву не менее 300 условных единиц фосфорных удобрений и 200 условных единиц калийных удобрений. Вообразите, что вам поручили купить эти удобрения. Вы пришли в магазин и там узнали, что ни фосфорных удобрений, ни калийных в чистом виде в продаже нет, но что есть в продаже 2 смеси удобрений, содержащие и фосфор и калий. Один килограмм смеси № 1 содержит 2 единицы калийных удобрений и 9 единиц фосфорных удобрений; 1 *кг* смеси № 2 содержит 7 единиц калийных удобрений и 4 единицы фосфорных удобрений. Обе смеси стоят одинаково — по 10 копеек за килограмм. Сколько надо купить каждой смеси, необходимой для внесения в почву, чтобы при этом затратить на всю покупку как можно меньше денег?

Переведем эту задачу на язык алгебры. Пусть купили x *кг* смеси № 1 и y *кг* смеси № 2. Тогда всего калийных удобрений в купленных смесях окажется $2x+7y$ условных единиц, и, в силу условия задачи, должно выполняться неравенство:

$$2x+7y \geqslant 200. \qquad (1)$$

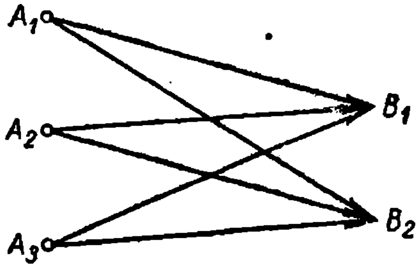


Рис. 125.

Подсчитав сходным образом, сколько окажется в покупке фосфорных удобрений, приходим к выводу, что должно выполняться еще такое условие:

$$9x+4y \geqslant 300. \qquad (2)$$

Кроме того, из условия задачи ясно, что

$$x \geqslant 0, \qquad (3)$$

$$y \geqslant 0. \qquad (4)$$

Общая стоимость S покупки составит (в гривенниках):

$$S = x+y. \qquad (5)$$

Задача состоит в том, чтобы из всех пар чисел (x, y), удовлетворяющих условиям (1) — (4), выбрать такую, чтобы сумма (5) была минимальной. Обратим внимание на то, что и функция (5), для которой ищем минимум, и функции, входящие в ограничения (1) — (4), — линейные (то есть первой степени) относительно пары переменных x и y.

Решением этой задачи мы займемся позднее, а пока обратимся еще к одной задаче, которая имеет большое практическое значение, — это так называемая «транспортная задача». Рассмотрим типичный пример такой задачи.

Пример 2. Имеется несколько (m) металлургических заводов; для простоты будем считать, что $m=2$. Эти заводы B_1 и B_2 снабжаются углем, который добывается в каких-то (n) пунктах (ограничимся случаем, когда $n=3$). Пусть эти пункты A_1, A_2, A_3 (рис. 125). Известно, что в первом из этих пунктов (A_1) добывается a_1 тонн угля в месяц, во втором — a_2 тонн угля, в третьем — a_3 тонн. Первый завод потребляет b_1 тонн угля в месяц, второй — b_2 тонн. Уголь перевозится от пункта добычи к заводам по железной дороге. Известна стоимость перевозки тонны угля от каждого пункта отправления до каждого пункта назначения: перевозка тонны угля от пункта A_1 до пункта B_1 стоит c_{11} копеек, от пункта A_1 до B_2 стоит c_{12} копеек и т. д., от пункта A_3 до пункта B_2 стоит c_{32} копеек (табл. 1).

Требуется так спланировать перевозки от пунктов A_1, A_2, A_3 к пунктам B_1, B_2, чтобы затраты на перевозку угля были наименьшими.

Выразим условия этой задачи в алгебраических формулах.

	B_1	B_2
A_1	c_{11}	c_{12}
A_2	c_{21}	c_{22}
A_3	c_{31}	c_{32}

Таблица 1

	B_1	B_2
A_1	x_{11}	x_{12}
A_2	x_{21}	x_{22}
A_3	x_{31}	x_{32}

Таблица 2

Пусть x_{11} — количество угля в тоннах, которое перевозится от пункта A_1 к пункту B_1; x_{12} — количество угля, отправляемое от пункта A_1 в пункт B_2 и т. д. (табл. 2).

Тогда, очевидно, должны выполняться следующие условия:

$$\left.\begin{array}{c} x_{11} \geqslant 0,\ x_{12} \geqslant 0,\ x_{21} \geqslant 0,\ x_{22} \geqslant 0,\ x_{31} \geqslant 0,\ x_{32} \geqslant 0. \\ x_{11} + x_{12} \leqslant a_1, \\ x_{21} + x_{22} \leqslant a_2, \\ x_{31} + x_{32} \leqslant a_3, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Общая стоимость перевозок C определяется по формуле:

$$C = c_{11}\, x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{32}x_{32}. \qquad (7)$$

Задача сводится к следующему: требуется найти такую систему чисел $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{32}$, удовлетворяющих неравенствам и уравнениям (6), для которых величина C, определяемая по формуле (7), будет минимальной (наименьшей). Выбор таких чисел $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{32}$ определит *программу* перевозок. С другой стороны, для решения этой задачи требуется рассмотреть систему *линейных* неравенств и уравнений и найти наименьшее значение *линейной* функции (7). В связи с этим и говорят, что данная задача есть задача *линейного программирования*.

Линейное программирование — это математическая дисциплина, занимающаяся способами решения таких задач, в которых требуется найти некоторые числа так, чтобы они удовлетворяли какой-то данной системе *линейных* уравнений и неравенств и чтобы, кроме этого, некоторая данная *линейная* функция от этих чисел имела наименьшее (или наибольшее) значение.

2. Чтобы научиться решать хотя бы сравнительно простые задачи линейного программирования, мы должны обратиться к некоторым сведениям, находящимся на стыке геометрии и алгебры.

Рассмотрим следующие задачи.

1. $2x + 3y - 7 = 0$ и $3x + 7y = 5$.

Это уравнения двух прямых. Как найти координаты точки, в которой эти прямые пересекаются?

2. Для функции $f(x,y)$ «линией уровня с пометкой c» называется множество всех таких точек плоскости, в которых эта функция принимает значение c. Нарисуйте на координатной плоскости для функции $2x + 3y$ линии уровня с пометками: 0, 1, 2, 12, —6. Что собой представляют эти линии уровня? Как они располагаются на плоскости? Что можно сказать о множестве (или, как говорят, о «семействе») всех линий уровня функции $2x + 3y$? Как изменяется с ростом пометки c расстояние соответствующей линии уровня от начала координат?

3. а) Где лежат все точки (x,y) координатной плоскости, для которых $x - 3 = 0$? б) для которых $x - 3 > 0$? в) для которых $x - 3 \leqslant 0$?

4. Где лежат все точки (x, y) плоскости, для которых $x + 2y = 4$? для которых $x + 2y < 4$? для которых $x + 2y \geqslant 4$? Укажите соответствующие области на чертеже.

5. Найдите на плоскости множество D всех точек, удовлетворяющих одновременно трем требованиям:

$$x \geqslant 3,\ x + 2y \geqslant 4,\ y \geqslant 0.$$

Множество D покажите на чертеже.

6. Найдите на плоскости множество D всех точек, для которых $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $2x + 7y \geqslant 200$, $9x + 4y \geqslant 300$. Множество D покажите на чертеже.

7. (Продолжение задачи № 6). а) Для функции $S = x + y$ начертите линии уровня с пометками 0; 10; 20; 30; 50; б) среди линий уровня функции $S = x + y$, имеющих хоть одну общую точку с множеством D, выберите ту, которая имеет наименьшую пометку. Как вычислить эту пометку?

8. Воспользовавшись решением задачи 7, решите задачу, приведенную выше в примере 1.

9. Размеры и оборудование колхозной птицефермы позволяют одновременно откармливать на ней до 500 уток и гусей. У колхоза имеется договор с райпотребсоюзом о том, что последний оптом закупит у колхоза любое число уток и гусей, если только они будут удовлетворять определенным требованиям откорма. Известно, что откорм одной утки обходится (в среднем) в 1 рубль, а откорм одного гуся — в 3 рубля. При этом райпотребсоюз согласен закупить откормленных птиц по следующим ценам: 3 рубля за утку, 7 рублей за гуся. Колхоз может выделить на откорм птиц 900 рублей. В каком количестве следует откарм-

ливать уток и гусей, чтобы колхоз получил максимальную прибыль?

10. Имеются два угольных бассейна A_1 и A_2. В первом из них добывается в год не более 60 млн. тонн угля, во втором не более 30 млн. тонн. Весь этот уголь должен быть направлен в два пункта потребления B_1 и B_2 с объемами потребления 50 млн. тонн и 40 млн. тонн. Стоимость (в сотнях тысяч рублей за 1 млн. тонн) транспортировки угля от пунктов A_1 и A_2 до пунктов B_1, B_2 приведена в таблице: ⟶

	B_1	B_2
A_1	5	8
A_2	15	10

Из каких бассейнов и в каком количестве следует привозить уголь в каждый из этих пунктов потребления, чтобы расходы на транспортировку угля были минимальными?

11. Имеются пассажирские самолеты двух типов (С-1 и С-2), которые следует распределить по двум авиационным линиям (Л-1 и Л-2). Количество самолетов каждого типа, количество пассажиров, которое может перевезти каждый самолет за месяц, и расходы по эксплуатации самолетов указаны в следующей таблице.

Тип самолета	С-1	С-2
Число самолетов каждого типа	45	30
Количество пассажиров, перевозимых одним самолетом за 1 месяц (в тыс. человек)	2	3
Расходы на эксплуатацию одного самолета на линии Л-1 (в десятках тыс. руб. в месяц)	3	5
То же на линии Л-2	5	7

Каким образом следует распределить самолеты по авиалиниям Л-1 и Л-2, чтобы при минимальных затратах на эксплуатацию самолетов перевезти на каждой из линий Л-1 и Л-2 не менее 60 тысяч пассажиров?

12. Мастерская изготовляет серию однотипных изделий (например, шкафы). Для каждого изделия заготавливается набор досок. В каждый такой набор должны войти 7 досок длиной в 1 *м* и две доски длиной в 2 *м* (и одинаковой ширины 20 *см*). В мастерскую поступила партия из 200 досок длиной в 3,1 *м* (и шириной в 20 *см*), которые намерены использовать для изготовления таких комплектов. Как распилить все доски, чтобы получить возможно большее число комплектов?

13. Для похода решили приобрести партию консервов. Все консервы должны содержать не менее 2 *кг* мяса, не менее 5 *кг* крупяных изделий и не менее 1 *кг* жиров. В магазине обнаружили консервы двух типов:

Тип консервов	*A*	*B*
Цена 1 банки	1,8 руб.	1,0 руб.
Содержится в одной банке: мяса	100 *г*	400 *г*
круп	300 »	200 »
жиров	250 »	0 »
других продуктов	550 »	400 »

Сколько нужно купить консервов каждого вида, чтобы при этом затратить по возможности меньше денег? Сколько необходимо купить консервов каждого типа, чтобы их суммарный вес был минимальным?

3. Мы ограничились рассмотрением лишь таких задач, в которых число неизвестных невелико: в этих задачах дело сводилось к поиску минимума или максимума линейной функции от двух переменных. В настоящее время разработаны разнообразные методы, которые позволяют решать задачи линейного программирования с большим числом неизвестных. Правда, если неизвестных много, то решение таких задач приводит обычно к выполнению большого числа арифметических действий и поэтому приходится пользоваться современными быстродействующими вычислительными машинами.

Применение методов линейного программирования к решению народнохозяйственных задач позволяет сэкономить большие денежные средства. Приведем два примера.

С помощью методов линейного программирования был составлен оптимальный (наиболее выгодный) план перевозки строительного песка от 10 пунктов отправления к 230 пунктам назначения. Этот план оказался на 11% более выгодным, чем тот, которым пользовались ранее.

Почти четверть всех грузов, перевозимых железными дорогами нашей страны, — это каменный уголь. Поэтому ясно, как важно разработать наиболее экономичную схему перевозок угля от месторождений к основным пунктам потребления. С помощью методов линейного программирования такая схема была составлена и охватывала 30 бассейнов-поставщиков и 98 районов-потребителей.

Эта схема оказалась (применительно к году, когда она была составлена) экономичнее фактически использовавшейся схемы поставок на 9,8% или на 80 млн. рублей.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВ

1. Предлагаемые в этом параграфе задачи мы разбили на три цикла — в соответствии с тем, какими средствами предполагается решать эти задачи (алгебра, механика, геометрия).

Начнем с неравенств, которые следует доказать лишь с помощью алгебраических преобразований.

1. Докажите, что при любом действительном a

$$(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10>0.$$

2. Докажите, что при любом натуральном $n \geqslant 2$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$

3. Докажите: при натуральном n $(n \geqslant 2)$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1.$$

4. Докажите: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

5. Докажите, что при любом натуральном n

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}<\sqrt{\frac{1}{2n+1}}.$$

6. Докажите, что при любых действительных a и b

$$(a+b)^4 \leqslant 8(a^4+b^4).$$

Равенство имеет место лишь тогда, когда $a=b$.

7. Докажите, если n — натуральное число и $n>2$, то

$$n^{n+1}>(n+1)^n.$$

2. Доказательство неравенств с помощью механики. Уже простейшие факты из области механики позволяют получать простые и наглядные доказательства разнообразных неравенств.

Прежде чем продолжить чтение этого параграфа, просмотрите § 3 и § 7 из главы V; в частности, вспомните определение центра тяжести, теорему Лагранжа и решения задач № 10 и № 8 из § 3.

8. Используя формулу, определяющую положение центра тяжести n материальных точек, расположенных на луче, докажите: если $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n} < \operatorname{tg}\alpha_n.$$

9. Докажите неравенство Чебышева: если $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$; $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} < \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n}.$$

10. Среднее арифметическое $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и среднее гармоническое $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нескольких чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (которые будем здесь полагать положительными) определяются по формулам:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n};$$

$$\frac{1}{H(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right).$$

Докажите, что при положительных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ верно неравенство:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant H(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Когда будет иметь место равенство?

11. Докажите теорему Коши — Буняковского: при любых неотрицательных $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

В каком случае имеет здесь место равенство?

Другие примеры доказательства неравенств с помощью механики читатель может найти в книге М. Б. Балка [2].

3. Геометрические неравенства.

12. Из всех треугольников, у которых две стороны имеют заданные длины a и b, наибольшую площадь имеет такой прямоугольный треугольник, у которого эти стороны служат катетами.

13. Докажите: в равнобедренном треугольнике сумма боковых сторон меньше, чем в любом другом треугольнике, имеющем такое же основание и такую же высоту, проведенную к основанию.

14. Докажите: из всех треугольников, имеющих данное основание и данную сумму боковых сторон, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

15. Из всех ромбов данного периметра P наибольшую площадь имеет квадрат. Докажите это.

16. Докажите: из всех четырехугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

17. Вы рассматриваете всевозможные равнобедренные треугольники с заданным основанием a и в каждом подсчитываете разность между суммой боковых сторон и высотой, проведенной к основанию.

Докажите, что эта разность окажется наименьшей у того из рассматриваемых треугольников, у которого угол при основании равен 30°.

18. Четыре элеватора A, B, C, D находятся в вершинах квадрата. Как следует выбрать место M для мельницы, чтобы сумма прямолинейных путей $MA + MB + MC + MD$ была наименьшей?

19. Четыре деревни A, B, C, D находятся в вершинах квадрата. Их необходимо соединить телефонной линией так, чтобы каждая деревня оказалась связанной с каждой из остальных. Один проектировщик предложил располагать линию по незамкнутой ломаной $ABCD$; второй заметил, что более короткой будет линия из двух диагоналей $AC + BD$. Третий утверждал, что можно построить еще более короткую телефонную линию, если поступить так: мысленно разбить квадрат $ABCD$ на два равных прямоугольника $AKLB$ и $DKLC$; в первом из них взять точку E, в другом — точку F и мысленно рассмотреть телефонную линию, составленную из 5 прямолинейных линий: AE, BE, EF, DF и FC; затем выбрать положение точек E и F, чтобы суммарная длина этих линий была наименьшей.

Каким же образом следует для этой цели подобрать положения точек E и F?

20. Пусть четырехугольник $ABCD$ не является прямоугольником, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$, $DA = a$. Для вычисления его площади пользуются иногда приближенной формулой:

$$S \approx \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

Докажите, что получаемый таким образом результат всегда больше истинной площади четырехугольника. Оцените допускаемую погрешность, если каждый угол четырехугольника отличается от прямого не больше, чем на φ градусов.

§ 4. РЕШЕНИЕ НЕСОВМЕСТНЫХ СИСТЕМ

1. Допустим, что вам предложили решить систему из нескольких (m) уравнений относительно нескольких (n) неизвестных, причем уравнений больше, чем неизвестных, скажем, 100 уравнений относительно двух неизвестных x и y. Не исключено, что эта система имеет решение — в том смысле, что существуют такие значения неизвестных, при которых все уравнения обращаются в тождества. Однако в тех случаях, которые естественно возникают из жизни, из практики, это маловероятно: можно ожидать, что у системы не окажется решений. Иными словами, при любых возможных значениях неизвестных хотя бы некоторые из уравнений системы в тождества не обратятся. В таких случаях, как известно, система называется переопределенной или несовместной.

Казалось бы, совершенно очевидно, что рассматривать переопределенные системы бессмысленно. В действительности же оказывается, что именно переопределенные системы особенно важны, что именно к решению таких систем приводят многие важные задачи науки и техники!

2. Чтобы понять, в чем здесь дело, обратимся к одной реальной задаче.

Скорость течения воды (например, в реке) находят с помощью прибора, называемого «вертушкой Вольтмана». В водяном потоке вертушка начинает вращаться; скорость ее вращения замеряется специальным счетчиком оборотов. Что касается скорости течения воды, то установлено, что она линейно связана со скоростью вращения вертушки: если b — число оборотов вертушки в минуту, d — скорость течения воды в *м/сек*, то существуют такие числа x и y, что

$$d = x + y \cdot b.$$

Коэффициенты x и y для каждой вертушки свои. Чтобы их найти, выполняют такой эксперимент: вертушку перемещают с постоянной скоростью d *м/сек* в стоячей воде и замеряют скорость вращения вертушки (число оборотов за минуту). Чтобы застраховать себя от случайностей, этот эксперимент повторяют много раз (скажем, 10—20 раз). Однажды в результате такого эксперимента пришли к следующей системе из 10 уравнений:

$$\begin{aligned}
x + 21y &= 0{,}39,\\
x + 32y &= 0{,}55,\\
x + 45y &= 0{,}64,\\
x + 55y &= 0{,}76,\\
x + 57y &= 0{,}81,\\
x + 64y &= 0{,}91,\\
x + 77y &= 1{,}05,
\end{aligned} \qquad (1)$$

$$x + 80y = 1{,}05,$$
$$x + 90y = 1{,}18,$$
$$x + 96y = 1{,}22.$$

Как же решить эту систему, как выбрать числа x и y?

К переопределенным системам приводят задачи астрономии и космонавтики (например, задача определения формы, размеров и положения орбиты искусственного спутника Земли по результатам наблюдений), картографии и других наук.

Общая картина здесь такая же, как в приведенном выше примере: требуется найти несколько (K) величин на основании наблюдений или экспериментов, причем каждое наблюдение позволяет написать для искомых K величин одно (иногда даже несколько) уравнений. Казалось бы, чем больше наблюдений, тем лучше. Но записав большое число уравнений, мы получим для искомых K величин переопределенную, несовместную систему.

3. Итак, важные для практики задачи нередко приводят к решению переопределенных систем, а переопределенные системы не имеют решений. Как же быть?

Мы ограничимся рассмотрением переопределенных л и н е й н ы х систем. Для конкретности возьмем переопределенную систему из n уравнений ($n > 2$) с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \\ &\dots\dots, \\ a_nx + b_ny &= c_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Так как ее точно (то есть в привычном для нас смысле) решить нельзя, то будем искать такие значения неизвестных x и y, чтобы уравнения удовлетворялись приближенно, но (в известном смысле, о котором скажем ниже) как можно точнее. Это и достигается *способом наименьших квадратов.*

Способ наименьших квадратов был предложен в 1806 году французским математиком А. М. Лежандром в связи с задачей о вычислении орбит комет. Через три года известный немецкий математик К. Ф. Гаусс обосновал и значительно усовершенствовал этот метод, а затем применил его к вычислению орбит небесных тел.

Оказывается, что в случае реальных, возникающих из практики, задач метод наименьших квадратов дает наиболее вероятные значения неизвестных, для которых составлена переопределенная система.

Вот в чем суть этого способа.

Рассмотрим следующее выражение:

$$S = (a_1x + b_1y - c_1)^2 + (a_2x + b_2y - c_2)^2 + \ldots + (a_nx_n + b_ny_n - c_n)^2. \tag{3}$$

Очевидно, при любых x и y $S \geqslant 0$.

Если бы однажды оказалось, что пара чисел (x, y) удовлетворяет всем уравнениям (2), то S было бы равно нулю. Если же такой пары чисел (x, y) нет, то выберем x и y так, чтобы величина S имела *наименьшее* из возможных значений. Такая пара чисел (x, y) называется решением системы (2) по способу наименьших квадратов. Каким же образом можно эту пару чисел найти?

4. Для сокращения записей удобно воспользоваться понятием n-мерного вектора.

В математике принято называть n-мерным вектором любой набор из n вещественных чисел, взятых в определенном порядке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Например, четверка чисел $(3, 5, 4, 1)$—это четырехмерный вектор; четверка чисел $(1, 4, 5, 3)$ — это уже совершенно другой четырехмерный вектор. Часто n-мерный вектор обозначают одной буквой:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют компонентами или координатами n-мерного вектора.

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два n-мерных вектора, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$; под их суммой $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ понимают вектор $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots, a_n + b_n)$, а под произведением $k \cdot \boldsymbol{a}$, где k какое-либо вещественное число, понимают вектор $(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$.

Скалярным произведением двух n-мерных векторов

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \text{ и } \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

называется число, равное сумме произведений одноименных компонент, то есть

$$p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n.$$

Оно обозначается так: $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ или $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$, так что

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} \equiv p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n.$$

Чтобы освоиться с этими обозначениями, проверьте себя на нескольких упражнениях.

1. Даны два таких 5-мерных вектора:

$$\boldsymbol{p} = (1,0,0,1,10), \qquad \boldsymbol{q} = (10,0,1,1,0).$$

Вычислите их скалярное произведение.

2. Пусть $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$,

$$\boldsymbol{A} = (b_1y + c_1z - d_1, b_2y + c_2z - d_2, \ldots, b_ny + c_nz - d_n).$$

Напишите в виде алгебраических сумм скалярные произведения:

$$a \cdot a,\ A \cdot A,\ a \cdot A.$$

5. С нашей задачей о решении системы уравнений (2) можем связать такие n-мерные векторы, у которых компоненты являются коэффициентами нашей системы:

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ b = (b_1, b_2, \ldots, b_n),\ c = (c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Тогда, например,

$$a \cdot c = a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n, \tag{5}$$

$$a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2. \tag{6}$$

Отметим мимоходом, что *всю систему* (2) можно записать в виде *одного векторного* уравнения:

$$ax + by - c = 0. \tag{7}$$

Введем обозначения:

$$A_1 = b_1y - c_1,\ A_2 = b_2y - c_2,\ \ldots,\ A_n = b_ny - c_n,$$
$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Тогда

$$S = (a_1x + A_1)^2 + (a_2x + A_2)^2 + \ldots + (a_nx + A_n)^2.$$

Этот квадратный трехчлен относительно переменного x мы преобразуем, выделив полный квадрат:

$$S = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 + 2(a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_nA_n)x + $$
$$+ (A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2) = (a \cdot a)x^2 + 2(a \cdot A)x + (A \cdot A),$$

то есть

$$S = \frac{1}{(a \cdot a)}\Big[(a \cdot a)x + a \cdot A\Big]^2 + \frac{(a \cdot a)(A \cdot A) - (a \cdot A)^2}{(a \cdot a)}. \tag{8}$$

Точно так же можно ввести обозначения

$$B_1 = a_1x - c_1,\ B_2 = a_2x - c_2,\ \ldots,\ B_n = a_nx - c_n,$$
$$B = (B_1, B_2 \ldots, B_n),$$

и тогда S перепишется так (если во всех выкладках поменять местами a и b, x и y, B и A):

$$S = \frac{1}{(b \cdot b)}\Big[(b \cdot b)y + (b \cdot B)\Big]^2 + \frac{(b \cdot b) \cdot (B \cdot B) - (b \cdot B)^2}{(b \cdot b)}. \tag{9}$$

Какими же должны быть числа x и y, чтобы S имело наименьшее из возможных значений?

Из (8) видно, что при каждом выбранном y сумма S будет иметь наименьшее значение тогда, когда

$$(a \cdot a)x + (a \cdot A) = 0. \tag{10}$$

Это наименьшее значение тогда равно

$$\frac{(a \cdot a)(A \cdot A) - (a \cdot A)^2}{(a \cdot a)}$$

и зависит, разумеется, от выбранного y.

Из (9) видно, что при каждом фиксированном x величина S будет иметь наименьшее значение, если

$$(b \cdot b) y + (b \cdot B) = 0. \qquad (11)$$

Отсюда ясно, что если для какой-либо пары чисел x, y выполняются оба условия (10) и (11), то S имеет наименьшее из всех возможных значений.

Таким образом, задача сводится к решению следующей системы двух уравнений с двумя неизвестными x, y:

$$(a \cdot a) x + (a \cdot A) = 0, \qquad (10)$$

$$(b \cdot b) y + (b \cdot B) = 0. \qquad (11)$$

Если вспомним, что $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $A = (b_1 y - c_1, \ldots, b_n y - c_n)$, $a \cdot A = a_1(b_1 y - c_1) + \ldots + a_n(b_n y - c_n) = (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n) y - (a_1 c_1 + \ldots + a_n c_n) = (a \cdot b)\, y - a \cdot c$, то (10) перепишется так:

$$(a \cdot a) x + (a \cdot b) y = a \cdot c. \qquad (12)$$

Аналогично (11) примет вид

$$(b \cdot a) x + (b \cdot b) y = b \cdot c. \qquad (13)$$

Можно доказать, что система двух уравнений (12) и (13) всегда имеет некоторое решение (x, y), и притом единственное. Это решение (x, y) и будет *решением исходной несовместной системы* (2) *по методу наименьших квадратов.*

Заметим, что вспомогательную систему уравнений (12) и (13) называют нормальной системой для исходной системы (2).

Рассмотрим две задачи.

3. Решите методом наименьших квадратов систему (1).

4. Известно, что растворимость $NaNO_3$ в данном количестве воды зависит от температуры. Зависимость эта — линейная:

$$d = x + y \cdot b, \qquad (14)$$

где d — число условных единиц $NaNO_3$, растворяемых в 100 частях воды, b — температура (в градусах Цельсия). Результаты эксперимента (Д. И. Менделеев, «Основы химии», 1906) дают:

b	0	4	10	15	21	29	36	51	68
d	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Пользуясь методом наименьших квадратов, найдите неизвестные коэффициенты x, y в формуле (14).

6. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, смогут быть применены и в случае переопределенных систем с любым числом неизвестных. Алгоритм поиска решений для общего случая таков.

Для решения переопределенной системы

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + \ldots + l_1z &= c_1,\\
a_2x + b_2y + \ldots + l_2z &= c_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_nx + b_ny + \ldots + l_nz &= c_n
\end{aligned}
$$

с m неизвестными x, y, ..., z следует

1) переписать ее в векторном виде

$$\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \ldots + \boldsymbol{l}z = \boldsymbol{c}, \qquad (15)$$

где $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, $\boldsymbol{l}\ (l_1, \ldots\ l_n)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$;

2) составить и решить «нормальную систему» (из m уравнений с m неизвестными)

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})x + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})y + \ldots + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{l})z &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},\\
(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})x + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})y + \ldots + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{l})z &= \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{a})x + (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{b})y + \ldots + (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l})z &= \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{c}.
\end{aligned}
$$

Чтобы легко запомнить нормальную систему, достаточно заметить, что она получается, если обе части векторного уравнения (15) умножать скалярно на каждый из m векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ... , $\boldsymbol{l}$.

5. Температура плавления сплава свинца и цинка зависит от того, каково процентное содержание цинка. Результаты эксперимента приведены в следующей таблице

Содержание (z) цинка в сплаве (в %)	46,7	63,7	77,8	84,0	87,5
Температура (t) плавления (в градусах Цельсия)	197	235	270	283	292

Предполагая, что z выражается через t в виде многочлена второй степени, найдите зависимость z от t.

Глава X

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. ПРОГРЕССИИ

1. Выписаны две арифметические прогрессии. Если из каждого члена первой прогрессии вычесть соответствующий член второй прогрессии, то получится ли снова арифметическая прогрессия?

2. Вычислите значение дроби

$$\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$$

при $x = -0{,}02$.

3. Сократите дробь

$$\frac{x^8+x^6y^2+x^4y^4+x^2y^6+y^8}{x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4}.$$

4. Найдите произведение первых n членов геометрической прогрессии с первым членом a и знаменателем q.

5. Решите уравнение $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = 2$ (под выражением $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}$ понимается предел последовательности $\sqrt{x}$, $\sqrt{x\sqrt{x}}$, $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ и т. д.).

6. Члены последовательности удовлетворяют условиям: а) $u_0 = 1$, б) $u_{n+1} - u_n = 2n$. Выразите u_n через n.

7. а) Проверьте, что члены прогрессии $\{y_n = 2^n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют соотношению $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$;

б) докажите, что прогрессия $\{a \cdot 2^n\}$, где a — любое число, также удовлетворяет тому же соотношению.

8. Найдите прогрессию $\{y_n = q^n\}$, удовлетворяющую рекуррентному соотношению[1] $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$. Какие еще последовательности удовлетворяют этому соотношению?

---

[1] Рекуррентная формула — эта такая формула, которая сводит вычисления любого числа последовательности к вычислению нескольких предшествующих членов. По-латыни «рекуррентная» означает «возвращающая».

9. «Последовательностью Фибоначчи» называется такая последовательность $\{y_n\}$, у которой каждый следующий член равен сумме двух предыдущих, а первые два члена равны 0 и 1 ($y_1 = 0$, $y_2 = 1$); n-й член этой последовательности называется «n-м числом Фибоначчи».

а) Напишите рекуррентную формулу для чисел Фибоначчи.

б) Напишите первые 10 чисел Фибоначчи.

в) Найдите формулу, выражающую n-е число Фибоначчи через номер n.

г) Докажите, что при любом n имеет место такая зависимость для чисел Фибоначчи:

$$y_{n+1} \cdot y_{n-1} - y_n^2 = \pm 1 \text{ («}+1\text{ или }-1\text{»)}.$$

Замечание. Ранее (см. § 11 из главы I) мы привели софизм «$13^2 = 168$». Можно вместо чисел 8, 13, 21, с которыми мы сталкиваемся в этом софизме (рис. 48), взять любых три последовательных числа Фибоначчи y_{n-1}, y_n, y_{n+1} (чаще всего берут 5, 8, 13). Софизм основан на том, что площадь прямоугольника (то есть $y_{n-1} \cdot y_{n+1}$) отличается от площади квадрата (y_n^2) всего на 1 единицу, и эта разница тем менее заметна, чем больше y_n^2.

§ 2. СУММИРОВАНИЕ

1. Формулы для сумм n членов арифметической и геометрической прогрессий дают возможность суммировать большое число слагаемых, если члены составлены по определенному закону. К суммированию прогрессий можно свести и вычисление многих других сумм. Вот несколько примеров.

1. Вычислите следующие суммы:

а) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + 99^2 - 100^2$;

б) $2 + 22 + 222 + \ldots + \overbrace{222\ldots2}^{n \text{ двоек}}$.

Если в сумме большое число слагаемых, то ее запись становится довольно громоздкой. Чтобы сумму записать более компактно, математики обычно употребляют знак «Σ» (заглавная греческая буква «сигма»). Например, запись

$$\sum_{k=1}^{n} aq^{k-1}$$

представляет собой сокращенную запись суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}.$$

Вообще, запись

$$\sum_{k=1}^{n} u_k$$

означает: сумма тех членов последовательности

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$$

чьи номера заключены между 1 и n, то есть

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Аналогичный смысл имеет запись $\sum_{k=p}^{q} u_k$ — это сумма всех таких членов той же последовательности, чьи номера заключены между p и q (включая u_p и u_q).

2. Напишите, не употребляя знак Σ, следующие суммы:

$$\text{а)}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, \qquad \text{б)}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

3. Запишите кратко, употребляя знак Σ, следующие суммы:

а) $a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + [a + (n-1)d]$;

б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2$.

4. Дана последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots .$$

Вычислите сумму $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)$.

2. Один из наиболее общих приемов вычисления сумм — «метод конечных разностей» — состоит в следующем.

Пусть требуется вычислить сумму

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

которую лучше представить с помощью знака Σ так: $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Подбираем (это в ряде случаев удается) такую *вспомогательную последовательность* a_k, чтобы при любом k от 1 до n имело место равенство

$$u_k = a_{k+1} - a_k$$

(каждый член суммы представляем в виде «конечной разности»[1]).

---

[1] «Конечные разности» математики XVIII века противопоставляли «бесконечно малым разностям», как тогда называли дифференциалы функций (понятие дифференциала встречается в курсе математического анализа).

Тогда сумму, как видно из предыдущей задачи, уже легко вычислить:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1.$$

5. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 100}.$$

6. Вычислите $a_{k+1} - a_k$, если

$$a_k = k,\ a_k = k(k-1),\ a_k = k(k-1)(k-2),$$
$$a_k = \frac{1}{k},\ a_k = \frac{1}{k(k+1)}.$$

7. Пользуясь методом конечных разностей, вычислите суммы

а) $\sum_{k=1}^{n} k$, б) $\sum_{k=1}^{100} k(k+1)$, в) $\sum_{k=1}^{20} k(k+1)(k+2)$,

г) $\sum_{k=1}^{n} k^2$, д) $\sum_{k=1}^{n} k^3$, е) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

8. Докажите, что при любом натуральном n

$$\frac{1}{1\cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{3(n-2)} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 1} =$$
$$= \frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Вычислите следующие суммы:

9. $\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \cdots + \frac{1}{62\cdot 65}$.

10. $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{101\cdot 103\cdot 105}$.

11. $\frac{1}{2\cdot 5\cdot 8} + \frac{1}{5\cdot 8\cdot 11} + \frac{1}{8\cdot 11\cdot 14} + \cdots + \frac{1}{(2+3n)(5+3n)(8+3n)}$.

12. Все нечетные числа расположим в виде «журавлиной стаи»: впереди—только 1, за ней—два следующих нечетных числа (3 и 5), за ними в третьем ряду — три очередных нечетных числа (7, 9, 11) и т. д.

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
. . . .

Докажите, что сумма чисел в каждой строчке является точным кубом.

13. Найдите сумму всех парных произведений, которые можно составить из чисел 1, 2, 3, ..., n.

3. Метод конечных разностей можно с успехом применить к вычислению различных *тригонометрических* сумм. При этом полезно вспомнить формулы преобразования произведения двух синусов или косинуса на синус в разность.

14. Вычислите суммы

$$S = \sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots + \sin 99\alpha,$$
$$T = \cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos 99\alpha.$$

(I) § 3. ПОНЯТИЕ О БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДАХ

1. Допустим, что мы располагаем какой-либо бесконечной последовательностью чисел:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots, \tag{1}$$

например,

$$\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 4},\ \ldots,\ \frac{1}{n(n+1)}\ \ldots \tag{2}$$

или

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots \tag{3}$$

Мы можем вычислить сумму двух первых членов такой последовательности, сумму трех ее первых членов, сумму n ее первых членов, где n любое наперед заданное — быть может, очень большое — число. Нам может прийти в голову дерзкая мысль: вычислить сумму в с е х членов этой последовательности! Но сначала мы должны отдать себе отчет: а что это значит? Такое определение «суммы всех членов последовательности» напрашивается само собой: сначала следует вычислить сумму двух первых членов последовательности, то есть число

$$S_2 = a_1 + a_2;$$

к тому, что получится, надо прибавить третий член последовательности, то есть надо вычислить сумму

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3;$$

к полученному числу следует прибавить четвертый член последовательности, то есть надо найти число

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4;$$

и так далее до бесконечности. У нас получится последовательность чисел S_2, S_3, S_4, ... , и тот предел, к которому стремится эта последовательность чисел[1], естественно считать «суммой всех членов последовательности (1)».

В книгах по математике вы можете нередко встретиться с выражениями такого вида:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots . \tag{4}$$

Такое выражение называется бесконечным рядом (или просто рядом). Запись (4) указывает, что последовательность

$$a_1, \ a_2, \ \ldots , \ a_n, \ \ldots$$

рассматривается с точки зрения возможности вычисления *«суммы всех ее членов»*. Многоточие в конце формулы (4) следует читать: « и так далее, до бесконечности». Вот примеры рядов:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots , \tag{5}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots . \tag{6}$$

Сумму первых n членов ряда (4), то есть сумму

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \tag{7}$$

называют «n-й частной суммой» этого ряда.

При $n = 1$ считают, что $S_1 = a_1$.

Как мы уже заметили выше, напрашивается принять следующее определение:

Суммой ряда (4) называется предел последовательности его частных сумм S_n, то есть число

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n \tag{8}$$

(разумеется, если этот предел существует).

Рассмотрите следующие примеры.

1. Вычислите суммы двух рядов:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots ,$

б) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots .$

---

[1] Если она вообще стремится к какому-либо пределу.

Следует иметь в виду, что в некоторых случаях предел (8) может вовсе не существовать. Так, например, если вычислять частные суммы ряда (6), то получим такую последовательность чисел:

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots$$

($S_n = 0$ при n четном и $S_n = 1$ при n нечетном), а эта последовательность не стремится ни к какому пределу.

В подобных случаях говорят, что ряд р а с х о д и т с я. Если же предел (8) существует, то говорят, что ряд с х о д и т с я. К наиболее простым рядам относятся такие, у которых члены образуют геометрическую прогрессию, то есть ряды вида

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + \ldots . \tag{9}$$

2. Выясните, сходятся ли следующие ряды (если сходятся, то каковы их суммы):

а) $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots + (-1)^{n-1}2^{n-1} + \ldots$,

б) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2^n} + \ldots$.

Очень часто, прежде чем взяться за вычисление суммы ряда, имеет смысл сначала выяснить, существует ли вообще эта сумма, то есть сходится ли ряд или расходится: ведь если ряд расходится, то сумму незачем пытаться искать.

В некоторых случаях это не очень трудно выяснить.

3. Докажите, рассуждая от противного, что расходится следующий ряд:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \frac{5}{11} + \frac{6}{13} + \ldots + \frac{k}{2k+1} + \ldots$$

4. Докажите, что ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ лишь тогда может оказаться сходящимся, когда $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

2. Не следует думать, что если предел n-го члена ряда равен нулю, то ряд обязательно сходится.

Один из наиболее любопытных рядов — так называемый г а р м о н и ч е с к и й р я д:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

(члены ряда — всевозможные дроби, у которых числители равны 1, а знаменатели — натуральные числа). Несмотря на то, что n-й член ряда стремится к нулю, ряд *расходится*.

Действительно, среди частных сумм этого ряда имеются как угодно большие:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right), \text{ то есть } S_8 > 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}.$$

Аналогично можно показать, что $S_{16} > 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$, $S_{32} > 1 + 5 \cdot \frac{1}{2}$ и вообще при $n = 2^k$ $S_n > 1 + k \cdot \frac{1}{2}$. Отсюда ясно, что при $k \to \infty$ $S_n \to \infty$. Это и означает, что частные суммы гармонического ряда не стремятся ни к какому (конечному) пределу; ряд расходится.

3. Бесконечные ряды находят широкое применение как в теоретических исследованиях по математике, так и в вычислительной практике.

Особенно широко разработан аппарат степенных рядов, то есть рядов вида

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_n x^{n-1} + \ldots . \tag{10}$$

(Меняя значения x, мы будем получать различные числовые ряды.)

Степенные ряды — это непосредственное обобщение многочлена; каждая частная сумма степенного ряда (10) есть многочлен относительно переменного x. Многие известные функции можно записать в виде суммы степенных рядов, например если x — радианная мера угла, то

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots ,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots .$$

Из последних формул следует, что при малых x можно получить удобные *приближенные* формулы для вычисления синусов и косинусов, например:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2}.$$

Теория степенных рядов (ее иначе называют «теория аналитических функций») была разработана в основном в течение последних двух столетий. Из числа крупнейших математиков, занимавшихся степенными рядами, упомянем Л. Эйлера, К. Вейерштрасса (Германия, 1815—1897), Н. Абеля (Норвегия, 1802—1829).

Разрабатывая математические методы для изучения распространения тепла в сплошных средах, французский математик Ж. Фурье

(1768—1830) пришел к необходимости детального изучения тригонометрических рядов, то есть рядов вида $a + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$.

Эти ряды также нашли затем многочисленные применения.

§ 4. ЗАЧЕМ БЫЛИ ИЗОБРЕТЕНЫ ЛОГАРИФМЫ

1. Логарифмы были изобретены около 350 лет назад в связи с потребностями вычислительной практики.

В это время для решения задач астрономии, мореплавания, в торговых операциях приходилось производить весьма громоздкие вычисления. Так, например, громадную вычислительную работу проделал в начале XVII века известный астроном того времени Иоганн Кеплер для определения орбиты Марса.

Особенно много времени и энергии требовали такие операции, как умножение и деление многозначных чисел, возведение в степень, извлечение корня. Чтобы облегчить вычисления, создавали разные вычислительные таблицы, например таблицы произведений, квадратов, таблицы тригонометрических функций. Перед многими вычислителями возникал вопрос: нельзя ли с помощью таблиц свести **умножение** чисел к **сложению** каких-либо других чисел? При этом требовалось, чтобы результат получался, если и приближенно, то с достаточной для практики степенью точности. Что это можно сделать, было ясно математикам еще в середине XVI века, еще до изобретения логарифмов.

В XVI веке были известны два способа, с помощью которых можно было свести умножение чисел к сложению. **1-й способ** называется по-гречески простаферезис (prostapheresis), то есть «сложение—вычитание». Он основан на тождествах:

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cdot \cos\beta &= \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)], \\ \sin\alpha \cdot \sin\beta &= \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]. \end{aligned} \tag{1}$$

Чтобы перемножить два многозначных числа A и B (которые будем ради простоты полагать меньшими, чем 1), поступали так:

1. По тригонометрическим таблицам (такие тогда уже имелись) находили два таких угла α и β, что $\cos\alpha = A$, $\cos\beta = B$.

2. Затем вычисляли сумму и разность углов α и β. По этой сумме $(\alpha + \beta)$ и разности $(\alpha - \beta)$ находили (пользуясь таблицами) $\cos(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$.

3. Полусумма полученных чисел и есть искомое произведение $A \cdot B$. Это видно из формул (1).

2-й способ — «способ четвертей квадратов». Он основан на тождестве

$$A \cdot B = \frac{1}{4}(A+B)^2 - \frac{1}{4}(A-B)^2.$$

В 1552 году были составлены «таблицы четвертей квадратов». По таблице находили четверти квадратов суммы и разности данных чисел. Разность найденных чисел и давала искомое произведение.

2. Необходимость еще больше упростить вычисления и привела к изобретению логарифмов и созданию логарифмических таблиц. Это сделали, независимо друг от друга, шотландец Дж. Непер в 1614 году и швейцарец И. Бюрги в 1620 году.

К логарифмам они пришли, сравнивая арифметическую и геометрическую прогрессии. Но еще задолго до Непера сопоставлением двух прогрессий интересовались математики разных стран: греческий геометр Архимед (III век до нашей эры), иранский математик Аль-Каши («Ключ арифметики», 1427), немецкий алгебраист Михаэль Штифель («Вся арифметика», 1544) и др.

Рассмотрим таблицу, которая встречается в книге Штифеля.

—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

В верхней строке записаны подряд целые числа, а в нижней — соответствующие степени двойки.

Пользуясь этой таблицей, можно легко и быстро производить различные вычисления над числами, записанными в нижней строке. Например, вместо того чтобы *перемножить* числа 32 и 128, *складываем* стоящие над ними числа верхней строки ($5 + 7 = 12$) и затем под числом 12 читаем ответ в нижней строке. Что это законно, вытекает из обычных правил действия над степенями:

$$2^5 \cdot 2^7 = 2^{12}.$$

Отметим соответствия между действиями над числами двух строк таблицы:

В нижней строке	В верхней строке
умножению	сложение
делению	вычитание
возведению в степень	умножение
извлечению корня	деление

Таким образом, мы имеем здесь дело с основной идеей логарифмических вычислений: возможностью свести сложные действия над числами из одной последовательности к более простым действиям над числами другой последовательности.

Видимо, сам Штифель сознавал важность этого открытия. «Можно было бы написать целую книгу об этих удивительных свойствах чисел, — пишет Штифель, — но здесь я этим ограничусь и пройду мимо с закрытыми глазами».

Но другие математики предпочли не проходить «с закрытыми глазами» мимо этого интересного сопоставления.

3. Идея Штифеля была впоследствии использована швейцарцем Бюрги. Хотя его таблицы появились позже таблиц Непера и не сыграли такой роли, как эти таблицы, мы сначала остановимся на них, так как они проще.

Бюрги долгое время работал в качестве придворного механика и математика у одного влиятельного немецкого князя. Он был лично знаком с Кеплером и хорошо знал нужды астрономии.

Свои таблицы он составил между 1603 и 1611 годами, однако опубликовал их лишь в 1620 году. Они носят название «Таблицы арифметических и геометрических прогрессий».

Бюрги, по-видимому, обратил внимание на то, что для практического осуществления идей Штифеля нужно, чтобы промежутки между соседними членами прогрессии были невелики, а для этого следует взять прогрессию, медленно изменяющуюся, то есть со знаменателем, близким к 1. Он берет прогрессию со знаменателем, равным 1,0001, и рассматривает две последовательности чисел. Одна из них—арифметическая прогрессия $y=10n$ (10, 20, 30, ...) — так называемые красные числа (в его таблицах они набраны цифрами красного цвета), вторая последовательность — геометрическая прогрессия, образованная числами вида $10^8 \cdot (1{,}0001)^n$, («черные числа»). Красному числу $y = 10n$ сопоставляется черное число $x = 10^8 \times \times (1{,}0001)^n$. Отсюда

$$\frac{x}{10^8} = \left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^{\frac{y}{10^5}}.$$

Обозначим $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$ через E; тогда $\frac{y}{10^5}=\log_E \frac{x}{10^8}$; $y=10^5\log_E \frac{x}{10^8}$. Число E весьма близко к числу e — основанию так называемых натуральных логарифмов, $e = 2{,}718281...$.

Строго говоря, таблица Бюрги является не таблицей логарифмов, а таблицей антилогарифмов.

4. Значительно большее распространение, чем таблицы Бюрги, имели таблицы Непера.

Джон Непер родился в 1550 году в своем родовом имении Мерчистоне, близ Эдинбурга, в Шотландии. В 16 лет он отправился на континент, где в течение 5 лет в различных университетах Европы

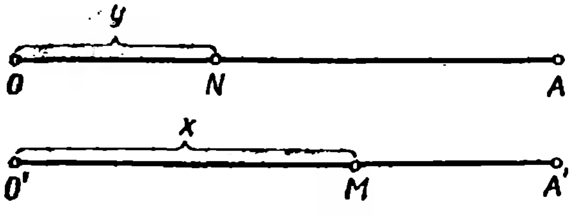


Рис. 126.

изучал математику и другие науки. С 1571 года до самой смерти (в 1617 году) он безвыездно жил в своем имении. Как многие ученые того времени, он занимался астрологией и богословием.

Непер серьезно занимался астрономией и математикой. «Правило Непера» и «аналогии Непера» можно встретить и поныне в любом курсе так называемой сферической тригонометрии.

К идее логарифмических вычислений Непер пришел, видимо, еще в 80-х годах XVI века. Однако свои таблицы он опубликовал в 1614 году, после 25-летних вычислений. Они вышли под названием «Описание чудесных логарифмических таблиц». Это были таблицы логарифмов тригонометрических функций.

Логарифмы Непера несущественно отличаются от так называемых натуральных логарифмов. Точнее говоря, неперов логарифм числа x (который обозначим так: $L\ x$) связан с натуральным логарифмом этого числа ($\ln x$) зависимостью

$$Lx = 10^7 \ln \frac{N}{10^7}.$$

О том, как Непер составил свои таблицы, он написал в книге «Построение чудесных таблиц логарифмов», вышедшей в свет в 1619 году, через 2 года после его смерти.

Неперу принадлежит и сам термин «логарифм» (от греческих слов: «логос» — отношение и «аритмос» — число). У него же встречается наряду с термином «логарифм» термин «искусственное число». По-видимому, так слово «логарифм» и следует переводить на русский язык.

Непер дает чисто механическое определение логарифма. Пусть (рис. 126) $OA = O'A' = r$; пусть по прямой $O'A'$ из O' в A' движется точка (M) **равномерно**, притом так, что через час она достигнет точки A'. Пусть одновременно от A к O движется другая точка N, но уже неравномерно, а с переменной скоростью, и пусть эта скорость меняется так, что в каждый момент времени точке N, чтобы попасть в точку O при той скорости, которую она имеет, нужен ровно 1 час. Пусть в то время, когда расстояние $O'M = x$ расстояние $ON = y$. Расстояние x Непер назвал логарифмом расстояния y: $x = L\ y$.

Можно показать, пользуясь средствами современной математики, что

$$x = -r \log_e \frac{y}{r}.$$

Если бы $r = 1$, то $x = -\log_e y$. У Непера $r = 10$. Поэтому у него, например, если $y = 1$, то $x \neq 0$.

Таблицы и идеи Непера быстро нашли распространение. В 1618 году его «Описание» переводится с латинского языка на английский, а еще через год, в 1619 году, им широко пользуется Кеплер в своих вычислениях. В изданных Кеплером астрономических таблицах на 1620 год он в качестве посвящения поместил письмо Неперу, в котором горячо благодарил изобретателя логарифмических таблиц и указывал на их громадное значение для астрономии (Кеплер не знал, что Непер умер еще в 1617 году).

5. В 1615—1616 годах Непера посетил лондонский профессор математики Генри Бригг (1556 — 1630). По указаниям Непера он приступил к составлению таблиц десятичных логарифмов (четырнадцатизначных). Свои таблицы он опубликовал в 1624 году в книге «Логарифмическая арифметика».

Чтобы себе представить, насколько трудоемки были эти вычисления, приведем пример. Бриггу было известно, что при m достаточно больших

$$\ln a \approx m\left(a^{\frac{1}{m}} - 1\right),$$

точнее,

$$m\frac{\left(\sqrt[m]{a}-1\right)}{\sqrt[m]{a}} < \ln a < m\left(\sqrt[m]{a} - 1\right).$$

Для того чтобы получить ln 10 с 14 десятичными знаками, Бригг полагает $m = 2^{54}$ и вычисляет ln 10 по формуле

$$\ln 10 \approx 2^{54}\left(\sqrt[2^{54}]{10} - 1\right).$$

Он извлекает последовательно 54 раза квадратный корень из 10 с 32 десятичными знаками и результат, уменьшенный на 1, удваивает 54 раза! После этого он в ответе составляет 14 знаков. Таблица Бригга содержит логарифмы от 1 до 20000 и от 90000 до 1000000. Таблицы всех пятизначных чисел были изданы в 1628 году Адрианом Влакком, голландским книготорговцем и любителем математики.

После Бригга и Влакка, как правило, работа велась лишь по упрощению таблиц и устранению ошибок. При этом обычно логарифмические таблицы соединялись с другими таблицами и справочными материалами. Таковы, например, восьмизначные таблицы Каллэ, изданные в конце XVIII века, и многократно переиздававшиеся семизначные таблицы Вега.

Вычисление логарифмов сильно упростилось после того, как немецкий математик Николай Меркатор в 1667 году в книге «Логарифмотехника» нашел разложение логарифма в ряд:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \text{ если } |x| < 1.$$

Отсюда легко вывести, что при $|x| < 1$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

Последняя формула позволяет вычислить логарифм любого числа $N > 1$ (для этого следует число N представить в виде $N = \frac{1+x}{1-x}$, так что $x = \frac{N-1}{N+1}$).

Вскоре после появления логарифмических таблиц были изобретены также первые логарифмические счетные приборы.

В 1623—1627 годах англичанин Гунтер изготовил первую логарифмическую линейку (лишь с двумя шкалами). Тогда же был изготовлен круговой формы прибор, построенный по тому же принципу.

Уже в XIX веке число шкал доводится до девяти и больше.

В России первые таблицы логарифмов были изданы при Петре I учителями Математико-навигацкой школы Л. Магницким, А. Фархварсоном и С. Гвыном.

Очень долго логарифмы продолжали рассматривать лишь в связи со сравнением двух прогрессий. Только через полтораста лет после изобретения логарифмов, в середине XVIII века, петербургский академик Л. Эйлер полностью и систематически изложил теорию логарифмирования как операции, обратной операции возведения в степень.

§ 5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

1. Представьте $\frac{1}{7}$ в виде бесконечной десятичной дроби. Будет ли она периодической? Какова длина периода[1] (то есть сколько цифр в периоде)?

2. Относительно дроби $\frac{2}{13}$ сформулируйте и решите задачу, аналогичную задаче 1.

3. Докажите, что если знаменатель дроби не имеет других делителей, кроме 2 и 5, то дробь может быть представлена в виде конечной десятичной дроби.

4. Не производя деления 3 на 73, докажите, что дробь $\frac{3}{73}$ может быть представлена в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Будет ли эта дробь чистой периодической или смешанной? Может ли в периоде (наименьшем) оказаться 80 знаков?

5. Пусть (a, b) обозначает НОД чисел a и b. Пусть $(a, b) =$

[1] Здесь и дальше имеется в виду наименьший период.

$= 1$, $(10, b) = 1$. Докажите, что: а) дробь $\frac{a}{b}$ можно представить в виде бесконечной периодической дроби, б) эта дробь чисто периодическая, в) длина периода не больше, чем $b - 1$.

6. Через $\varphi(b)$ обозначают обычно количество натуральных чисел, меньших b и взаимно простых с b. Например, $\varphi(3) = 2$ (2 и 1 взаимно просты с 3); $\varphi(10) = 4$ (числа 1, 3, 7, 9 взаимно просты с 10). Найдите: а) $\varphi(15)$, б) $\varphi(p)$, если p — простое число.

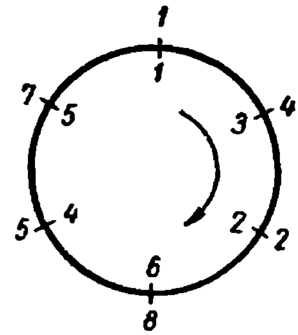


Рис. 127.

7. а) Пусть $a < b$, $(a, b) = 1$, $(10, b) = 1$. Проверьте на примерах $\left(\text{например, } \frac{2}{21}\right)$, что длина периода для дроби $\frac{a}{b}$ не больше $\varphi(b)$.

8. Будут ли периодическими следующие дроби: а) 0,101001000100000..., б) 0,123456789101112... (после запятой подряд выписываются все натуральные числа), в) 0,24681012141618..., г) 0,135791113... .

9. $\frac{1}{7} = 0,\underset{132645}{142857}$ (142857 — период; внизу указаны последовательные остатки от деления 1 на 7); $\frac{2}{7} = 0,285714\ldots$. Отсюда видно, что период для дроби $\frac{2}{7}$ может быть получен из периода для дроби $\frac{1}{7}$ путем круговой (циклической) перестановки цифр (рис. 127). Покажите, что аналогично (путем круговой перестановки цифр) могут быть найдены периоды для дробей $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$.

10. Дробь $\frac{1}{p}$ (p — простое) представлена в виде бесконечной десятичной дроби. Длина периода оказалась равной $(p - 1)$. Докажите, что периоды дробей $\frac{2}{p}$, $\frac{3}{p}$ и т. д. могут быть получены из периода дроби $\frac{1}{p}$ путем круговой перестановки цифр.

11. Пусть $a < b$, $(10, b) = 1$; m — длина периода дроби $\frac{a}{b}$, P — сам период. Докажите, что $a(10^m - 1) = b \cdot P$.

12. Пусть P — период для дроби $\frac{1}{p}$, $(p, 10) = 1$, P содержит $(p - 1)$ цифр. Докажите, что $p \cdot P$ состоит из $p - 1$ девяток.

13. Пусть $(p, 10) = 1$, P — период для дроби $\frac{1}{p}$, P_k — период для дроби $\frac{k}{p}$ $(k < p)$. Докажите, что $P_k = k \cdot P$ $(k = 2, 3, \dots, p-1)$.

14. Пользуясь предыдущей задачей, умножьте быстро 142857 на 2.

15. Умножьте быстро 142857 на 5.

16. а) Пользуясь тем, что $8 = 7 + 1$, а 142857 — период дроби $\frac{1}{7}$, найдите косвенно произведение 142857×8; б) аналогично найдите произведение 142857 на 15, 22, 29, на 9, 16, 19; в) как можно быстро умножить 142857 на любое натуральное число? г) Примените тот же прием для умножения любого натурального числа на период дроби $\frac{1}{17}$.

§ 6. ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

1. Посмотрите на это числовое выражение:

$$5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}} \tag{1}$$

Перед вами пример *цепной дроби*. Вообще, цепной дробью называют выражение вида

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_m}{b_m}}}, \tag{2}$$

где $b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_m, b_m$ — какие-либо числа (не обязательно целые).

Дробь $\frac{a_k}{b_k}$ называется k-м звеном цепной дроби, a_k — k-м частным числителем, b_k — k-м частным знаменателем. Цепную дробь (2) обычно записывают более компактно в следующем виде:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots + \frac{a_{m-1}|}{|b_{m-1}} + \frac{a_m|}{|b_m}. \tag{2'}$$

Одним из первых ученых, обратившихся к цепным дробям, был известный голландский физик и математик Христиан Гюйгенс (1629—

1695). Обдумывая одну конструкцию планетария, он встретился с таким затруднением. Планетарий приводился в движение с помощью зубчатых колес. По расчетам оказалось, что отношение числа зубцов $\frac{m}{n}$ двух каких-либо колес должно быть равным отношению времен обращения двух планет вокруг Солнца. А это отношение выражается достаточно точно в виде (несократимой) дроби с большим числителем и большим знаменателем (оба выражались шестизначными числами). Но понятно, что изготовить зубчатые колеса, у которых число зубцов выражается шестизначным числом, практически очень сложно, да и прочность зубцов была бы небольшая. Тогда Гюйгенс стал искать среди дробей с меньшим числителем и меньшим знаменателем, чем у дроби $\frac{m}{n}$, ту, которая ближе других к дроби $\frac{m}{n}$. И эту задачу он сумел решить с помощью цепных дробей.

Теория цепных дробей была развита величайшим математиком XVIII столетия Леонардом Эйлером; многие важнейшие результаты этой теории принадлежат его младшему современнику, французскому математику Лагранжу.

Цепные дроби можно успешно применить к решению неопределенных уравнений вида

$$ax + by = c.$$

Основная трудность при решении таких уравнений состоит в том, чтобы найти какое-нибудь его частное решение (тогда уже легко написать его общее решение). Так вот, с помощью цепных дробей можно указать алгоритм для разыскания такого частного решения.

Цепные дроби можно применить и к решению более сложных неопределенных уравнений, например так называемого уравнения Пелля

$$x^2 - ay^2 = 1 \quad (a \text{ — натуральное число}).$$

Цепные дроби вида (2) и их обобщения — бесконечные цепные дроби, о которых мы еще скажем позднее, могут быть использованы для решения алгебраических и трансцендентных уравнений (такой способ указал еще Лагранж), для быстрого вычисления значений отдельных функций.

Цепные дроби послужили отправным пунктом в фундаментальных исследованиях таких крупнейших математиков, как П. Л. Чебышев (Россия, 1821—1894), А. А. Марков (Россия, 1856—1922), Т. Стильтьес (Франция, 1856—1894) и другие. С теорией цепных дробей связаны оригинальные исследования видного советского математика наших дней М. Г. Крейна.

В настоящее время цепные дроби находят все большее и большее применение в вычислительной технике, ибо позволяют строить эффективные алгоритмы для решения ряда задач на математических машинах.

2. Мы займемся важным частным видом цепных дробей, а именно такими:

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{1}{q_{m-1} + \cfrac{1}{q_m}}}}}}}, \qquad (3)$$

где q_0 — целое неотрицательное число, q_1, q_2, ..., q_m — положительные целые числа.

Эти цепные дроби будем называть обыкновенными. Таковой является, например, цепная дробь (1). Вы легко вычислите ее значение и убедитесь, что это будет рациональное число. Ясно, что и любая цепная дробь вида (3) при целых (или рациональных) значениях чисел q_0, q_1, q_2, ..., q_m равна какому-то рациональному числу.

Верно и обратное: любую положительную дробь $\frac{m}{n}$ можно представить в виде обыкновенной цепной дроби с целыми неотрицательными q_0, q_1, q_2, ..., q_m (причем $q_k > 0$ при $k > 0$).

1. Представьте в виде обыкновенной цепной дроби (3) следующие числа:

$$\text{а) } \frac{34}{21}, \quad \text{б) } \frac{355}{113}.$$

Вычислить (или, как говорят, «свернуть») цепную дробь (1), приведенную в начале данного параграфа (то есть представить ее в виде отношения двух целых чисел), не представляет большого труда. Каждому очевидно, что «свертывание» следует произвести «снизу вверх»:

$$2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}; \quad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}} = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9};$$

$$3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}} = 3 + \frac{9}{13} = \frac{48}{13}; \quad 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}} = 5 + \frac{13}{48} = \frac{253}{48}.$$

Точно тем же путем можно «свернуть» и любую обыкновенную цепную дробь: сначала вычислить $q_{m-1}+\frac{1}{q_m}$, затем найти $q_{m-2}+\cfrac{1}{q_{m-1}+\cfrac{1}{q_m}}$ и т. д.

Может показаться странным, что любую цепную дробь (3) можно также свернуть «сверху вниз» (то есть использовав сначала только q_0 и q_1, затем — q_0, q_1, q_2, затем q_0, q_1, q_2, q_3 и т. д.). Более того, именно таким свертыванием и предпочитают пользоваться! Вот как это делается.

Пусть n — какое-либо целое число между 0 и m. Рассмотрим вспомогательную цепную дробь

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\genfrac{}{}{0pt}{}{}{\ddots+\cfrac{1}{q_n}}}}.$$

Допустим, что мы ее уже «свернули» «снизу вверх». Тогда у нас образовалась обычная дробь $\frac{P_n}{Q_n}$. Эта дробь называется n-й подходящей дробью цепной дроби (3).

Очевидно, что m-я подходящая дробь как раз и равна цепной дроби (3). При $n=0$ получим

$$P_0=q_0,\ Q_0=1; \tag{4}$$

при $n=1$ найдем

$$P_1=q_0q_1+1,\ Q_1=q_1 \tag{5}$$

и т. д.

Оказывается, что числители и знаменатели трех последовательных подходящих дробей связаны простыми рекуррентными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} P_n&=q_n\cdot P_{n-1}+P_{n-2},\\ Q_n&=q_n\cdot Q_{n-1}+Q_{n-2}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Например, $P_3=q_3\cdot P_2+P_1$, $P_4=q_4\cdot P_3+P_2$ и т. д.

Формулы (6) теряют смысл при $n=1$ и $n=0$. В этих случаях следует обратиться к формулам (4) и (5). Однако если мы условимся чисто формально считать, что $P_{-2}=0$, $Q_{-2}=1$, $P_{-1}=1$, $Q_{-1}=0$, то, как легко проверить, можно и при $n=1$ и $n=0$ пользоваться формулами (6) (получим формулы (4) и (5)).

Формулы (6) позволяют последовательно вычислить $P_2, P_3, \ldots, P_m$; $Q_2, O_3, \ldots, Q_m$, а тогда уже легко найти значение цепной дроби (3) — это будет число $\frac{P_m}{Q_m}$.

2. Временно приняв на веру формулы (6), «сверните» «сверху вниз» цепную дробь (1). Результаты вычислений расположите в следующую таблицу:

n	-2	-1	0	1	2	3	4
q_n			5	3	1	2	4
P_n	0	1					
Q_n	1	0					

3. Сверните цепную дробь

$$1+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|2}+\frac{1|}{|3}+\frac{1|}{|4}.$$

4. Сверните цепную дробь

$$1+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}.$$

5. Докажите методом математической индукции, что числители и знаменатели последовательных подходящих дробей можно последовательно находить по формулам (6).

6. Эйлер установил, что при любом натуральном n имеет место следующая зависимость:

$$Q_n \cdot P_{n-1} - P_n \cdot Q_{n-1} = (-1)^n. \tag{7}$$

Докажите формулу Эйлера.

7. Покажите на двух примерах, что любую обыкновенную цепную дробь с натуральными членами можно так представить в виде (3), чтобы число m было четным. Как в этом убедиться в общем случае?

3. Укажем одно полезное приложение цепных дробей, а именно — к решению (в целых числах) неопределенных уравнений вида

$$ax - by = 1, \tag{8}$$

где a и b — взаимно простые натуральные числа.

Действительно, допустим, что мы разложили дробь $\frac{b}{a}$ в обыкновенную цепную дробь; пусть она оказалась m-звенной (мы можем всегда считать, что m — четное число — см. задачу 7). Тогда $P_m = b$, $Q_m = a$.

Можно также вычислить P_{m-1} и Q_{m-1}; в силу формулы (7) и четности числа m получим

$$a \cdot P_{m-1} - b \cdot Q_{m-1} = 1,$$

то есть уравнению (8) удовлетворяет такая пара чисел:

$$x_0 = P_{m-1}, \quad y_0 = Q_{m-1}.$$

А зная частное решение уравнения (8), уже нетрудно написать и его общее решение:

$$x = x_0 + b \cdot t, \quad y = y_0 + at,$$

где t — любое целое число.

8. Найдите с помощью цепных дробей частное решение уравнения $8x - 5y = 1$. Напишите затем его общее решение.

9. Найдите общее решение и три частных решения неопределенного уравнения $83x - 117y = 1$.

10. Укажите алгоритм решения с помощью цепных дробей следующих уравнений: (a, b — натуральные числа):

а) $ax + by = 1$,

б) $ax + by = c$.

11. Решите в целых числах уравнение

$$37x - 28y = 13.$$

4. Может оказаться, что заданная обыкновенная цепная дробь очень длинная: в ней, скажем, несколько тысяч звеньев. Вообразим себе, что мы вычислили только первые 10 подходящих дробей и приняли десятую подходящую дробь в качестве приближенного значения всей цепной дроби; можно ли, не вычисляя всю цепную дробь, оценить погрешность, которую мы при этом допускаем? Будет ли это приближением по недостатку или по избытку? Не может ли случиться, что девятая или восьмая подходящая дробь ближе к точному значению цепной дроби (α), чем десятая подходящая дробь?

Ответы на эти вопросы будут следовать из решений приведенных ниже задач.

12. Докажите, что для каждой обыкновенной цепной дроби (3) подходящие дроби четного порядка возрастают

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \frac{P_6}{Q_6} < \ldots,$$

а подходящие дроби нечетного порядка убывают:

$$\frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > \frac{P_5}{Q_5} > \ldots .$$

13. Докажите, что если обыкновенная цепная дробь порядка n равна α, то α больше любой подходящей дроби четного порядка и меньше любой подходящей дроби нечетного порядка; иными словами — при любом k $(2k + 1 < n)$

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \alpha < \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}. \qquad (9)$$

Изобразите утверждения задач 12 и 13 схематически на числовой прямой.

14. Докажите следующее предложение, уточняющее предложение из задачи 13.

Значение α обыкновенной цепной дроби располагается между любыми двумя ее подходящими дробями $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$, и притом ближе к последующей $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)$, чем к предыдущей: $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$[1].

15. Допустим, что знаем знаменатели n-й и $(n-1)$-й подходящих дробей (то есть Q_n и Q_{n-1}) для обыкновенной цепной дроби, равной α. Заменим число α ее n-й подходящей дробью $\frac{P_n}{Q_n}$. Оцените допущенную погрешность.

16. Дана цепная дробь

$$\alpha = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \genfrac{}{}{0pt}{}{}{\ddots + \cfrac{1}{2}}}}$$

(всего 100 000 двоек). Вычисляем ее приближенно и ограничиваемся лишь ее десятой подходящей дробью $\frac{P_{10}}{Q_{10}}$. Какое приближенное значение для числа α получим? Оцените допускаемую при этом погрешность.

5. Рассмотрим теперь одну задачу, подобную той, с которой еще встретился Гюйгенс.

Допустим, что конструируют механизм, в котором, в частности, имеется зубчатая передача — два зубчатых колеса на параллельных осях. Пусть по проведенным расчетам передаточное число γ (отношение угловых скоростей вращения) этих колес должно быть равно 0,83, с допустимым отклонением в 0,005. Такое значение для γ легко получить, если взять на одном колесе 100 зубцов, а на втором 83 зубца. Но в механическом цехе объяснили, что изготовить зубчатые колеса с таким большим числом зубцов сложно, да и зубцы будут непрочными. Цех может изготовить шестерни, у которых не больше 10 зубцов; чем меньше окажется число зубцов, тем проще будет изготовить колеса. Возникает такой вопрос: каким образом выбрать дробь $\frac{p}{q}$, чтобы знаменатель и числитель были не

---

[1] Исключение составляет дробь $q_0 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1}$.

больше, чем 10, но в то же время дробь отличалась от числа 0,83 меньше, чем на 0,005?

Вот здесь нам и могут пригодиться цепные дроби. Разложим число 0,83 в цепную дробь:

$$0{,}83 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2}}}}}.$$

Найдем ее подходящие дроби:

	-2	-1	0	1	2	3	4	5
q_n			0	1	4	1	7	2
P_n	0	1	0	1	4	5	39	83
Q_n	1	0	1	1	5	6	47	100

Отсюда видно, что $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{39}{47}$; $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{5}{6}$.

В силу формул (9) и (7) имеем $\left|0{,}83 - \frac{5}{6}\right| < \left|\frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_4}{Q_4}\right| = \frac{1}{Q_3 \cdot Q_4} = \frac{1}{47 \cdot 6}$,

то есть $\left|0{,}83 - \frac{5}{6}\right| < 0{,}004 < 0{,}005$.

Итак, допуская погрешность, которая меньше 0,004, можно применить в интересующей нас передаче два зубчатых колеса, у которых 5 и 6 зубцов. Задача решена.

Но теперь может перед нами встать вопрос: а может быть, существует еще другая дробь $\left(\frac{p}{q}\right)$, которая еще ближе к числу 0,83 и в то же время имеет еще меньший знаменатель, чем дробь $\frac{5}{6}$[1]? Оказывается, что такой дроби $\frac{p}{q}$ нет! И вот почему.

[1] Если бы такая дробь $\frac{p}{q}$ нашлась, то стоило бы предпочесть для решения нашей задачи две шестерни с p и q, зубцами.

Допустим, что число $\frac{p}{q}$ ближе к числу 0,83, чем число $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{5}{6}$. Раньше мы уже заметили, что значение каждой цепной дроби α заключено между двумя последовательными подходящими дробями $\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\text{ и }\frac{P_n}{Q_n}\right)$, и притом ближе к последующей $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)$, чем к предыдущей.

В нашем случае полагаем $\alpha = 0{,}83$, $n = 3$. Тогда $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{4}{5}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{5}{6}$.

Так как по условию дробь $\frac{p}{q}$ ближе к числу 0,83, чем число $\frac{P_3}{Q_3}\left(=\frac{5}{6}\right)$, то во всяком случае

$$\frac{P_2}{Q_2} < \frac{p}{q} < \frac{P_3}{Q_3} \text{ и } 0 < \frac{p}{q} - \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2},$$

то есть

$$0 < \frac{p}{q} - \frac{P_2}{Q_2} < \frac{1}{Q_2 \cdot Q_3}.$$

После умножения на $Q_2 \cdot Q_3 \cdot q$ получим

$$0 < (p \cdot Q_2 - qP_2) Q_3 < q.$$

Так как $pQ_2 - qP_2$ — целое и неотрицательное число, то

$$q > Q_3 (=6).$$

Итак, если дробь $\frac{p}{q}$ ближе к числу 0,83, чем дробь $\frac{5}{6}$, то $q>6$, что и требовалось доказать.

Отметим, что сходными рассуждениями можно установить и общий результат, принадлежащий Лагранжу: если число α разложено в обыкновенную цепную дробь, то каждая подходящая дробь дает для числа α самое лучшее рациональное приближение, которого только можно достигнуть, не увеличивая знаменателя этой подходящей дроби.

6. Приведем еще один пример из астрономии, когда также требуется заменить дробь с большим числителем и большим знаменателем дробью с меньшими членами.

Для того чтобы произошло полное солнечное или лунное затмение, три небесных тела — Солнце, Земля и Луна — должны оказаться на одной прямой.

Как известно, эклиптикой называется плоскость (α), в которой движется Земля вокруг Солнца. Вообразим себе другую плоскость β, которая перпендикулярна эклиптике и проходит через центр

Солнца и центр Земли; эта плоскость будет, очевидно, вращаться вокруг Солнца вместе с Землей.

Пусть в какой-то момент времени Луна оказалась в этой плоскости, и притом дальше от Солнца, чем Земля. Такой момент времени называется полнолунием. Промежуток между двумя последовательными моментами полнолуния называется в астрономии с и н о д и ч е с к и м месяцем, его длительность $s = 29{,}506$ суток.

Если бы Луна двигалась в плоскости эклиптики, то в момент полнолуния всегда было бы лунное затмение: Земля укрыла бы Луну от солнечных лучей. В действительности плоскость орбиты Луны н а к л о н е н а к плоскости эклиптики под некоторым углом (около 5°), и лунное затмение происходит лишь в том случае, если в момент полнолуния Луна оказывается в плоскости эклиптики.

Плоскость эклиптики разбивает все пространство на два полупространства: одно из них — «северное», где расположена Полярная звезда, второе — «южное», где расположено, например, созвездие Южный Крест.

Вращаясь вокруг Земли и двигаясь вместе с ней вокруг Солнца, Луна через равные промежутки времени «прокалывает» плоскость эклиптики, переходя с «южной» стороны эклиптики на «северную». Промежуток между такими двумя последовательными прохождениями называется д р а к о н и ч е с к и м месяцем, его длительность $d = 27{,}2122$ суткам[1].

Допустим, что в какой-то момент времени произошло лунное затмение: в какое-то полнолуние Луна оказалась в плоскости эклиптики[2]. Через какое время затмение опять повторится?[3]

Это будет тогда, когда Луна еще раз окажется одновременно и в плоскости α, и в плоскости β, то есть когда пройдет целое число драконических (x) и целое число синодических (y) месяцев; тогда $x \cdot d = y \cdot s$,
или

$$\frac{y}{x} = \frac{d}{s} = \frac{27{,}2122}{29{,}5306} = \frac{136\,061}{147\,653}. \qquad (10)$$

Понятно, что и числитель последней дроби, и ее знаменатель, и вся дробь — приближенные числа. Будем полагать, что допустимо отклонение в этой дроби, не превышающее $5 \cdot 10^{-6}$. Таким образом, нам предстоит подобрать такую дробь, которая отличается от дроби (10) меньше, чем на $5 \cdot 10^{-6}$, и в то же время имеет мень-

[1] С первого взгляда может показаться, что драконический месяц должен быть равен синодическому. Так бы оно и было, если система Земля—Луна не вращалась бы вокруг Солнца.

[2] И притом дальше от Солнца, чем Земля.

[3] Заметим, что этот промежуток времени называется *сарос*. Он был известен еще 5000 лет назад в Вавилоне и Египте.

ший числитель и меньший знаменатель. Ситуация такая же, как в предыдущей задаче. Разложим число $\gamma = -\frac{136\,061}{147\,653}$ в цепную дробь. Получим:

$$\gamma = \frac{136\,061}{147\,653} = \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7}}}}}}}.$$

Вычисляем затем подходящие дроби:

	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q_n			0	1	11	1	2	1	4	4	17	1	7
P_n			0	1	11	12	35	47	223	939	16 186	17 125	136 061
Q_n			1	1	12	13	38	51	242	1019	17 565	18 584	147 653

Обращая внимание на знаменатели, замечаем, что

$$\frac{1}{Q_n \cdot Q_{n+1}} < \frac{5}{10^6}, \text{ если } n = 6.$$

Поэтому можно в качестве искомого приближения взять подходящую дробь

$$\frac{P_6}{Q_6} = \frac{223}{242}.$$

Выбирая $y = 223$, $x = 242$, получим: $223 \cdot s = 6585{,}32$ суток, $242\,d = 6585{,}35$ суток. Получаемые таким образом результаты отличаются примерно на 0,03 суток (то есть меньше, чем на $\frac{3}{4}$ часа).

Итак, каждое лунное затмение повторится примерно через $6585\frac{1}{3}$ суток $\approx$ 18 лет, то есть сарос составляет около 18 лет. Можно показать, что и солнечные затмения должны повторяться через такой же промежуток времени.

7. Помимо конечных цепных дробей в математике рассматриваются также бесконечные цепные дроби.

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{q_n+\ddots}}}} \qquad (11)$$

(q_0, q_1, ... q_n, ... — целые числа; q_1, q_2, ..., q_n, ... — положительные).

Значением такого выражения, естественно, считают предел, к которому стремится числовая последовательность

$$q_0,\quad q_0+\frac{1}{q_1};\quad q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}};\quad q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3}}}$$

(разумеется, в предположении, что такой предел существует. Однако можно показать, что он действительно существует, когда все числа q_0, q_1, ... , q_n, ... — натуральные).

Для бесконечной цепной дроби вида (11) с положительными членами остается в силе свойство, которое мы отметили ранее в задаче 13: ее значение заключено между любыми двумя последовательными подходящими дробями. Это позволяет не только найти приближенные значения цепной дроби, но каждый раз оценить допускаемую погрешность.

Помимо цепных дробей вида (2) и (11) заслуживают внимания конечные и бесконечные цепные дроби более общего вида:

$$a_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{a_n}{b_n+}}}} \qquad (12$$

При этом представляет интерес не только случай, когда числа a_0, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ... — натуральные; интересен также случай, когда они могут оказаться произвольными вещественными или даже произвольными комплексными.

Большое внимание привлекли и **ф у н к ц и о н а л ь н ы е** цепные дроби, то есть выражения вида (12), у которых a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_nb_n, ... не числа, а функции, например линейные функции независимого переменного x.

Несколько замечательных разложений чисел в цепные дроби нашли известные математики Эйлер, Гаусс, Лагранж и другие. Вот, например, цепная дробь для числа π, найденная еще более 300 лет назад английским математиком Брункером:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}$$

Швейцарский математик Иоганн Генрих Ламберт (1728—1777) нашел для числа π такое представление в виде цепной дроби:

$$\pi = 3 + \frac{1|}{|7} + \frac{1|}{|15} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|292} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \ldots .$$

Ее подходящими дробями оказываются числа

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{22}{7}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{333}{106}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{355}{113}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{103693}{33102}, \ldots .$$

17. Какие иррациональные числа изображаются следующими бесконечными цепными дробями:

а) $$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

б) $$\frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \ldots .$$

§ 7. НЕСКОЛЬКО ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Прежде чем приступить к решению приведенных ниже уравнений, следует иметь в виду, что иногда целесообразно предварительно исследовать входящие в него функции (область определения, область значений, характер изменения и т. п.). Решение уравнений желательно сопровождать графической иллюстрацией.

1. Решите уравнение $\cos 2x = 2\cos^2 x$.

2. Будет ли уравнение $\cos 5x = \cos x$ равносильно совокупности уравнений $5x = x + 2\pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$?

3. Решите уравнения: а) $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, б) $\sin 3x =$

$= \sin 2x$, в) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, г) $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} x$.

4. Уравнение $\lg (1 + x)^2 = 0$ ученик решает так: «$2 \lg (1 + x) = 0$; $\lg (1 + x) = 0$; $1 + x = 1$, $x = 0$». Правильно ли это?

Решите уравнения:

5. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

6. $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}$.

7. $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$.

8. $\sin x \cdot \cos x = \frac{\pi}{6}$.

9. а) $2^{\sin^2 x} = \sin x$, б) $2^{\sin^2 x} = \cos x$.

10. $2^{\sin^4 x} + \sin^2 x = 1$.

11. $\cos^2 x \cdot \cos^2 5x = \sec^2 10x$.

12. $\sin^2 x + \cos^2 2x = 2 \sec^2 3x$.

13. $| \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x | = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

14. $\left(\sin \frac{\pi}{9}\right)^{\cos^2 x - 1} + \sin^2 x = 1$.

15. $\arcsin x + \arcsin \frac{1}{x} = \pi$.

16. Напишите уравнение, действительными корнями которого являются: а) все целые числа (и только они), б) все натуральные числа (и только они), в) все четные числа (и только они), г) все нечетные числа (и только они).

17. Напишите тригонометрическое уравнение, имеющее единственный (действительный) корень.

18. Существует ли такое число y, что $\lg (a + y) = \lg a + \lg y$? При каких значениях a такое число y существует? Сколько таких значений для каждого a?

§ 8. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

1. Школьная программа знакомит учащихся со способами решения уравнений первой степени, с формулой для решения квадратного уравнения и со способами решения показательных и тригонометрических уравнений.

Однако практика часто приводит к уравнениям, которые не подходят под указанные виды. Как же быть в подобных случаях? Вот, например, уравнение Кеплера

$$x - e \sin x = M, \tag{1}$$

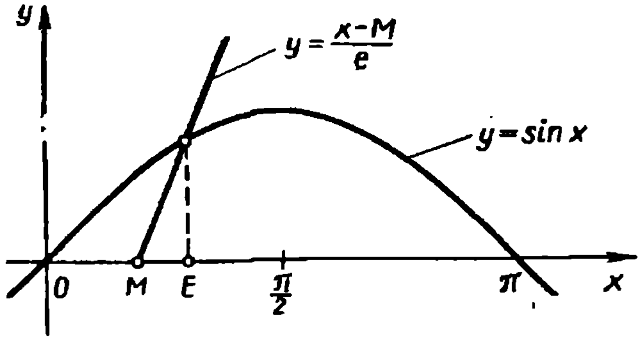


Рис. 128.

где x — неизвестное число, а e и M — какие-то постоянные числа, $0 < e < 1$. Оно имеет большое значение при прогнозировании положений естественных и искусственных небесных тел, движущихся по эллиптическим орбитам.

Если требуется его решить с небольшой точностью, то можно воспользоваться графическим способом — корень E уравнения можно найти как абсциссу точки пересечения двух линий:

$$\text{синусоиды } y = \sin x \text{ и прямой } y = \frac{x - M}{e} \quad (\text{рис. } 128).$$

Но как быть, если необходимо найти корень этого уравнения (из графиков видно, что он единственный) с **большой** точностью? Как быть в других подобных случаях?

Современная математика разработала эффективные методы нахождения корней разнообразных уравнений с любой наперед заданной точностью. Среди них одним из наиболее простых является **метод неподвижной точки.**

2. Разъясним, в чем заключается сущность этого метода. Данное уравнение заменяем равносильным ему уравнением вида

$$x = f(x). \tag{2}$$

Например, уравнение Кеплера (1) можно переписать в равносильной форме так:

$$x = e \sin x + M. \tag{3}$$

Уравнение $x^2 = a$ $(a > 0)$ можно, например, записать в такой форме: $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.

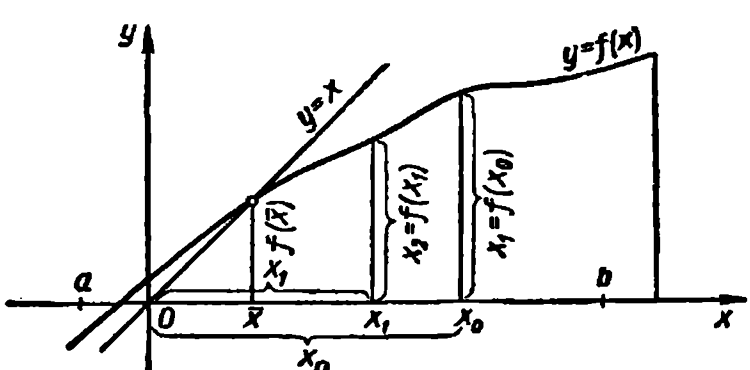


Рис. 129.

Само название данного метода связано с записью (2): с помощью преобразования $y = f(x)$ «точка» x переходит в «точку» $f(x)$; нас интересует корень уравнения (2), то есть такая «точка» $\bar{x}$, для которой $f(\bar{x})$ совпадает с $\bar{x}$. Иначе говоря, речь идет о такой точке $\bar{x}$, которая преобразуется функцией $y = f(x)$ сама в себя или, как говорят, «остается *неподвижной* при преобразовании $y = f(x)$».

Каждый корень x уравнения (2) — это абсцисса точки пересечения двух линий — прямой $y = x$ и линии $y = f(x)$ (рис. 129).

Пусть нам известно, что искомый корень x уравнения (2) расположен на некотором отрезке $[a, b]$ и является там единственным корнем этого уравнения. Мы не исключаем того случая, когда в качестве отрезка $[a, b]$ берется вся числовая прямая или какой-нибудь ее луч.

Относительно функции $f(x)$ будем полагать, что она определена на всем отрезке $[a, b]$ и что при каждом выборе числа x из отрезка $[a, b]$ число $f(x)$ тоже заключено между a и b:

$$a \leqslant f(x) \leqslant b, \quad \text{если } a \leqslant x \leqslant b. \tag{3}$$

Про функцию, обладающую последним свойством, говорят, что она **отображает отрезок** $[a, b]$ **в себя**. Для примера рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ функцию

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{2}. \tag{4}$$

Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1$ и число $f(x) = \frac{1 - x^2}{2}$ тоже заключено между 0 и 1 (даже между 0 и $\frac{1}{2}$). Таким образом, функция (4) отображает отрезок $[0, 1]$ *в себя*. Та же функция определена и на отрезке $[0; 3]$, но она этот отрезок уже не отображает в себя. Например, числу $x=2$ она сопоставляет числа $f(2) = \frac{1 - 2^2}{2} = -\frac{3}{2}$, которое уже не заключено между 0 и 1.

Заметим еще, что уравнение (4) имеет на отрезке $[0, 1]$ корень (и притом единственный). В этом можно убедиться, например, рассмотрев графики $y = x$ и $y = \frac{1 - x^2}{2}$.

Итак, пусть функция $f(x)$ отображает отрезок $[a, b]$ в себя и пусть известно, что на этом отрезке уравнение $x = f(x)$ имеет один (и притом неизвестный нам) корень $\bar{x}$. На основании предварительной прикидки (быть может, даже весьма грубой) выберем «нулевое приближение» x_0 к искомому корню $\bar{x}$. Например, в уравнении Кеплера можно в качестве нулевого приближения взять число 0 или число M.

Мы можем последовательно найти числа

$$x_1 = f(x_0); \quad x_2 = f(x_1); \quad x_3 = f(x_2), \ldots \tag{5}$$

и вообще

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{6}$$

которые будем называть «первым приближением», «вторым приближением», ... , «$(n+1)$-м приближением» к искомому корню $\bar{x}$.

В случае, который соответствует нашему чертежу (рис. 129), мы видим, что x_1 ближе к $\bar{x}$, чем x_0; x_2 ближе к $\bar{x}$, чем x_1; x_3 — чем x_2, и т. д. Оказывается, что сходная картина имеет место во многих важных для практики случаях: часто оказывается, что последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ имеет своим пределом как раз искомый корень $\bar{x}$. В этих случаях для вычисления корня $\bar{x}$ можно пользоваться приближенной формулой

$$\bar{x} \approx x_n,$$

которая тем точнее, чем больше n. В связи с этим нам следует прежде всего научиться для конкретных уравнений строить последовательные приближения по формулам (5) — (6).

Для примера рассмотрим приближения к тому корню $\bar{x}$ уравнения

$$x = \frac{1-x^2}{2}, \tag{7}$$

который заключен между 0 и 1.

В данном случае в качестве нулевого приближения возьмем, скажем, число $x_0 = 1$. Тогда $x_1 = \frac{1-x_0^2}{2} = 0$, $x_2 = \frac{1-x_1^2}{2} = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1-x_2^2}{2} = \frac{3}{8} = 0{,}37\ldots$,

$x_4 = \frac{1-x_3^2}{2} = \frac{55}{128} = 0{,}43\ldots$, $x_5 = \frac{1-x_4^2}{2} = 0{,}41\ldots$. С другой стороны, приведя уравнение (7) к виду $x^2+2x-1=0$ и решая его как квадратное, найдем, что $\bar{x} = -1+\sqrt{2} = 0{,}414\ldots$. Таким образом, уже x_5 дает приближение к искомому корню с двумя верными десятичными знаками. Следующие приближения, которые можно построить по формуле $x_{n+1} = \frac{1-x_n^2}{2}$ $(n = 5, 6, 7, 8, \ldots)$, еще ближе подходят к искомому корню.

1. Как мы уже заметили выше, уравнение $x^2 = a$ можно переписать так:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right). \tag{8}$$

Пользуясь этой формулой и привлекая метод неподвижной точки, укажите алгоритм для приближенного вычисления числа $\sqrt{a}$ $(a > 0)$.

2. Пользуясь алгоритмом, полученным в предыдущей задаче, и приняв число 2 за нулевое приближение (x_0) к $\sqrt{3}$, вычислите три последовательных приближения x_1, x_2, x_3 к числу $\sqrt{3}$ (каждое — с тремя десятичными знаками после запятой).

3. Используя графики, убедитесь, что уравнение $x^3 + 3x - 1 = 0$ имеет единственный (вещественный) корень. Убедитесь затем, что этот корень заключен между 0 и 1. Переписав уравнение в виде $x = \frac{1}{x^2+3}$ и приняв за нулевое приближение к этому корню число $x_0=1$, вычислите три последовательных приближения x_1, x_2, x_3 к этому корню (каждое — с двумя десятичными знаками).

*4. а) Простым подбором найдите целочисленный корень уравнения

$$2^x = 4x;$$

б) сколько всего корней имеет это уравнение? Получите ответ, воспользовавшись графиками; в) убедитесь, что рассматриваемое уравнение имеет корень между 0 и 1; г) приняв за нулевое приближение к этому корню число $x_0=0$, вычислите четыре последовательных приближения x_1, x_2, x_3, x_4 к корню (каждое с двумя десятичными знаками).

5. Допустим, что для вычисления $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ пользуемся формулой Герона

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \tag{8}$$

В качестве n-го приближения приняли какое-либо положительное число x_n. Докажите, что

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant |x_{n+1} - x_n|, \tag{9}$$

$$|x_n - \sqrt{a}| \leqslant 2\,|x_{n+1} - x_n|. \tag{10}$$

6. Пользуясь результатом предыдущей задачи, вычислите $\sqrt{6}$ с двумя верными десятичными знаками.

3. Принимая, что неизвестный нам корень $\bar{x}$ уравнения

$$x = f(x) \tag{2}$$

равен какому-то числу x_{n+1}, допускаем некоторую погрешность, которая равна $|\bar{x} - x_{n+1}|$, чтобы знать, является ли число x_{n+1} хорошим или плохим приближением к искомому корню, важно уметь оценивать эту погрешность.

Для частного случая, рассмотренного в задаче 5, такую оценку уже получили. Теперь получим сходную оценку для весьма общего и практически важного случая уравнений вида (2).

Будем полагать, в о-п е р в ы х , что функция $f(x)$ задана на некотором отрезке $[a, b]$ и отображает его *в себя*.

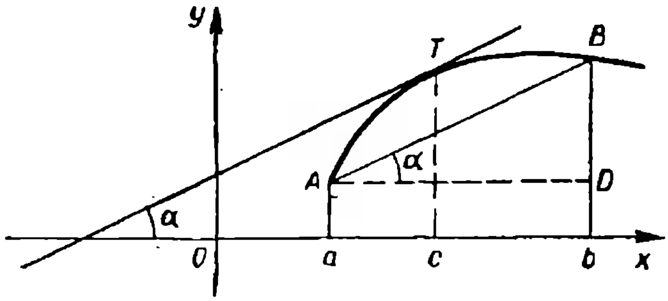


Рис. 130.

Если график функции $y = f(x)$ над отрезком $[a, b]$ настолько «пологий», что любая его хорда (то есть отрезок, соединяющий две точки графика) наклонена к оси абсцисс под углом α, меньшим $45°$, то $|\operatorname{tg}\alpha| < 1$. Потребуем от функции $f(x)$ несколько больше, а именно — будем, в о - в т о р ы х, полагать, что существует такое постоянное число q, $0 < q < 1$, что при любом выборе хорды на графике $y = f(x)$ $(a < x < b)$ угол α наклона этой хорды к оси абсцисс удовлетворяет неравенству

$$|\operatorname{tg}\alpha| \leqslant q. \tag{11}$$

Ясно (рис. 129), что это требование можно так перефразировать: при любом выборе чисел x' и x'' из $[a, b]$ имеет место неравенство:

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant q\,|x'' - x'|. \tag{12}$$

Если функция $f(x)$ обладает указанными свойствами, то говорят, что она дает (или осуществляет) с ж а т о е отображение отрезка $[a, b]$ в себя. Для примера рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ функцию $f(x) = \frac{1}{x+2}$. Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $2 \leqslant x + 2 \leqslant 3$, $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{x+2} \leqslant \frac{1}{2}$, и подавно $0 < \frac{1}{x+2} < 1$; а это значит, что функция $\frac{1}{x+2}$ *отображает* отрезок $[0, 1]$ *в себя*.

При любом выборе чисел x' и x'' на $[0, 1]$ (то есть таких, чтобы $0 \leqslant x' < x'' \leqslant 1$) имеем:

$$|f(x'') - f(x')| = \left|\frac{1}{x''+2} - \frac{1}{x'+2}\right| = \frac{1}{(x'+2)(x''+2)}|x'' - x'| < \frac{1}{4}|x'' - x'|.$$

Отсюда видно, что можно принять $q = \frac{1}{4}$. Таким образом, $0 < q < 1$, а это значит, что функция $\frac{1}{x+2}$ дает *сжатое* отображение отрезка $[0, 1]$ *в себя*.

Возвращаясь к общему случаю, будем еще считать известным, что на отрезке $[a, b]$ уравнение $x = f(x)$ имеет единственный корень $\bar{x}$[1].

---

[1] Можно доказать, что на самом деле этот факт всегда имеет место: если функция $f(x)$ дает сжатое отображение отрезка $[a, b]$ *в себя*, то уравнение $x = f(x)$ имеет на $[a, b]$ корень, и притом единственный.

Обозначим через x_n число, которое мы по той или иной причине приняли в качестве n-го приближения к искомому корню $\bar{x}$. *«История появления» числа x_n нас сейчас не интересует.* Быть может, оно получилось после выбора какого-то «нулевого приближения» x_0 и повторного применения формулы $x_{k+1}=f(x_k)$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$; а быть может, прежде чем пользоваться этой формулой, мы каждый раз округляли числа x_1, x_2, ... или проделывали над ними какие-то алгебраические действия — для нас это сейчас безразлично. Важно то, что число x_n уже выбрано.

Следующее приближение x_{n+1} к искомому корню $\bar{x}$ мы построим по формуле

$$x_{n+1} = f(x_n). \tag{13}$$

Зная x_n и x_{n+1}, мы знаем также разность $x_{n+1}-x_n$. Оказывается, что можем с помощью этой разности оценить отклонение каждого из чисел x_n и x_{n+1} от искомого корня $\bar{x}$. Действительно, по условию

$$\bar{x} = f(\bar{x}). \tag{14}$$

В силу формул (12) — (14) имеем:

$$|\bar{x}-x_{n+1}| = |f(\bar{x})-f(x_n)| \leqslant q|\bar{x}-x_n|. \tag{15}$$

Так как $\bar{x}-x_n = (\bar{x}-x_{n+1})+(x_{n+1}-x_n)$ и абсолютная величина суммы не больше суммы абсолютных величин слагаемых, то

$$|\bar{x}-x_n| \leqslant |\bar{x}-x_{n+1}| + |x_{n+1}-x_n|. \tag{16}$$

Учитывая (15), получим: $|\bar{x}-x_n| \leqslant q|\bar{x}-x_n| + |x_{n+1}-x_n|$, откуда

$$|\bar{x}-x_n| \leqslant \frac{1}{1-q}|x_{n+1}-x_n|. \tag{17}$$

Применяя еще раз (15), найдем:

$$|\bar{x}-x_{n+1}| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_{n+1}-x_n|. \tag{18}$$

Формулы (17) и (18) и дают искомые оценки.

Для примера рассмотрим уравнение

$$x = \frac{1}{x+2}. \tag{19}$$

Как мы видели выше, функция $f(x) = \frac{1}{x+2}$ дает сжатое отображение отрезка $[0, 1]$ в себя, причем $q = \frac{1}{4}$. Уравнение (19) имеет единственный корень между 0 и 1 (в этом можно убедиться, например, начертив графики функций $y = x$ и $y = \frac{1}{x+2}$). Положив $x_0 = 0$, найдем последовательно:

$$x_1 = \frac{1}{x_0+2} = 0{,}5; \quad x_2 = \frac{1}{x_1+2} = 0{,}4; \quad x_3 = \frac{1}{x_2+2} = 0{,}416\ldots \approx 0{,}42.$$

Понятно, что с числом 0,42 легче производить вычисления, чем с бесконечной десятичной дробью 0,416... . Поэтому нам выгоднее *назначить* в качестве x_3 не число 0,416..., а число 0,42. Итак, положим: $x_3 = 0{,}42$. (Обратите внимание: это точное, а не приближенное равенство!) Тогда $x_4 = \frac{1}{x_3+2} = 0{,}413\ldots$.

Выясним, какую погрешность мы допустим, если примем в качестве $\bar{x}$ число 0,41. Согласно формуле (18) (при $n = 3$, $q = \frac{1}{4}$) имеем:

$$|\bar{x} - x_4| < \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\,|x_4 - x_3| < \frac{1}{3}\cdot 0{,}007 < 0{,}003.$$

Кроме того, $|x_4 - 0{,}41| = 0{,}003\ldots < 0{,}004$. Поэтому имеем

$$|\bar{x} - 0{,}41| = |(\bar{x} - x_4) + (x_4 - 0{,}41)| \leqslant |\bar{x} - x_4| + |x_4 - \\ - 0{,}41| < 0{,}007.$$

Итак, полагая $\bar{x} = 0{,}41$, мы допускаем погрешность, которая меньше, чем 0,007.

Особенно удобно применить оценку (17) при $q \leqslant \frac{1}{2}$; тогда $1 : (1 - q) \leqslant 2$, и из (17) следует, что

$$|\bar{x} - x_n| \leqslant 2\,|x_{n+1} - x_n|. \qquad (20)$$

Это неравенство указывает способ для вычисления корня $\bar{x}$ уравнения $x = f(x)$ с заданным числом (k) верных десятичных знаков. Мы это будем понимать так: требуется найти число с k десятичными знаками, которое отличается от $\bar{x}$ меньше, чем на *одну единицу* последнего (k-го) разряда, то есть меньше, чем на $\frac{1}{10^k}$.

Разъясним этот способ на конкретном примере.

Пусть нам требуется вычислить корень уравнения $x = \frac{1}{x+2}$ с точностью до 0,001. В данном случае корень $\bar{x}$ — между 0 и 1; $q = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Выбирая, как и выше, нулевое приближение x_0 на $[0, 1]$ (например, $x_0 = 0$), вычислим последовательно x_1, x_2, $x_3\ldots$, и каждый раз, получив какое-либо приближение, мы его округлим, оставляя три десятичных знака. Вычисления будем производить до тех пор, пока два каких-нибудь последовательных приближения x_n и $x_{n+1} = \frac{1}{x_n+2}$ после округления не окажутся одинаковыми. В нашем примере расчет выглядит так:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{x_0+2} = 0{,}500;$$
$$x_1 = 0{,}500, \quad x_2 = \frac{1}{x_1+2} = 0{,}400;$$
$$x_2 = 0{,}400, \quad x_3 = \frac{1}{x_2+2} = 0{,}4163\ldots;$$

После округления положим:

$$x_3 = 0{,}416, \text{ тогда } x_4 = \frac{1}{x_3+2} = 0{,}4143\ldots;$$

После округления положим:

$$x_4 = 0{,}414, \text{ тогда } x_5 = \frac{1}{x_4+2} = 0{,}4142\ldots.$$

Имеем два последовательных приближения: $x_4 = 0{,}414$ и $x_5 = \frac{1}{x_4+2} = 0{,}4142\ldots$, причем после округления x_5 с тремя верными десятичными знаками получим 0, 414, то есть x_4. Оценим разность $|\bar{x} - 0{,}414|$. По формуле (20) имеем:

$$|\bar{x} - 0{,}414| = |\bar{x} - x_4| \leqslant 2|x_5 - x_4| \leqslant 2 \cdot 0{,}0002\ldots < 0{,}001.$$

Иными словами, принимая, что $\bar{x} = 0{,}414$, мы допускаем погрешность, которая меньше, чем 0,001.

Аналогично можно поступить и в общем случае, когда известно, что уравнение $x = f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ единственный корень и что $f(x)$ дает *сжатое* отображение отрезка $[a, b]$ в себя, причем $0 \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}$. Если при этом требуется вычислить корень $\bar{x}$ так, чтобы погрешность была меньше, чем $\frac{1}{10^k}$, то поступают следующим образом.

Отправляясь от какого-либо нулевого приближения x_0, вычисляем последовательные приближения $x_1, x_2, \ldots$, округляя каждый раз полученные приближения по обычным, известным из курса арифметики, правилам и оставляя k десятичных знаков после запятой. Получив на каком-то шаге, что после такого округления число x_{n+1} совпадает с числом x_n, мы принимаем, что $\bar{x} \approx x_n$.

При этом погрешность от замены числа $\bar{x}$ на x_n меньше одной единицы последнего (k-го) разряда числа x_n (то есть меньше, чем $\frac{1}{10^k}$).

В самом деле, в этом случае

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^k}, \tag{21}$$

и в силу формулы (20) имеем:

$$|\bar{x} - x_n| < \frac{1}{10^k}. \qquad (22)$$

Рассмотрим примеры.

7. Вы, разумеется, легко можете вычислить положительный корень уравнения $x = 3 + \frac{1}{x+8}$, пользуясь формулой для корней квадратного уравнения. Ради тренировки вычислите тот же корень способом неподвижной точки с точностью до 0,001.

8. Вычислите положительные корни уравнения $x(x+4)^2 - 2 = 0$ с точностью до 0,001.

9. Вычислите положительные корни уравнения $x(x^2+4) - 1 = 0$ с точностью до 0,001.

10. Напишите уравнение Кеплера при $e = \frac{1}{5}$, $M = 4$. Вычислите его корень с точностью до 0,01.

** **4.** Привлечение *производной* существенно облегчает решение уравнений методом неподвижной точки.

Для успешного применения метода неподвижной точки важно, чтобы отображение некоторого отрезка $[a, b]$ (того отрезка, на котором расположен искомый корень уравнения $x = f(x)$), даваемое функцией $f(x)$, оказалось сжатым. Для выяснения этого приходится (как мы видели раньше) рассматривать всевозможные хорды графика AB функции $y = f(x)$ и оценивать сверху величину $|\mathrm{tg}\,\alpha|$, где α — угол наклона хорды к оси абсцисс. Будем полагать, что график функции $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ не имеет разрывов и изломов.

Достаточно ясно из рисунка 130, что для каждой хорды этого графика (берется для конкретности хорда AB), найдется касательная к графику, которая параллельна этой хорде (причем абсцисса точки касания T заключена между a и b)[1]. Угол наклона такой касательной к оси абсцисс равен углу (α) наклона соответствующей хорды к оси абсцисс. Но известно, что если к линии $y = f(x)$ в точке T (с абсциссой c) проведена касательная и последняя образует с осью абсцисс угол α, то $\mathrm{tg}\,\alpha = f'(c)$.

Таким образом, неравенство $|\mathrm{tg}\,\alpha| \leqslant q$ будет наверняка выполнено, если для всех без исключения чисел c из отрезка $[a, b]$ справедливо неравенство $|f'(c)| \leqslant q$, или — что то же — для всех x из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$|f'(x)| \leqslant q. \qquad (23)$$

Поэтому если окажется, что функция $f(x)$ отображает

---

[1] Конечно, этот факт (в математическом анализе его называют теоремой Лагранжа) нуждается в доказательстве, которое мы здесь опускаем. В ходе доказательства существенно используется то, что функция $f(x)$ имеет производную для каждого x из промежутка (a, b).

отрезок $[a, b]$ в себя и на $[a, b]$ выполняется (23) при некотором q, меньшем, чем 1, то это отображение будет сжатым; для приближенного вычисления искомого корня $\bar{x}$ можно успешно пользоваться формулой (6), а для оценки погрешности—неравенством (17). Проверить выполнение неравенства (23) обычно легче, чем выполнение неравенства (11) или (12).

Рассмотрим пример. При решении задачи 10 мы убедились, что функция $f(x) = e \sin x + M$ $(0<e<1)$ дает сжатое отображение числовой прямой. В этом легче убедиться, если привлечь производную. Действительно, в данном случае $f'(x) = e \cos x$, и при любом x $|f'(x)| \leqslant e < 1$.

11. Вычислить с одним верным десятичным знаком корень уравнения $x = \frac{80}{(x+3)^3}$.

12. (Продолжение задачи 4.) Полагая в задаче 4, что искомый корень принимается равным 0,31, оцените допущенную при этом погрешность. В ходе решения можно воспользоваться формулой для производной от показательной функции: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, где $\ln a$ — натуральный логарифм числа a.

13. Нетрудно найти целочисленный корень уравнения $x^{10} = 10^x$. Убедитесь, что это уравнение имеет еще один положительный корень между 1 и 2; вычислите этот корень с точностью до 0,005.

****5.** Идея метода неподвижной точки (иначе его еще называют «методом сжатых отображений») находит применение во многих отделах математики, в частности при решении так называемых дифференциальных и интегральных уравнений. В общей постановке этот метод был изучен видным польским математиком Стефаном Бáнахом (1892—1945).

Метод неподвижной точки является одним из так называемых итерационных методов решения уравнений. Любой такой метод состоит в том, что каждое последующее приближение (x_n) к искомому корню вычисляется с помощью одного и того же алгоритма (например, с помощью одной и той же формулы) по значению предыдущего приближения (x_{n-1}) или нескольких предыдущих приближений (например, по значениям x_{n-1} и x_{n-2}). Иначе говоря, для нахождения каждого последующего приближения необходимо повторить один и тот же цикл вычислений, но с различными числами. Само слово «итерация» и означает: «повторение», «выполнение того же самого».

Итерационные методы особенно удобны для решения уравнений на быстродействующих вычислительных машинах. Оказывается, что легко составить такую программу для математической машины, по которой машина сама выберет необходимое число циклов и прекратит вычисления, когда получится приближение, которое отличается от точного значения корня меньше, чем на наперед заданную допустимую погрешность.

Среди итерационных методов, отличных от метода неподвижной точки, отметим метод Ньютона. При вычислении корня уравнения $F(x) = 0$ по этому методу последовательные приближения строятся по формуле

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{24}$$

Что касается нулевого приближения, то (как и в методе неподвижной точки) оно выбирается на основании прикидки. Получаемая по формуле (24) последовательность $\{x_n\}$ в важных для практики случаях оказывается сходящейся к искомому корню.

ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ ДЕСЯТИКЛАССНИКОВ

1. ДЕСЯТЬ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Докажите, что если диагональ куба и диагональ его грани не проходят через одну вершину, то они взаимно перпендикулярны.

2. В вершине A куба сходятся, очевидно, три грани. В каждой из них мы отмечаем вершину, противоположную вершине A. Получим точки B, C, D. Чему равен объем тетраэдра $ABCD$, если объем куба равен v?

3. Дубовую треугольную пирамиду распилили на два куска. Плоскость среза отсекает на одном боковом ребре $^1/_4$ ребра (считая от вершины), на другом — $\frac{1}{3}$ (считая от той же вершины), на третьем — $\frac{1}{2}$. Во сколько раз меньший из полученных кусков легче всей пирамиды (весом опилок пренебречь)?

4. а) Как провести плоскость, чтобы в сечении ею правильного тетраэдра образовался квадрат? б) сколько можно провести таких плоскостей?

5. Имеется березовая треугольная пирамида весом в 1 *кг*. Срезом, параллельным основанию, от нее отпилили пирамиду весом в a *кг*. От оставшейся затем усеченной пирамиды срезом, проходящим через вершину меньшего основания и противоположную сторону большего основания, отпилили еще один кусок — тот, который примыкает к меньшему основанию. Докажите, что оба отпиленных куска вместе весят $\sqrt[3]{a}$ *кг*.

6. Имеется тетраэдр, у которого противоположные ребра равны между собой. Вы измерили только боковые ребра. Как вычислить объем тетраэдра?

7. Основанием пирамиды с равными боковыми ребрами служит прямоугольник, стороны которого равны 6 *дм* и 8 *дм*. Высота пирамиды равна 2 *дм*. Вычислите площадь сечения, проведенного через диагональ основания параллельно боковому ребру.

8. Из куба выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено?

9. В однородном шаре диаметром 50 *мм* просверлено цилиндрическое отверстие диаметром 30 *мм*, ось которого совпадает с осью шара. Во сколько раз оставшаяся часть легче самого шара?

10. Четыре шара так лежат на столе, что каждый касается трех остальных и плоскости стола. Три шара имеют радиус R. Найдите радиус четвертого шара.

§ 2. РАЗЫСКАНИЕ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ

В § 10 главы II уже занимались разысканием на плоскости множеств всех точек, обладающих заданными свойствами (иначе говоря, геометрических мест точек). Сейчас мы займемся сходными задачами в трехмерном пространстве.

1. а) Что представляет собой множество всех точек трехмерного пространства, равноудаленных от двух данных точек? б) Сколько существует плоскостей, равноудаленных от двух данных точек?

2. а) Какую фигуру (назовите ее) представляет собой множество всех точек пространства, равноудаленных от двух данных параллельных прямых? б) Сколько существует плоскостей, равноудаленных от двух данных параллельных прямых? Как они располагаются в пространстве?

3. Лампочка висит на расстоянии около двух метров от пола. Считая лампочку точкой, скажите: какую фигуру представляют собой множество всех таких лежащих в плоскости пола точек, которые удалены от лампочки на 3 метра?

4. Найдите множество всех точек пространства, равноудаленных от двух данных точек и в то же время равноудаленных от двух данных параллельных плоскостей.

5. Даны две плоскости α и β. Какую фигуру образует множество всех таких точек, которые на 1 *дм* дальше от плоскости α, чем от плоскости β?

6. Ниже приводим несколько высказываний. Выясните, истинны они или ложны; ошибочные высказывания исправьте: а) «геометрическое место вершин равновеликих пирамид, имеющих одно и то же основание, есть плоскость, параллельная плоскости основания и проходящая через вершину одной из пирамид»; б) «геометрическим местом точек, лежащих в данной плоскости (α) и находящихся на данном расстоянии от другой данной плоскости (β), является пара параллельных прямых, лежащих в плоскости α и параллельных плоскости β»; в) «геометрическое место точек, отстоящих от поверхности данного шара (радиуса r) на данное расстояние l, есть поверхность шара, концентрическая поверхности данного шара и описанная радиусом $r + l$».

7. Однажды путешественник отправился из какой-то точки P, лежащей на поверхности Земли, прошел 100 *км* на север (по меридиану), затем он повернул на восток и, двигаясь по параллели,

прошёл еще 100 *км*, затем он повернул на юг, отшагал по меридиану 100 *км* и оказался в исходной точке P. Что собой представляет множество в с е х таких точек P, которые могли бы быть исходными пунктами такого путешествия? Земля мыслится как идеальный шар.

8. а) В пространстве даны две скрещивающиеся прямые a и b. Какую фигуру образует множество всех таких точек, которые служат серединами отрезков с концами на данных прямых (один конец принадлежит прямой a, второй — прямой b)? б) Пусть AB и CD — два отрезка, принадлежащие скрещивающимся прямым. Какую фигуру образуют все середины отрезков с концами на AB и CD?

9. В механике устанавливается, что однородный материальный шар с центром O и массой M притягивает материальную точку P с массой m с силой, равной

$$f\frac{M\cdot m}{OP^2},$$

где f — некоторое постоянное число (универсальная константа тяготения). Будем ради простоты мыслить Землю и Луну в виде однородных шаров. Несмотря на то, что масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, существуют такие точки в пространстве, что помещенная в них масса будет сильнее притягиваться к Луне, чем к Земле. Множество всех таких точек называется сферой (или областью) притяжения Луны относительно Земли. Образует ли это множество какую-нибудь известную вам фигуру? Как эта фигура расположена в пространстве? Расстояние между центрами Земли и Луны считать равным 384000 *км*.

§ 3. РЕШЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИИ

Многие трудные геометрические задачи на вычисление и на доказательство решаются весьма просто, если применить тригонометрию. Приведем несколько таких задач.

1. Докажите теорему Птолемея (см. главу V, § 6), используя тригонометрию.

2. Докажите теорему Стюарта (см. главу V, § 5).

3. Докажите теорему Брамагупты (индийский математик VI века н. э.): «Если a, b, c, d — стороны вписанного четырехугольника и $2p$ — его периметр, то его площадь равна

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}».$$

4. Докажите: если в четырехугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность, то его площадь равна квадратному корню из произведения четырех его сторон.

5. На каждой стороне $\triangle ABC$, как на основании, построен равносторонний треугольник, не перекрывающийся с треугольником ABC. Докажите, пользуясь тригонометрией, что центры построенных таким образом треугольников являются вершинами равностороннего треугольника. Решите затем ту же задачу без тригонометрии.

§ 4. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ

Геодезические линии, или кратчайшие пути на различных поверхностях, представляют большой практический и теоретический интерес. Основательное изучение таких линий является задачей некоторых разделов высшей математики (дифференциальная геометрия, вариационное исчисление). Но и элементарными средствами можно найти кратчайшие пути на некоторых простых поверхностях (на кубе, параллелепипеде, цилиндре и др.).

Задачи о геодезических линиях иногда наглядно формулируют как «задачи о пауке и мухе» или как «задачи о наиболее экономной электропроводке».

Известно, что кратчайшим путем между двумя точками на плоскости служит прямолинейный отрезок, а на поверхности сферы — дуга большой окружности. Вот несколько задач, в которых требуется найти кратчайшие пути на различных параллелепипедах.

1. Комната имеет форму куба, AC_1— его диагональ. Укажите какой-либо кратчайший путь, ведущий по стенам, потолку или полу от точки A до точки C_1. Сколько существует таких кратчайших путей?

2. Комната имеет форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c $(a \leqslant b \leqslant c)$. AC_1— его диагональ. Найдите длину кратчайшей линии, соединяющей точки A и C_1 и расположенной целиком на гранях этого параллелепипеда.

3. Зал имеет форму прямоугольного параллелепипеда, размеры которого: 12 *м* × 12 *м* × 30 *м*. Точка P на одной квадратной стене — на равных расстояниях от боковых стен и на расстоянии 1 *м* от пола. Точка M на противоположной квадратной стене — также на равных расстояниях от боковых стен и на расстоянии 1 *м* от потолка. Укажите линию длиной 40 *м*, соединяющую точки P и M и целиком расположенную на стенах, потолке и на полу зала.

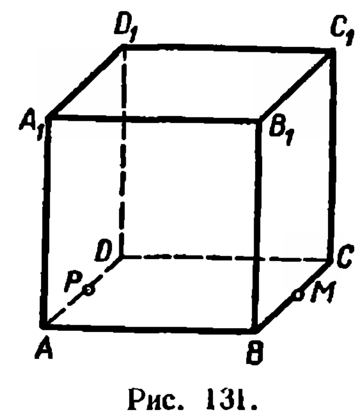


Рис. 131.

4. Стеклянная коробка без крышки имеет размеры 10 *см* $\times$ $\times$ 10 *см* $\times$ 10 *см* (рис. 131). Точка P находится на ребре AD снаружи коробки, причем $AP = PD$, а точка M на ребре BC внутри коробки, причем $CM = MB$. Укажите на поверхности коробки кратчайший путь, ведущий из точки P к точке M.

§ 5. НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

1. Геометрия, которую изучают в школе, называется евклидовой — по имени геометра, который изложил ее в виде единой логической системы.

Евклидова геометрия характеризуется рядом понятий, которые в ней принимаются без определения (они называются основными или первичными; таковы в школьном курсе геометрии понятия «точка», «прямая», «плоскость», «лежит на», «проходит через», «между», «движение») и некоторым списком аксиом, то есть предложений, в которых сказано все, что нам потребуется от этих понятий в ходе рассуждений. Все другие геометрические понятия, кроме первичных, должны обязательно быть определены; все другие утверждения в геометрии, кроме аксиом (и, разумеется, определений), допустимо считать истинными лишь тогда, когда они могут быть доказаны (то есть когда их можно вывести с помощью логически правильных рассуждений из аксиом и определений).

Что касается аксиом, то они являются итогом многолетних наблюдений; в течение этих наблюдений они с достаточной точностью подтверждались на практике. По этой причине мы и разрешаем себе при построении геометрической системы принять эти предложения без доказательства. Но не исключено, что при других условиях нашему опыту и нашим наблюдениям лучше будет соответствовать другая система аксиом. Тогда на основании этой новой системы аксиом должны будем развить другую геометрическую систему.

Каждая система понятий и каждая система аксиом соответствует нашему опыту, нашим наблюдениям лишь *приближенно*. И только опытная проверка может решить, какой из геометрических систем следует отдать предпочтение.

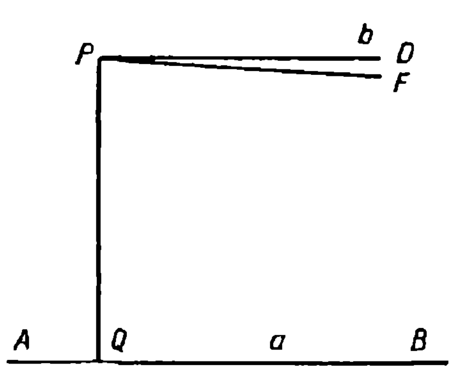


Рис. 132.

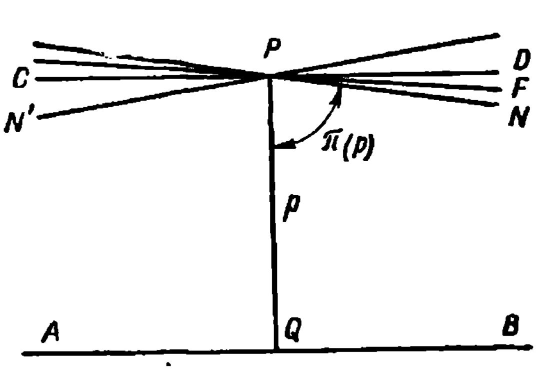


Рис. 133.

Великий русский математик Николай Иванович Лобачевский впервые (в 1826 году) обратил внимание на то, что геометрическая система не является чем-либо незыблемым, что ее можно, в случае необходимости, изменить. В результате получится новая геометрическая система, которая ничуть не уступит по своей логической законченности, по научной строгости своего построения, привычной всем нам, евклидовой геометрии.

Первую неевклидову геометрию построил Н. И. Лобачевский. Для этой цели он сохранил все понятия евклидовой геометрии и все аксиомы, кроме одной: аксиомы о единственности параллельной. Заметим, что примерно одновременно с Лобачевским такую же геометрическую систему построили (независимо от него и друг от друга) Янош Бойяи (Венгрия, 1801—1862) и К. Ф. Гаусс (1777—1855). Впрочем, их работы по этому вопросу были не столь обстоятельными и всесторонними как исследования Лобачевского (работа Бойяи «Аппендикс», то есть «Добавление», появилась в виде небольшого приложения к учебнику по геометрии, изданному его отцом Фаркашем Бойяи; исследования Гаусса вовсе не были опубликованы при его жизни).

2. Итак, вообразим себе временно, что существует участок вселенной, где не верна аксиома о единственности параллельной, а верна совершенно иная аксиома— а к с и о м а Л о б а ч е в с к о г о: *Через любую точку* (P) *вне данной прямой* (a) *в плоскости* (α), *определяемой этой прямой и этой точкой, проходит более чем одна прямая, не пересекающая данную* (рис. 132).

Что касается других евклидовых аксиом, то пусть они там точно выполняются. Прямые будем себе наглядно представлять как лучи света в этой — вообще говоря, оптически неоднородной — среде.

Каковы же будут геометрические свойства этого участка вселенной?

Пусть PQ — перпендикуляр, опущенный из точки P на прямую a. Точка Q разбивает прямую a на два луча: QB и QA. Рассмотрим еще прямую b, проходящую через P перпендикулярно к PQ. Согласно аксиоме Лобачевского в плоскости PQA существует, помимо прямой b, еще хотя бы одна прямая PF, не пересекающая прямую a. Прямая, проходящая через P внутри угла DPF, также не пересечет AB. Итак, некоторые прямые, входящие в угол DPQ через точку P, не пересекают луча QB, другие (например, сама прямая PQ) пересекают луч QB. Отсюда можно заключить, что существует прямая PN (рис. 133), пограничная для прямых того и другого типа: она отделяет те прямые, которые пересекают луч QB, от тех, которые ее не пересекают. Нетрудно доказать, что и *прямая PN не может пересечь луч QB*. Действительно, пусть прямая PN пересекает прямую QB в какой-то точке S. Тогда возьмем на луче QB точку T правее точки S. Луч PT, очевидно, пересекает луч QB (в точке T). С другой стороны, тот же луч лежит в угле DPN и, следовательно, не должен пересечь луч QB. Таким образом, приходим к противоречию. Значит, прямая PN не может пересечь прямую AB.

Прямую PN Лобачевский называет *«прямой, параллельной к прямой AB в направлении QB»*. Аналогичное построение можно провести в угле QPC. Мы получили бы еще прямую PN', отделяющую прямые, пересекающие луч QA, от прямых, не пересекающих QA. Прямую PN' Лобачевский называет «прямой, параллельной к AB в направлении QA».

Итак, первым следствием из аксиомы Лобачевского служит следующее предложение: *Через точку P вне данной прямой* (a) *в плоскости* (α), *определяемой этой прямой и этой точкой*, проходит пучок прямых, *не пересекающих данную прямую* (a).

Правда, этот пучок может быть очень узким, например угол между перпендикуляром PQ к прямой AB и параллелью PN может отличаться от прямого на одну миллионную долю секунды.

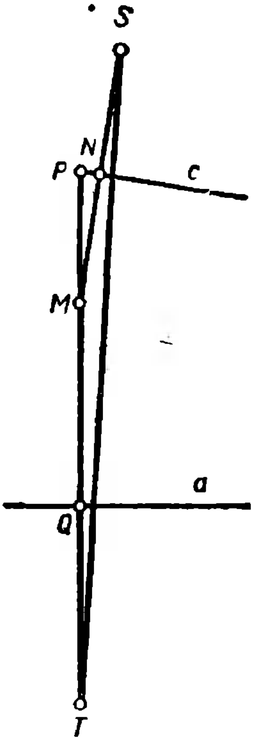


Рис. 134.

В качестве следствия выведем из аксиомы Лобачевского такое предложение: *Не около всякого треугольника можно описать окружность*. Действительно, пусть a (рис. 134) — какая-либо прямая. P — произвольная точка вне этой прямой, и c — прямая, проходящая через P и параллельная прямой a. На отрезке PQ ($PQ \perp a$) выберем произвольную точку M, опустим из нее перпендикуляр MN на прямую c и продолжим его на отрезок $NS = MN$. Перпендикуляр PQ продолжим на отрезок $QT = MQ$. Рассмотрим $\triangle MST$. Если бы около этого треугольника можно было описать окружность, то ее центр должен был бы лежать и на прямой a, и на прямой c, а такой точки нет, так как прямые a и c не пересекаются. Следовательно, около $\triangle MST$ невозможно описать окружность.

Несколько более громоздкими рассуждениями, но тоже элементарно можно доказать, что в геометрии Лобачевского справедливы такие предложения:

Сумма углов всякого треугольника отлична от 180° (она меньше 180°).

Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то и соответственные стороны у них равны.

В геометрии Лобачевского нет четырехугольников с четырьмя прямыми углами (то есть прямоугольников). В частности, там нет и квадратов.

Назовем *дефектом* треугольника ABC отклонение суммы его углов от 180°, то есть величину

$$D = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \tag{1}$$

(α, β, γ — меры углов в радианах).

Оказывается, что площадь (S) треугольника в геометрии Лобачевского пропорциональна его дефекту:

$$S = K \cdot D. \tag{2}$$

Лобачевский рассматривал острый угол, образованный перпендикуляром PQ к прямой AB и прямой PN, параллельной прямой AB (рис. 133).

Введем обозначения: $PQ = p$, $\angle QPN = \pi(p)$. Угол $\pi(p)$ Лобачевский называл «углом параллелизма». Он показал, что

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi(p) = e^{-\frac{p}{k}},$$

где $e \approx 2{,}7182\ldots$ и k—некоторая константа ($k > 0$). Если в этой формуле k велико, а p мало, то $e^{-\frac{p}{k}} \approx 1$, $\frac{1}{2}\pi(p) \approx \frac{\pi}{4}$, $\pi(p) \approx \frac{\pi}{2}$ (радиан).

При $k \to \infty$ $\pi(p) \to \frac{\pi}{2}$. Можно показать, что $K = k^2$. Из (2) видно, что при больших k и малых S имеем $D \approx 0$, то есть (см. (1)) сумма углов треугольника близка к $180°$. Таким образом *геометрию Евклида можно рассматривать как предельный случай геометрии Лобачевского.* Если k велико и размеры фигур, с которыми приходится иметь дело, достаточно малы, то результаты, получаемые в геометрии Лобачевского, практически не будут отличаться от результатов, даваемых геометрией Евклида. Разница будет лишь в том, что вычисления по формулам геометрии Лобачевского более громоздки, чем по формулам геометрии Евклида.

Гаусс и Лобачевский пытались путем измерений выяснить, какая же геометрическая система точнее отражает свойства реального мира. С этой целью они измерили сумму углов космического треугольника, имеющего вершинами две диаметрально противоположные точки земной орбиты и одну звезду. Хотя сумма углов оказалась неравной 180°, но отклонение от 180° было в пределах той точности, которые давали инструменты наблюдений. Таким образом, эксперимент не позволил дать ответ на поставленный вопрос.

Мало кто из современников понял глубокие идеи Н. И. Лобачевского. Его ценили как большого знатока математики, как прекрасного преподавателя, как великолепного организатора (он в течение многих лет был ректором Казанского университета), но научные идеи Лобачевского не были поняты его современниками. Только после смерти Лобачевского его идеи увлекли многих видных математиков (Бельтрами, Клейна, Пуанкаре́, Гильберта и других) и привели к более тщательному пересмотру и более глубокому осмысливанию всей геометрии.

3. Геометрию Лобачевского можно осуществить и в образах евклидовой геометрии. Вот одна из таких возможностей, на которую обратил внимание известный французский математик Анри Пуанкаре (1856—1912).

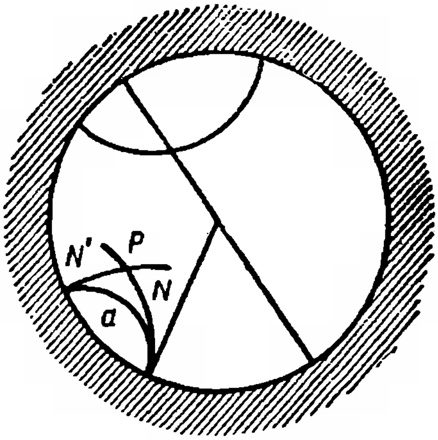


Рис. 135.

Для простоты ограничимся лишь *планиметрией* Лобачевского. Вообразим себе такую картину. Пусть где-то, в далекой от нас области космоса живут разумные существа; допустим, что они занимаются геометрией лишь на плоскости. Плоская область, которая им доступна, представляет собой круг громадного радиуса, скажем в 1 миллион километров (рис. 135). Эта область неоднородна в оптическом отношении: чем ближе к граничной окружности, тем среда плотнее, тем медленнее распространяется свет в этой среде. Пусть известно, что скорость распространения света в этой области пропорциональна расстоянию от границы области.

Разумные существа, естественно, считают «прямыми линиями» те линии, по которым распространяются световые лучи. (Можно доказать, что на самом деле это будут дуги окружностей, пересекающих граничную окружность под прямым углом, а также диаметры этой окружности.) «Точками» они называют только точки той круговой области, которая им доступна (о существовании других точек они и не подозревают).

Расстояние между двумя точками *A* и *B* эти существа измеряют тем временем, которое потратит световой луч на прохождение от *A* до *B*; два расстояния они считают равными, если на их прохождение световой луч затратит одно и то же время.

Оказывается, что таким образом выбранные «точки» и «прямые» удовлетворяют всем аксиомам планиметрии Лобачевского.

4. Вскоре после смерти Лобачевского было замечено, что существует такая поверхность, на которой выполняется планиметрия Лобачевского. Чтобы рассказать, как образуется эта поверхность, обратимся к такой картине.

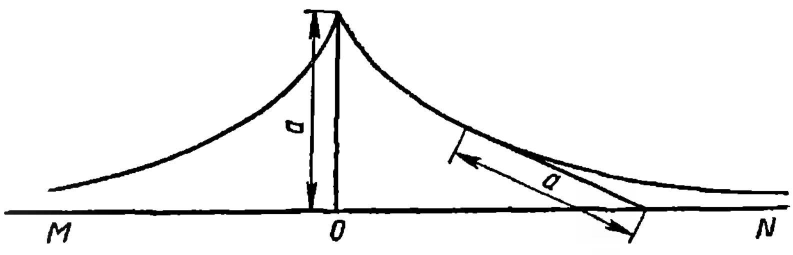


Рис. 136.

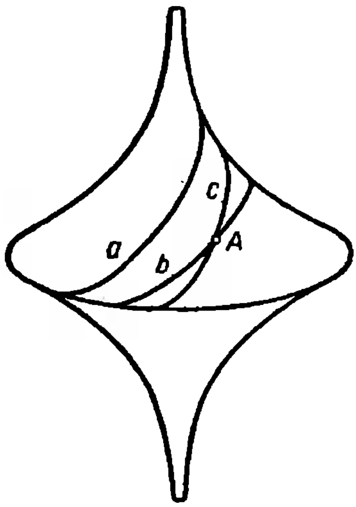


Рис. 137.

Рассмотрим сначала на обычной евклидовой плоскости какую-либо прямую MN и точку C вне ее (рис. 136). Из точки C опустим перпендикуляр CO на MN. Теперь вообразим себе, что в точке O находится охотник, в точке C — его собака. Пусть охотник шагает по прямой MN, а его собака следует за ним, оставаясь все время на одном и том же отдалении от него, равном $a = CO$.

Когда охотник будет в своем движении описывать прямую MN, его собака опишет некоторую линию, которая называется линией преследования или (по-латыни) трактриссой.

Нарисовав трактриссу, будем ее вращать вокруг прямой MN. Тогда трактрисса опишет некоторую поверхность (рис. 137), которая называется псевдосферой («мнимая сфера»).

Среди разнообразных линий на псевдосфере выберем «линии кратчайших расстояний» (напомним, что линиями кратчайших расстояний на плоскости служат прямые, а на сфере — большие окружности).

Если такие линии на псевдосфере называть «прямыми», а под «точками» понимать точки на псевдосфере, то можно убедиться, что на этой поверхности выполняется планиметрия Лобачевского.

5. После Лобачевского были созданы и многие другие неевклидовы геометрические системы. Так, известный немецкий математик Бернгард Риман (1826—1866) принял вместо аксиомы о единственности параллельной другую аксиому: любые две прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются.

Чтобы это допущение не привело к логическому противоречию, Риману потребовалось отказаться и от некоторых других аксиом евклидовой геометрии, например от аксиомы «Из трех точек, лежащих на одной прямой, одна и только одна лежит между двумя другими». (Прямые в геометрии Римана оказываются замкнутыми линиями, вроде окружностей в геометрии Евклида.)

В результате он получил новую геометрическую систему. Моделью планиметрии Римана может служить сферическая геометрия (если условиться под «прямыми» понимать большие окружности на сфере, а каждую пару диаметрально противоположных точек сферы считать за одну точку).

В геометрии Римана сумма углов любого треугольника оказывается больше 180°. Эта сумма углов растет с увеличением площади треугольника. В каждом таком треугольнике длины сторон вполне определены, если заданы углы треугольника; подобных треугольников не существует.

6. Идея Лобачевского о возможности создания новых геометрических систем, отличных от геометрии Евклида, произвела огромное впечатление на математиков последнего столетия. Она дала толчок к тому, чтобы были пересмотрены логические основы элементарной геометрии; вследствие этого в конце XIX века, через 22 столетия после Евклида, удалось изложить этот раздел математики на значительно более высоком уровне научной строгости, чем это делалось раньше.

Изобретение неевклидовой геометрии имело большое философское значение: оно показало, что ошибочен взгляд философов-идеалистов, считавших, что существуют истины, которые присущи нашему сознанию до всякого опыта, и приводивших в качестве примеров таких истин аксиомы евклидовой геометрии.

Создание неевклидовой геометрии оказало большое влияние на развитие физики. Неевклидовы геометрии оказались полезным аппаратом при создании новых важных физических теорий, среди которых в первую очередь следует назвать общую теорию относительности А. Эйнштейна.

Глава XII

ТРИГОНОМЕТРИЯ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

В этом параграфе даны несколько задач, решение которых опирается на формулы сложения и их следствия (формулы преобразования произведений синусов и косинусов в алгебраические суммы, формула для синуса двойного угла и др.).

1. Вычислите: а) $\sin 20° \cdot \sin 40° \cdot \sin 60° \cdot \sin 80°$;

б) $\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80°$.

2. Упростите следующие выражения:

а) $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \ldots + \sin 100\alpha$;

б) $\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos (2n - 1)\alpha$.

3. Решите уравнение $\sin 3x \cdot \sin 5x = \sin 7x \cdot \sin 9x$.

4. Используя формулу $\cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$, вычислите следующие выражения:

а) $\cos 12° \cdot \cos 24° \cdot \cos 48° \cdot \cos 96°$; б) $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}$;

в) $\cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15}$.

5. Инженер планирует полет космического корабля с орбиты Земли к орбите Венеры. Требуется, чтобы корабль прошел через заданную точку P_0 на орбите Земли (если S — Солнце, то $SP_0 = R_З = 150 \times 10^6$ *км*) и через заданную точку P_1 на орбите Венеры ($SP_1 = R_B = 108 \times 10^6$ *км*). Угол P_0SP_1 задан, он равен $\gamma = 120°$. Примерный вид орбиты ко-

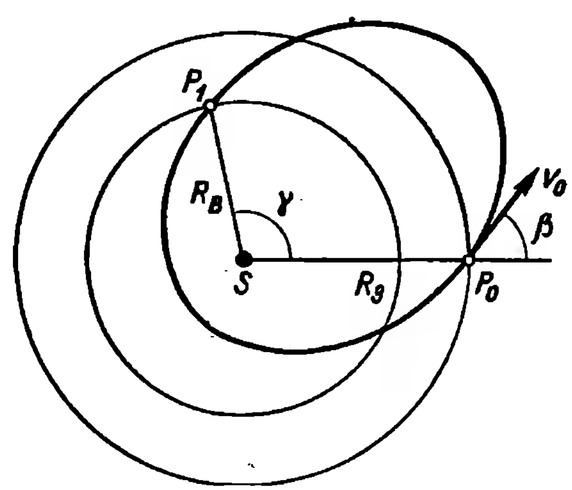


Рис. 138.

рабля и направление полета корабля указаны на рисунке 138. Из справочных книг по космонавтике инженер нашел, что для совершения такого полета корабль должен получить в точке P_0 скорость, определяемую формулой

$$V_0^2 = \frac{2K(1-\cos\gamma)}{R_з\left[\left(\frac{R_з}{R_B}-\cos\gamma\right)(1-\cos 2\beta)+\sin\gamma\sin 2\beta\right]}, \qquad (1)$$

где K — константа ($K = 1325 \cdot 10^8$ *км³/сек²*), β — угол между радиусом-вектором SP_0 и вектором скорости корабля v_0 в точке P_0. Что касается угла β, то инженер намерен его выбрать таким образом, чтобы перелет был совершен при минимальном значении скорости v_0 (ведь чем меньше скорость v_0, сообщаемая кораблю, тем меньше потребуется топлива для получения этой скорости). Таким образом, перед инженером возникает математическая задача: каким должен быть угол β для того, чтобы скорость v_0, определяемая формулой (1), была минимальной? Чему должна быть равна эта минимальная скорость?

Как решить эту задачу?

6. В одном параллелограмме были измерены две смежные стороны (a и b) и угол между его диагоналями φ. Чему равна его площадь?

7. Внутри острого угла, содержащего φ градусов, взята точка P. Известны ее расстояния a и b до сторон угла. Чему равно ее расстояние до вершины угла?

8. Расстояние от Земли до Луны впервые вычислил французский астроном Лаланд в 1752 году. Для этой цели им были выбраны два пункта, Берлин и Капштадт (ныне город Кейптаун в Южно-Африканской Республике), расположенные на одном меридиане. Широта Берлина $\varphi = 52°31'$ северной широты, широта Капштадта $\psi = 35°56'$ южной широты. В каждом из этих пунктов в один и тот же день — в момент прохождения Луны через меридиан (то есть в тот момент, когда Луна занимала самое высокое положение над горизонтом) был измерен угол между направлением на Луну и направлением на зенит. В Берлине этот угол оказался равным $\gamma = 32°03'$, в Капштадте он был равен $\delta = 58°40'$. Радиус Земли известен: $R = 6370$ *км*. Как определить по этим данным расстояние от Земли до Луны?

§ 2. АРКФУНКЦИИ

1. Ученик говорит: «Функция $\operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π: $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$. Поэтому $\operatorname{arctg}(x+\pi) = \operatorname{arctg} x$, то есть $\operatorname{arctg} x$ — периодическая функция с периодом π». Верно ли это?

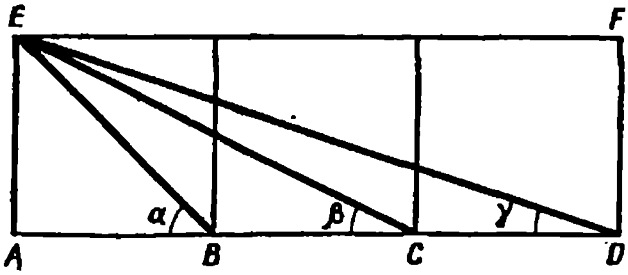


Рис. 139.

2. «$\cos(-x) = \cos x$, поэтому $\arccos(-x) = \arccos x$, то есть функция $\arccos x$ четная». Верно ли это?

3. Возможны ли равенства: а) $\arccos x = -3$; б) $\arcsin x = -3$; в) $\operatorname{arctg} x = -3$?

4. Ученик пишет: «$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Поэтому $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arc}\frac{\sin x}{\cos x}$». Можно ли так писать?

5. Пусть $\operatorname{tg}\alpha = x$. Можно ли утверждать, что $\alpha = \operatorname{arctg} x$?

6. В одном сборнике задач по тригонометрии требуется доказать, что

$$\operatorname{arcctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arcctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

Справедливо ли такое равенство?

7. Вычислите $\operatorname{arcctg}(-2) + \operatorname{arcctg}(-3)$.

8. Вычислите $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$, если $x > 1$.

9. Три квадрата расположены так, как указано на рисунке 139. Точка E соединена с B, C, D. Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

а) Решите сначала задачу, применяя тригонометрию. Как можно записать доказываемое равенство с помощью аркфункций?

б) Решите ту же задачу чисто геометрически (для этой цели проведите дополнительное построение).

10. Для вычисления числа π со 100 000 десятичными знаками воспользовались следующим тождеством, найденным астрономом Штермером еще в студенческие годы:

$$\pi = 24\operatorname{arctg}\frac{1}{8} + 8\operatorname{arctg}\frac{1}{57} + 4\operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

Докажите тождество Штермера.

§ 3. ПРОШЛОЕ И НАСТОЯЩЕЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Комплексные числа возникли в математике более 400 лет назад в связи с решением некоторых задач алгебры, и прежде всего, в связи с решением уравнений *третьей степени*. Правда, впервые столкнулись с квадратными корнями из отрицательных чисел раньше — при решении *квадратных* уравнений. Решая наугад взятое квадратное уравнение с вещественными коэффициентами

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

по известной формуле, математики сталкивались с таким курьезным случаем, что формула приводила к числам вида $a + b\sqrt{-1}$, где a, b — вещественные числа. А что такое $\sqrt{-1}$, какой смысл следует придавать этому выражению, никто не знал.

Однако из этого затруднения выход был нетруден: просто объявлялось, что выражение $\sqrt{-1}$ (или квадратный корень из любого другого отрицательного числа) не имеет смысла, что такие выражения — это «чисто софистические величины», что это «ложные числа» и что квадратное уравнение, при решении которого (по известной формуле) появляются выражения вида $\sqrt{-1}$, следует считать не имеющим решений. Не представляло большого труда доказать, что в таком случае на самом деле левая часть уравнения (1) не может обращаться в нуль ни при каком (вещественном) значении числа x. Значительно больше беспокойства принесли математикам корни из отрицательных чисел в связи с решением *кубических* уравнений.

В начале XVI столетия несколько итальянских математиков (Сципион дель Фёрро, Николай Тарта́лья, Иероним Карда́н) научились решать уравнения третьей степени. В учебнике по алгебре, который был издан Карданом в 1545 году под названием «Великое искусство в вопросах алгебры», по существу, уже содержалась формула для корней уравнения третьей степени. Вот как выглядит эта формула в современных обозначениях: корни уравнения

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (2)$$

могут быть выражены через его коэффициенты следующим образом:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \qquad (3)$$

где

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

И эта формула давала осечку как раз в том случае, когда у уравнения (2) имеются три различных вещественных корня: в этом случае D оказывается отрицательным, под радикалами появляются квадратные корни из отрицательных чисел. Вот один числовой пример:

$$x^3 - 21x + 20 = 0$$

имеет три вещественных корня: 1, 4 и —5 (в этом можно убедиться непосредственной проверкой). Если бы мы попытались найти корни этого уравнения по формуле (3), то мы получили бы:

$$x = \sqrt[3]{-10+\sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10-\sqrt{-243}}.$$

Математики XVI столетия затруднялись понять, каким же образом можно из этой формулы извлечь числа 1, 4 и —5.

Таким образом, для того чтобы с помощью формулы Кардана решать любые кубические уравнения, математикам *необходимо* было научиться обращаться с числами вида $a+b\sqrt{-1}$ (где a и b — вещественные) и, в частности, извлекать из таких чисел кубические корни.

Вскоре после выхода книги Кардана один молодой итальянец по фамилии Ферра́ри, ученик Кардана, нашел способ решения любого уравнения четвертой степени, причем поиск корня сводился опять-таки к решению некоторого кубического уравнения, и опять потребовалось умение извлекать кубические корни из выражений вида

$$a+b\sqrt{-1}.$$

Математики крайне неохотно шли на рассмотрение комплексных чисел. Эти числа называли мнимыми (Декарт), несуществующими, воображаемыми, невозможными, «чисто софистическими» (то есть «возникшими от избыточного мудрствования»). Считалось очевидным, что они не имеют никакого реального содержания. Даже крупнейшие математики XVII—XVIII веков с недоверием и удивлением относились к комплексным числам. Леонард Эйлер (1707—1783), который блестяще применял комплексные числа, тем не менее писал: «Квадратные корни из отрицательных чисел —ввиду того, что они не больше, не меньше и не равны нулю, — не могут быть причислены к возможным числам». Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) называл комплексные числа «изящным и чудесным убежищем божественного духа», «выродком мира идей, почти двойственным существом, находящимся между быть и не быть»; он даже завещал начертать на своей могиле знак $\sqrt{-1}$ как символ потустороннего мира.

А между тем эти «воображаемые», «мнимые», «невозможные» числа все настойчивее стучались в двери математической науки.

Так, оказалось, что если разрешить себе пользоваться этими числами, то легко вычислить различные суммы, например[1]:

$$1+C_n^1\cos\alpha+C_n^2\cos 2\alpha+\ldots+C_n^n\cos n\alpha.$$

А без комплексных чисел вычислить такие суммы значительно труднее. Было замечено, например, что с помощью комплексных чисел легко выразить $\cos n\alpha$ в виде полинома от $\cos\alpha$. С помощью комплексных чисел удавалось вычислить различные выражения, встречающиеся в дифференциальном и интегральном исчислении.

---

[1] О смысле выражения C_n^k см. сноску на стр. 283.

Эйлер, Муавр, Лаплас и другие математики XVIII столетия нашли большое число разнообразных приложений комплексных чисел.

Один из трудных вопросов, интересовавших математиков в XVII—XVIII веках, состоял в следующем: сколько корней может иметь алгебраическое уравнение n-й степени, то есть уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 ? \qquad (4)$$

Если ограничиться *вещественными* корнями, то можно лишь утверждать, что их не больше, чем n. А вот если привлечь комплексные числа, то ответ на поставленный выше вопрос получается исчерпывающий: корней у уравнения (4) всегда имеется ровно n[1].

Только в самом конце XVIII и в начале XIX века К. Ф. Гауссом и несколькими другими математиками были найдены возможные геометрические толкования комплексных чисел (как точек или как векторов на плоскости). Вскоре после этого ирландским математиком Гамильтоном была построена логически строгая и ясная теория комплексных чисел. По Гамильтону, комплексные числа — это па́ры вещественных чисел, взятых в определенном порядке, причем заданы правила, позволяющие выполнять арифметические действия над такими парами. Мнимая единица i — это тоже пара вещественных чисел, а именно пара

$$(0,1).$$

Убедившись, что «мнимые» числа имеют такое же реальное содержание, как и вещественные числа, Гаусс заметил, что крайне неудачно называть их мнимыми, а следует дать им другое название. Гаусс предложил называть их «комплексными числами». Это название и сохранилось поныне.

В течение последних двухсот лет комплексные числа и комплексные функции[2] нашли многочисленные и совершенно неожиданные приложения.

Еще в середине XVIII столетия Эйлер (1755) и французский математик Даламбер (1752) обнаружили, что выгодно привлекать комплексные функции к изучению плоских течений жидкости; при этом особый интерес представляют так называемые аналитические функции, то есть такие, которые могут быть для каждого z из некоторой области заданы бесконечным рядом вида $a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \ldots + a_n(z-c)^n + \ldots$ (числа c, a_0, a_1, a_2, ... — постоянные).

Через четверть века Эйлер (1777) и французский математик Лагранж (1779) стали привлекать комплексные функции к решению задачи о построении географических карт. Уже давно известно, что нельзя нарисовать такую карту земной сферы, чтобы любым равным расстояниям на сфере соответствовали равные расстояния на

---

[1] Разумеется, если каждый кратный корень считать столько раз, какова его кратность.

[2] То есть такие функции, у которых и значения аргумента и значения функции являются комплексными числами.

карте; иначе говоря, каждая карта земного шара дает некоторые искажения расстояний. Для практики особенно ценны такие карты, которые отображают земную сферу к о н ф о р м н о , то есть с сохранением углов между соответствующими линиями (таковы, например, карты, построенные по способу Меркатора и пользующиеся большой популярностью у мореплавателей). Оказывается, что с помощью функций комплексного переменного можно получить многочисленные способы построения карт, обладающих свойством конформности.

Уже в нашем столетии функции комплексного переменного применялись советскими математиками и механиками Н. Е. Жуковским, С. А. Чаплыгиным, В. В. Голубевым, М. В. Келдышем и другими к теории самолета.

Советские математики Г. В. Колосов и Н. И. Мусхелишвили впервые стали применять комплексные переменные к расчету различных конструкций на прочность. Эти методы получили затем дальнейшее развитие в работах их многочисленных последователей.

Если учесть важность аппарата комплексных переменных для механики, то становится понятным, почему такие крупнейшие наши ученые-механики, как академики М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, Н. И. Мусхелишвили, Л. И. Седов и другие одновременно являются крупнейшими специалистами по теории функций комплексного переменного.

Еще в юности Гаусс привлек комплексные числа к решению задачи о возможности построения правильного многоугольника с помощью циркуля и линейки.

Комплексные числа были использованы в разнообразных исследованиях по теории чисел. Например, с помощью комплексных чисел было доказано, что число π является трансцендентным, то есть не может оказаться корнем никакого алгебраического уравнения с целыми или рациональными коэффициентами.

Вы, возможно, слышали о так называемой «последней» теореме Ферма. Французский математик Пьер Ферма́ (1601—1665) утверждал, что при натуральном $n \geqslant 3$ нельзя подобрать три натуральных числа x, y, z так, чтобы выполнялось равенство $x^n + y^n = z^n$. В общем случае эта теорема до сих пор никем не доказана. Но для большого числа номеров n (в частности, для всех n, меньших 600) она доказана, и это удалось сделать немецкому математику Куммеру, используя целые комплексные числа (то есть числа вида $a + bi$, где a и b — целые).

К решению труднейших проблем теории чисел применили комплексные переменные известные советские математики И. М. Виноградов, А. О. Гельфонд и другие.

Широкое применение нашли комплексные переменные в электротехнике, в теории фильтрации почв, в теоретической физике.

Особое значение имеют комплексные числа при изучении движения естественных и искусственных небесных тел. Приведем два примера.

Одна из труднейших задач небесной механики — это «задача о трех телах». Как будут двигаться три небесных тела под действием их взаимного притяжения? Эта задача долго не поддавалась решению. Первое ее решение нашел финский математик Карл Зундман (1913) с помощью комплексных переменных. Правда, результаты Зундмана требуют еще значительного усовершенствования для того, чтобы их сделать удобными для практических приложений.

А вот другой пример. Одна из важных задач, вставшая при подготовке запусков первых искусственных спутников, состояла в следующем: как будет двигаться спутник под влиянием тяготения к *сплюснутому* сфероиду? (Как известно, именно такую форму имеет земной «шар»: этот «шар» несколько сплюснут у полюсов, его полярный диаметр примерно на 42 километра меньше экваториального диаметра). Было предложено несколько способов решения этой задачи, и одним из самых эффективных оказался способ, использующий *комплексные переменные* и принадлежащий советским ученым Е. П. Аксенову, Е. А. Гребеникову и В. Г. Демину.

§ 4. АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1. Разложите на целые рациональные множители многочлен $a^2 + b^2$.

2. Вычислите произведение $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{100}$.

3. Комплексное число $a + bi$ представлено в тригонометрической форме: $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, причем $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Верно ли, что $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$?

4. Очевидно, что $i^{21} = (i^4)^{\frac{21}{4}} = 1^{\frac{21}{4}} = 1$. Но, с другой стороны, $i^{21} = (i^4)^5 \cdot i = 1 \cdot i = i$. Следовательно, $i = 1$! В чем ошибка?

5. Пусть m и n — целые числа. Будет ли число $|(m + ni)^2|$ действительным? целым? натуральным?

6. Укажите способ, как найти бесконечно много троек целых чисел x, y, z, удовлетворяющих одному из следующих условий: а) $x^2 + y^2 = z^2$, б) $x^2 + y^2 = z^3$, в) $x^2 + y^2 = z^k$ (k — натуральное).

7. Докажите, что $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ можно представить в виде суммы двух точных квадратов (a, b, c — целые числа).

8. Докажите, что произведение нескольких целых чисел, каждое из которых можно представить в виде суммы двух точных квадратов, можно представить в виде суммы двух точных квадратов.

9. Решите уравнение $\frac{x+yi}{x-yi}=x^2+y^2$ (x и y — действительные числа).

10. а) Существуют ли два неравных числа, каждое из которых равно квадрату другого? б) Назовите два неравных числа, каждое из которых было бы равно кубу другого.

11. Пусть число $z=a+bi$ не является действительным отрицательным числом; $\arg z$ — главное значение его аргумента (то есть тот из его аргументов, который заключен между $-\pi$ и π). Докажите, что

$$\arg z = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}.$$

§ 5. ГЕОМЕТРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

При рассмотрении геометрических задач на плоскости (на вычисление или доказательство) нередко удается легко получить решение, если воспользоваться комплексными числами. Вот какие сведения в этом случае особенно полезны.

I. Каждому комплексному числу $z=x+yi$ соответствует единственная точка на плоскости, а именно — точка Z с координатами (x, y), и наоборот.

При этом комплексное число z, соответствующее данной точке Z, называется **комплексной координатой** этой точки[1].

Вместо того чтобы говорить: «точка с комплексной координатой $x+yi$», можно говорить короче: «точка $x+yi$».

Имея в виду указанное соответствие, можем кратко сказать: «комплексное число — это точка на плоскости».

1. а) Квадрат, сторона которого равна 10 единицам, расположен на плоскости так, что его центром служит нулевая точка комплексной плоскости, а его стороны параллельны координатным осям. Каковы комплексные координаты вершин квадрата?

б) Точка A имеет комплексную координату $2+3i$. Каковы комплексные координаты точек B, C, D, E, симметричных точке A относительно действительной оси, относительно мнимой оси, относительно начала координат, относительно биссектрисы первого квадранта, относительно биссектрисы второго квадранта?

II. Каждое комплексное число $z=x+yi$ можно изобразить на плоскости еще и в виде вектора $\vec{z}$, соединяющего начало координат с точкой, изображающей число z. Важно для приложений и то обстоя-

---

[1] В «Ответах» и «Решениях» мы без особых оговорок будем обозначать точку и ее комплексную координату одной и той же буквой, но точку прописной, а ее координату — строчной. Например, a_3 будет обозначать комплексную координату точки A_3.

тельство, что не только этот вектор, но и *любой*, равный ему вектор, изображает *то же самое* комплексное число z; комплексное число z, соответствующее какому-нибудь вектору, можно назвать комплексной координатой этого вектора.

Можно короче сказать: «комплексное число — это вектор на плоскости».

2. Пусть на комплексной плоскости изображены две точки A и B с комплексными координатами a и b. Какое комплексное число изображается вектором $\overrightarrow{AB}$? Выразите длину вектора $\overrightarrow{AB}$ через числа a, b. Какую комплексную координату имеет середина отрезка AB?

III. Каждое комплексное число $z = x + iy$ можно записать в «тригонометрической форме»:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Для практики удобно записывать выражение $\cos\varphi + i\sin\varphi$ короче, а именно это выражение обозначают так:

$$e^{i\varphi}.$$

Иначе говоря, п о о п р е д е л е н и ю выражение $e^{i\varphi}$— это только сумма $\cos\varphi + i\sin\varphi$, сокращенная запись этой суммы — и ничего больше:

$$e^{i\varphi} \equiv \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (1)$$

Например, $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$.

Пользуясь обычными правилами умножения комплексных чисел и формулами тригонометрии, легко показать, что

$$e^{i\varphi}\cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)} \qquad (2)$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} \text{ (при любом } \textit{целом } n). \qquad (3)$$

Формула (3) называется ф о р м у л о й М у а в р а.

3. а) Вычислите сумму

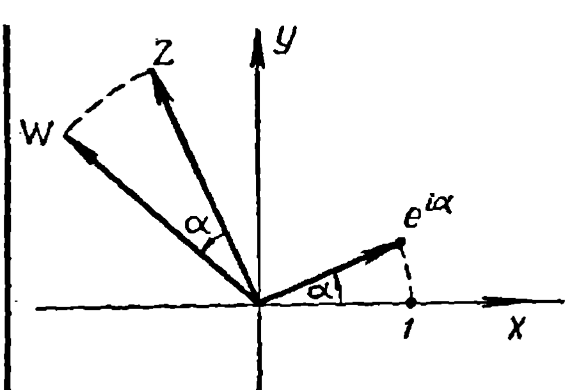


Рис. 140

$$S = 1 + \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos 3\alpha}{\cos^3\alpha} + \dots + \frac{\cos n\alpha}{\cos^n\alpha}.$$

б) Используя формулу Муавра, решите задачу № 14 из § 2 главы X.

IV. Сопоставим векторы

$$z \text{ и } w = e^{i\alpha}\cdot z.$$

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $e^{i\alpha}\cdot z = r[\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)]$.

Отсюда видно, что вектор $e^{i\alpha} z$ (рис. 140) получается из вектора z поворотом вокруг начала вектора z на угол α (поворот производится против часовой стрелки, если $\alpha > 0$, и по часовой стрелке, если $\alpha < < 0$). Поэтому говорят, что *комплексное число* $e^{i\alpha}$ — это **оператор поворота на угол** α.

В частности, число i, которое можно записать в виде $e^{i\frac{\pi}{2}}$, есть оператор поворота на прямой угол в направлении, противоположном движению часовой стрелки.

Уже этих простых сведений достаточно, чтобы успешно применить комплексные числа к решению геометрических задач.

4. Квадрат $A'_1A'_2A'_3A'_4$ образован из квадрата $A_1A_2A_3A_4$ следующим образом: квадрат $A_1A_2A_3A_4$ с помощью центрально-подобного преобразования растягивается от центра O и затем поворачивается относительно точки O на какой-то угол. Проверьте, что середины B_1, B_2, B_3, B_4 отрезков $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$, $A_4A'_4$ тоже служат вершинами некоторого квадрата.

5. На сторонах треугольника построили квадраты, не имеющие с треугольником общих внутренних точек. Докажите, что отрезок, соединяющий центры квадратов, построенных на боковых сторонах, равен отрезку, соединяющему вершину треугольника с центром квадрата, построенного на основании. Под каким углом пересекаются эти отрезки?

6. На сторонах плоского четырехугольника вне его построены квадраты. Центры квадратов, построенных на противоположных сторонах, соединены отрезками. Докажите, что образовавшиеся таким образом два отрезка взаимно перпендикулярны и равны по длине.

7. Какую линию образует на комплексной плоскости множество всех точек z, для которых

а) $|z| = 1$; б) $|z| = R$?

8. Докажите: если $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, то

$$e^{i\beta} - e^{i\alpha} = |e^{i\beta} - e^{i\alpha}| \cdot ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

9. В единичную окружность вписан треугольник; его вершины имеют комплексные координаты a, b, c; $\arg a < \arg b < \arg c$. Докажите, что его площадь S равна

$$\frac{i}{4} \cdot \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a \cdot b \cdot c}.$$

10. В точках A и B единичной окружности были проведены к ней касательные, которые пересеклись в точке C.

Докажите, что комплексные координаты a, b, c точек A, B, C связаны зависимостью

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

(иначе говоря, c — среднегармоническое чисел a и b).

11. Возьмем два экземпляра комплексной плоскости: на одной будем изображать точки z (и назовем ее «z-плоскостью»), на другой—точки w (ее назовем «w-плоскостью»). Затем рассмотрим функцию

$$w = z^2. \tag{4}$$

а) Какие точки плоскости w соответствуют точкам

$$z = 0,\ z = 1,\ z = i,\ z = -2?$$

б) Во что преобразует функция (4) положительный луч вещественной оси (то есть какое множество точек сопоставляется этому лучу в w-плоскости)? Если точка z перемещается по этому лучу, то что при этом опишет соответствующая точка w?

в) Во что преобразует функция (4) три остальных луча координатных осей, исходящих из начала координат?

г) Во что преобразует та же функция (4) луч, исходящий из начала координат и наклоненный к вещественной оси под углом $\frac{\pi}{4}$ радиан?

д) Пусть луч, l_α, наклоненный к вещественной оси под углом α, вращается в z-плоскости вокруг начала координат и «заметает» при этом первый квадрант.

Какую область «заметет» соответствующая линия в w-плоскости?

е) Во что преобразует функция $w = z^2$ окружности

$$|z| = 1,\ |z| = 2,\ |z| = c \quad (c > 0)?$$

ж) Во что преобразует та же функция такие линии z-плоскости: гиперболу $xy = 1$, гиперболу $xy = -4$, $x^2 - y^2 = 1$?

ОТВЕТЫ

Глава I

§ **1.** 1. А. из Рославля, Б. из Ельни, В. из Гжатска, Г. из Вязьмы, Д. из Ярцева. 2. Второй — рокоманец, третий — туземец. 3. Справа — бог дипломатии, слева — бог правды, в центре — бог лжи. 4. 37. 5. 38. 6. а) 28, б) 7, в) 36. 8. Одинаково. 9. Митя с Колей, Федя с Леней, Толя с Петей. 11. Неправильно: первый должен получить 80 коп., второй — 40 коп. 12. 10 часов. 13. Жене 2 года, Володе — 4, Наде 6 лет, Алеше — 12. 14. а) 740, б) 1352. 15. а) 21 (считая встречу при старте), б) 5. 16. 124. 17. 10. 18. 4 и 6. 19. Товарищи израсходовали всего 2 руб. 70 коп., в том числе 20 коп. на папиросы, поэтому прибавить 20 коп. к 2 руб. 70 коп. нелепо. 20. 31 коп. У одного мальчика 1 коп., а у другого — 29.

§ **2.** 1. 25. 2. 12,5. 3. 94. 4. 255. 5. 27, 3, 5. 6. 31. 7. 101. 8. 35. 9. 81, 41, 21, 11, 6. 10. 79.

§ **3.** 1. 50 *кг*. 2. Высокий. 3. На 11 *кг*. 4. 8,3 %. 5. В 1952 году. 6. 79%. 7. 72.% 8. Нет. 9. $6\frac{2}{3}$ *ц*.

§ **4.** 1. НОК (3, 4, 6, 7) = 84. 2. 800. 3. 301. 4. 505. 5. 119. 6. а) 999; б) 2 числа: 4002 и 7005. 7. 152 и 656. 8. 7561. 9. 315. 10. 9. 11. а) Да; б) 1.

§ **5.** 1. Можно. 2. Возможное решение:

В бидоне емкостью	Вначале	После переливания									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10 литров	10	7	7	4	4	1	1	8	8	5	5
7 »	—	—	3	3	6	6	7	—	2	2	5
3 »	—	3	—	3	—	3	2	2	—	3	—

5. См. схему: (С. — солдат, Р. — разбойник, Л. — лодка)

	Вначале	После переправы										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Левый берег	3С. 3Р. Л.	3С. 1Р.	3С 2Р. Л.	3С.	3С. 1Р. Л	1С. 1Р.	2С. 2Р. Л.	2Р.	3Р. Л.	1Р.	2Р. Л.	—
Правый берег	—	Л. 2Р.	1Р.	Л. 3Р.	2Р.	Л. 2Р. 2С.	1Р. 1С.	Л. 1Р. 3С.	3С.	Л. 2Р. 3С.	1Р. 3С.	Л. 3Р. 3С.

6. $\frac{7}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. 7. 3 строки квадрата («магического») дают одну серию из 6 решений, 3 столбца — других 6 решений.

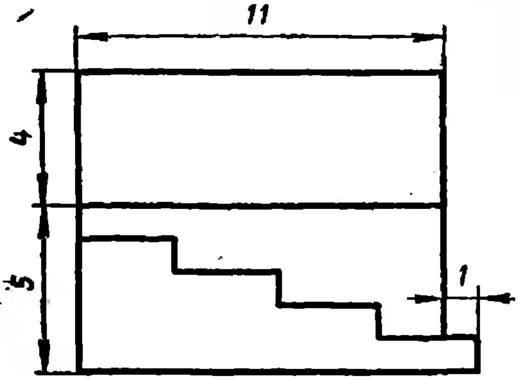


Рис. 141.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

§ 6. 1. в) Разрезать квадрат на полоски, ширина которых равна $\frac{1}{17}$ стороны квадрата. 7. Невыпуклый четырехугольник. 8. а) Соединить центр с вершинами. 10. См. рисунок 141. Вот еще два возможных решения: а) один кусок —1 *дм* $\times$ 1 *дм*, второй кусок — 9 *дм*$\times$1 *дм*; из трех кусков можно составить квадрат 10 *дм*$\times$10 *дм*; 1 кусок—8 *дм* $\times$1 *дм*, второй кусок—4 *дм*$\times$10 *дм*. Из трех кусков можно образовать прямоугольник 20 *дм* $\times$ 5 *дм*.

§ 8. 1. 297 — 169 = 128. 2. 10000 — 9999 = 1. 3. 728 + 272 = 1000. 4. 88 $\times$ 111. 5. 57125 $\times$ 743. 6. Делитель — 12, частное — 90809. 7. Делитель — 112, частное — 989. 8. $\sqrt{100489}=317$. 9. 25 $\times$ 18. 10. а) 142857 — наименьшее из возможных решений. Приписывая к нему справа еще любое число раз число 142857, опять получим решение задачи; б) Наименьшее решение — 1052631578947368842. 11. 142857.

§ 9. 1. 200 тонн. 2. 1,7 *кг*. 3. 70 млрд. 4. Около 10 дней. 5. 2 миллиарда ударов. 6. а) Примерно 200; б) 3; в) 5.

§ 11. 1. $a-b-c=0$, так что делить на $(a-b-c)$ нельзя. 2. Оба случая невозможны, что и доказывается полученным противоречием (на самом деле F вне отрезка BA, а E — на отрезке BC). 3. При доказательстве неявно пользуемся тем, что BO пересекает отрезок CD. Это допущение неверно (что и доказывается полученным противоречием). 4. Равенство $1^3=0$, являющееся следствием уравнений (1) и (2), лишь доказывает, что система этих уравнений не имеет решений.

Глава II

§ 1. 1. В случае, когда область находится в Европейской части РСФСР, схема Эйлера выглядит так, как на рисунке 142. 2. См. рисунок 143. 3. См. рисунок 144. 4. Точка. 5. $A \cdot B$ — множество всех различных между собой простых делителей НОД данных чисел (то есть $A \cdot B=\{2, 3\}$). 6. Множество всех квадратов. 7. Точка; прямая; пустое множество. 8. $A+B$ —множество всех (различных между собой) простых делителей НОК данных чисел (то есть $A+B=\{2, 3; 5, 7\}$). 9. Объединение двух лучей, перпендикулярных к MN; расстояние от начала каждого луча до MN равно 1 *см*. 10. 330. 11. 60%. 12. Двое. 13. Центр круга; весь

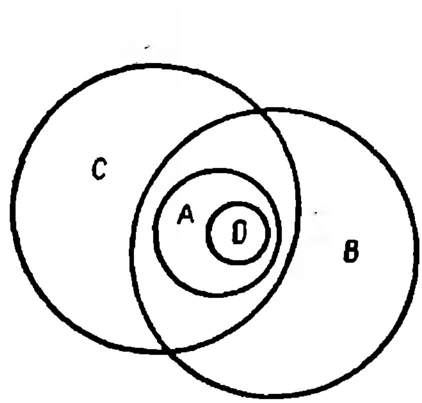


Рис. 142

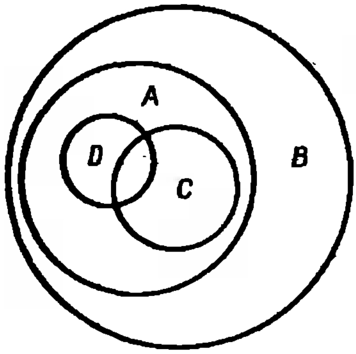


Рис. 143.

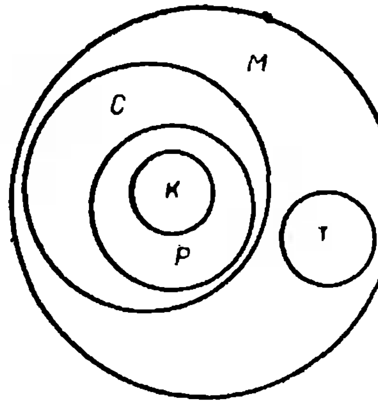


Рис. 144.

круг. 14. Круг $(O, \frac{1}{2}R)$; круг (O, R). 15. Расположить сапоги по парам так, чтобы в каждой паре оказался 1 правый сапог и 1 левый. Если останутся правые сапоги, к которым нельзя подобрать пару, то правых сапог больше; а если останутся левые сапоги, то их больше. 16. Нет: буква A окажется сопоставленной 5 континентам. 17. Нет.

§ 3. 3. а) Контрпример: прямоугольный равнобедренный треугольник; б) контрпример: два треугольника ABC и ABF, у которых $AB = AC$, $BF = BC$, F — на отрезке AC, $\angle BAC < 60°$. 4. а) Предложение ошибочно. Контрпример: четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = BC \neq CD = DA$; б) Контрпример изображен на рисунке 145. В пятиугольнике $ABCDE$ $AE = BC = 1$ *см*, $AE \perp AB$, $BC \perp AB$, $CD = DE = 1$ *км*. Ясно, что точка пересечения медиан AA_1 и BB_1 значительно дальше от AB, чем точка пересечения медиан CC_1 и EE_1. 5. а) Контрпример можно получить таким образом: на окружности γ выбираем 3 точки A, B, C так чтобы $\measuredangle BAC = 90°$; на окружности Γ с центром A радиуса BC выбираем вне γ точку D. Четырехугольник $ABCD$ — требуемый контрпример; б) Контрпример: трапеция $ABCD$, у которой $AD \perp AB$, $AB = 2AD = 2CD$; в) Контрпример: выпуклый четырехугольник $ABCD$, у которого $AC \perp BD$, $M \equiv AC \times BD$, $AM = 12$ *см*, $MC = 4$ *см*, $BM = 5$ *см*, $MD = 11$ *см*. 6. Контрпример: ромб, отличный от квадрата. 7. а) Контрпример смотрите на рисунке 146 (куб, к каждой из граней приставлен такой же куб); б) Контрпример строится так. Возьмем произвольный прямоугольный параллелепипед, отличный от куба. Пусть A_1B, A_1C_1 и A_1D — три ребра, исходящие из одной вершины. Тогда тетраэдр A_1BC_1D — неправильный, но равногранный. 8. а) Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то равны и соответственные стороны у этих треугольников. Эта теорема не верна. б) Если в треугольнике квадрат одной из сторон равен сумме квадратов двух других сторон, то такой треугольник — прямоугольный. Теорема верна; в) Если диагонали (выпуклого) четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник параллелограмм. Теорема верна; г) Если в четырех-

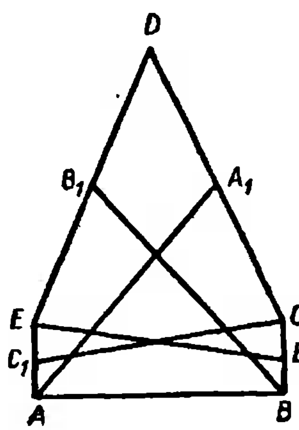


Рис. 145.

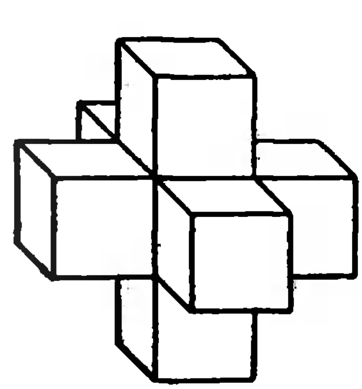


Рис. 146.

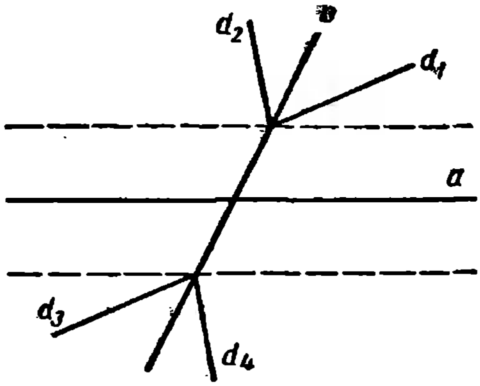


Рис. 147.

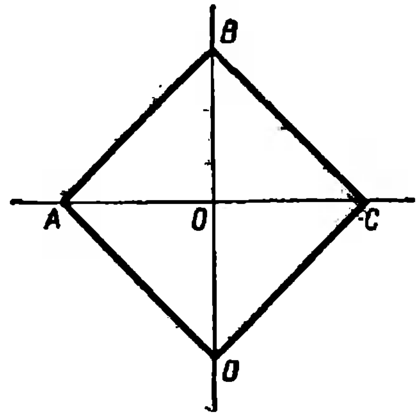


Рис. 148.

угольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то такой четырехугольник ромб. Теорема не верна. См. ответ к задаче 4; д) Если в четырехугольнике сумма противоположных углов равна двум прямым, то около четырехугольника можно описать окружность. Теорема верна; е) Если $\operatorname{tg}\alpha = 1$, то $\alpha = 45°$. Теорема не верна; з) Если боковые стороны треугольника отсекают от какой-то прямой, проходящей через середину боковой стороны, отрезок, равный половине основания, то эта прямая параллельна основанию. Теорема не верна; и) Если в (выпуклом) четырехугольнике суммы противоположных сторон равны между собой, то в него можно вписать окружность. Теорема верна; к) Если между тремя отрезками a, b, c существует зависимость $a < b + c$, то можно построить треугольник со сторонами, равными a, b, c. Теорема не верна; л) Если каждый из трех отрезков a, b, c меньше суммы двух других, то можно построить треугольник со сторонами a, b, c. Теорема верна. **11.** Нет. Требуется доказать: если $x_2 > x_1$, то $\log_a x_2 > \log_a x_1$, а доказано обратное предложение: если $\log_a x_2 > \log_a x_1$, то $x_2 > x_1$ (см. § 4, задача 15).

§ 4. **6.** Можно. **9.** Нельзя.

§ 5. **5.** Достаточно, но не необходимо. **6.** Необходимо, но не достаточно. **7.** а) и б) верно; в) неверно. **8.** а) Да. б) Неверно. Контрпример: правильный пятиугольник. **9.** Первый школьник прав, второй — нет. Контрпример: четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = BC \neq CD$, $CD = DA$. **10.** Для того чтобы был дым, необходимо, чтобы был огонь. **16.** Условие необходимо, но не достаточно. **17.** Условие необходимо, но не достаточно. Контрпример: квадрат и прямоугольник с диагоналями, равными 10 *см*. **18.** а) Для того чтобы в n-угольной пирамиде все боковые грани были равнобедренными треугольниками, необходимо, чтобы она была правильной; б) неверно (условие не необходимо, но оно достаточно). Контрпример: любая n-угольная пирамида, у которой основание — произвольный вписанный n-угольник, а высота проходит через центр окружности, описанной около основания. **19.** а) Для того чтобы человек был достойным

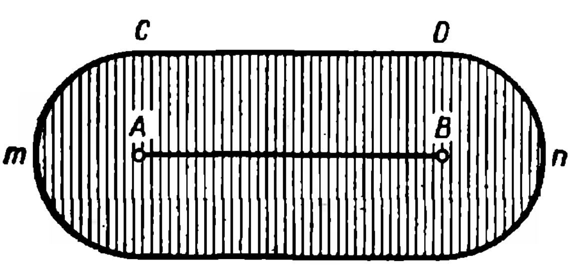


Рис. 149.

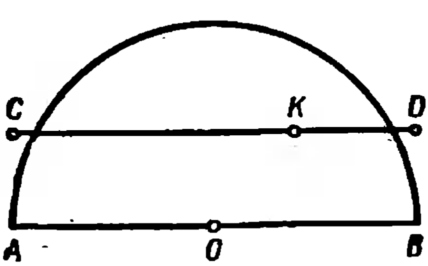


Рис. 150.

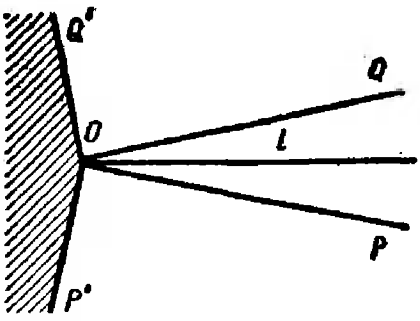


Рис. 151.

жизни и свободы, необходимо, чтобы он каждый день шел за них на бой; б) для того чтобы человек не знал ненависти, необходимо чтобы он никогда никого не любил. **20.** Неверно. Контрпример: ломаная $ABCD$, у которой $AB = BC = CD = DA$ и D не лежит в плоскости ABC. **21.** Ответ Феди дает достаточный признак пирамиды, у которой все диагональные сечения равны. Ответ Саши не дает ни достаточного, ни необходимого признака. **22.** Неверно. Контрпример см. в ответе к задаче 18.

§ **10.** **1.** Верно лишь при $R = r$. При $R \neq r$ искомым ГМТ (геометрическим местом точек) является объединение двух окружностей $(O, R + r)$ и $(O, |R - r|)$. **2.** а) Прямая. Можно; б) Окружность. Нельзя, ибо это определение окружности. **3.** а) Полуплоскость; б) ГМТ не существует; в) прямая, лежащая в полосе между a и b, параллельная a и отстоящая от a на 15 *мм*. **4.** Пара точек. **5.** а) Пара взаимно перпендикулярных прямых. **6.** 4 луча, образующих 2 прямых угла (лучи d_1, d_2, d_3, d_4 на рисунке 147). **7.** Контур квадрата (рис. 148) $OA = OB = OC = OD = 1$ *дм*. **8.** Заштрихованная фигура на рисунке 149. Здесь $AC \perp AB$. $AC = AE = a$. $CD = EF = 3AC$, CmE и DnF — полуокружности. **9.** (Рис. 150) O, C, D—колышки. CD—веревка, $OA = R$, $AC = BD = \frac{1}{2}R$, $AC \perp AB$, кольцо K надето на веревку CD. Козу привязывают веревкой длиной $\frac{1}{2}R$ к кольцу K. Возможны и другие решения. **10.** Пусть M и N — на прямой AB, причем $AM = 2BM$, $AN = 2BN$. Искомое ГМТ — окружность с диаметром MN. **12.** Пусть OP' и OQ'— лучи, $OP' \perp OP$, $OQ' \perp OQ$; OP' и OQ' лежат по разные стороны от прямой OP (рис. 151); OQ' и OP лежат по разные стороны от прямой OQ; Φ— это угол $P'OQ'$; луч l — биссектриса угла POQ. Искомая фигура есть $l + \Phi$. **13.** Пусть P — наблюдатель, A, B, C — три предмета, о которых говорится в условии. Пусть наблюдатель видит отрезки BC и AC соответственно под углами α и β. Обозначим через Φ (соответственно — Ψ) множество *всех* точек плоскости, из которых отрезок BC (соответственно AC) виден под углом α (соответственно β). Каждое из этих множеств — объединение двух круговых сегментов. Искомая точка является одной из точек пересечения этих фигур Φ и Ψ.

Глава III

§ **1.** **2.** 5; 33; $\frac{5}{16}$; $9\frac{3}{8}$. **3.** 534; 5159; 41013; $2\frac{1}{512}$; $\frac{261}{16384}$. **4.** а) 102000; б) 100101001; в) 209; г) 4 (57).

§ **3.** **4.** $\sqrt{1 - \cos^2 x} = |\sin x|$. **7.** $\sqrt{\sec^2\alpha - 2\mathrm{tg}\alpha} = |1 - \mathrm{tg}\alpha|$.

Глава IV

§ **2.** **1.** 198. **3.** а) $x = 2$, $y = 1$; б) нет, ибо при любых целых x и y левая часть уравнения делится на 3, а правая — нет. **8.** 9, 10, 11. **9.** 1, 2, 5, 12; 1, 3, 2, 14; 1, 1, 8, 10. **10.** Александр — брат Лены, Борис — Маши, Владимир — Оли. **11.** 945. **12.** 273. **13.** 0 и 0; 2 и 2. **14.** 7.

§ 3. 1. 0, 7, 7, 7. 2. а) Наибольшее значение равно 1. б) Наименьшее значение равно -1. 3. При $x = -\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$. 4. Двигаясь по квадрату со стороной 10 *км*, он обошел бы площадь 100 *км*^{2}. 5. $x = \frac{1}{n}(a + b + \ldots + l)$. 6. $x = \frac{1}{2}(5 \pm \pm \sqrt{5})$.

§ 4. 1. $x^3 - 7x + 6$. 2. $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + + yz^2 + zx^2) + 6xyz$. 3. а) $3(x-y)(y-z)(z-x)$, б) $3(x+y)(y+z)(z+x)$. 4. $\frac{50}{101}$. 5. а) $\left[1\frac{5}{6} - \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23}\right)\right] : 3 = \frac{3005}{5313}$; б) $\frac{2575}{10302}$. 6. $-x^2 + x - 1$.

Глава V

§ 2. 16. Невозможен случай, чтобы точки O, A и B лежали на одной прямой и в то же время $OA \neq OB$. Если A и B симметричны относительно O, то решений бесконечно много. При всяком ином расположении столбов задача имеет единственное решение.

§ 5. 4. $CC_1^2 = \frac{1}{c^2}[a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c) - c(p-a)(p-b)]$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

§ 7. 3. Пусть $A_1A_2 \ldots A_{1970}$ — данный многоугольник. Тогда $PA_1^2 + + PA_2^2 + \ldots + PA_{1970} = 1970(d^2 + R^2)$.

§ 8. 4. От вершины O на сторонах угла отложить с помощью веревки произвольные равные отрезки OM и ON. Сложив веревку вдвое, найти ее середину P. Концы веревки закрепить колышками в точках M и N, затем веревку натянуть и закрепить ее середину P колышком; провешить прямую OP. 9. Пусть O — наблюдатель, P — недоступная точка. Можно поступить так: выбрать произвольно доступную точку B, затем точку C на BP; точки B_1 и C_1, симметричные B и C относительно O; провешить прямую B_1C_1 и идти по ней с вехой до такой точки P_1, которая окажется на прямой OP. Расстояние OP_1 — искомое. 10. $AC = \frac{CP \cdot NP}{CN}$. 11. $AC = \frac{CP^2}{CD}$. 15. $\sqrt{2(CD^2 + CE^2)}$.

§ 9. 1. 48. 2. $2k + n - 2$. 5. 1 : 9. 6. 3 : 4. 7. $2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$. 9. $\frac{a^2 + 4b^2}{4b}$.

Глава VI

§ 1. 2. См. рис. 152. 3. а) См. рис. 153; б) См. рис. 154. 4. См. рис. 155. 8. См. рис. 156. 10. Опустите перпендикуляры из середины основания на боковые стороны. 11. а) Разделите каждую сторону на n равных частей и через точки деления проведите параллели к другим сторонам; б) таким будет треугольник, стороны которого в n раз больше соответствующих сторон данного; в) два решения см. на рисунках 157, 158. 12. 5.

§ 2. 3. а) Внутренность $\triangle ABC$ вместе с его контуром; б) не существует; в) искомое ГМТ — шестиугольник (рис. 159), $m = \frac{1}{2}(d - h)$. 4. а) $\frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b + c}$.

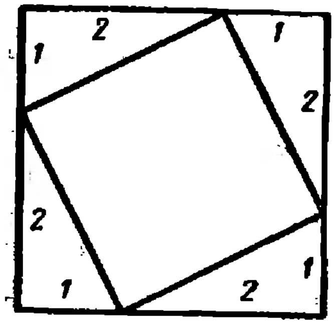


Рис. 152.

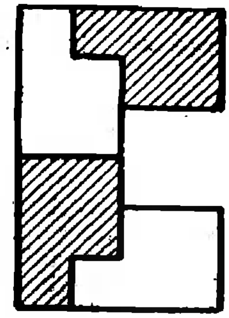
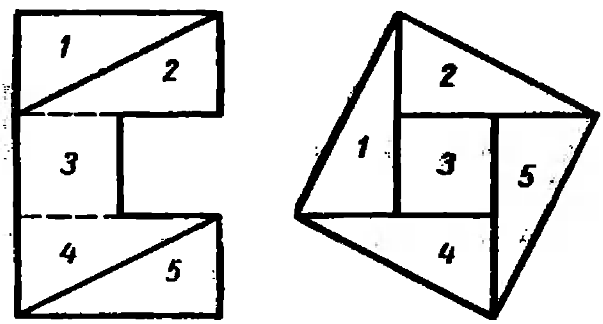


Рис. 153.



а) б)

Рис. 154.

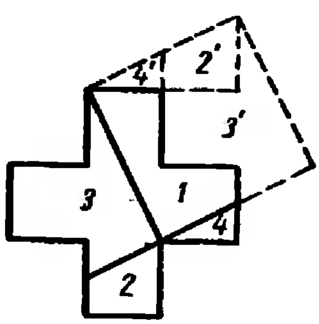


Рис. 155.

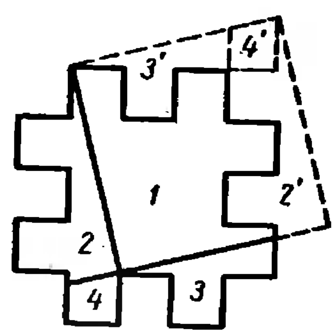


Рис. 156.

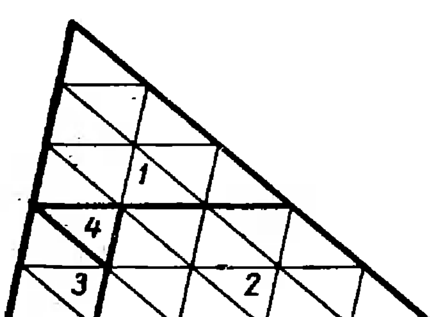


Рис. 157.

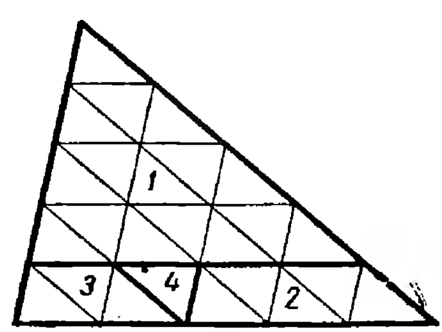


Рис. 158.

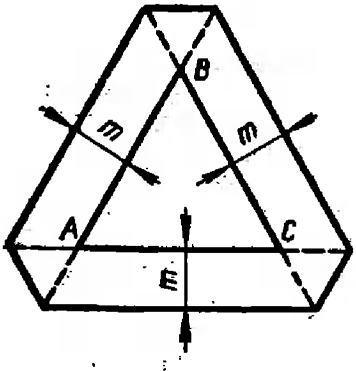


Рис. 159.

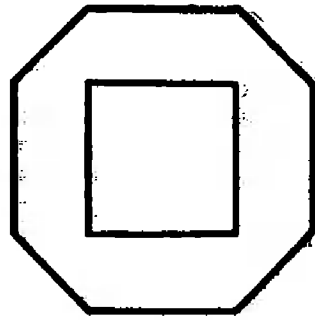


Рис. 160.

7. б) Искомое ГМТ — либо внутренность n-угольника вместе с его контуром (если $d = nr$, где r — радиус вписанной окружности), либо не существует (если $d < nr$), либо контур $2n$-угольника (если $d > nr$). См. рисунки 159, 160.

§ **3.** 3. Да. 9. $(b + c) \perp a$.

Глава VII

§ **1.** 1. Валерик не читает книгу или Саша собирает ягоды. Неверно, что Валерик читает книгу или Саша собирает ягоды. Неправда, что Валерик не читает книгу и Саша не собирает ягоды. 2. $a \wedge b$, $a \wedge \bar{b}$, $\overline{a \wedge b}$. 3. Данный треугольник не является прямоугольным или не является равнобедренным. 5. а) $a \to b$; б) $b \to a$; $\bar{a} \to \bar{b}$; в) $(b \to a) \to (\bar{a} \to \bar{b})$. 7. a, a, a, 1, 0. 9. Не меньше 8 человек. 10. $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$. 13. $A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A = 0$.

§ **2.** 1. $\{T(1) \wedge \forall k[T(k) \to T(k+1)]\} \to \forall n T(n)$. 2. $\forall A\, \forall B \exists a\, [(A \in a) \wedge (B \in a)]$. 3. $\forall x\, [P(x) \to Q(x)]$. 4. Пусть M, N, ... обозначают точки, a, b, c, ... — прямые. Введем такие предикаты:

$b \parallel a$ — «Прямая b параллельна прямой a»,

$b \equiv a$ — «Прямые b и a совпадают»,

$M \in a$ — «Точка M лежит на прямой a».

$M \overline{\in} a$ — «Точка M не лежит на прямой a».

Тогда предложения I и II можно записать так:

I. $\forall M \forall a \{(M \overline{\in} a) \to \exists b\, [(M \in b) \wedge (b \parallel a)]\}$.

II. $\forall M \forall a \forall b \forall c \{[(M \overline{\in} a) \wedge (M \in b) \wedge (M \in c) \wedge (b \parallel a) \wedge (b \parallel c)] \to b \equiv c\}$.

5. I. $\exists A \exists B \exists C \exists D \forall \alpha \{[(A \in \alpha) \wedge (B \in \alpha) \wedge (C \overline{\in} \alpha)] \to (D \overline{\in} \alpha)\}$.

II. $\forall A \forall B \forall C \forall D \forall \alpha \{[(A \in \alpha) \wedge (B \in \alpha) \wedge (C \overline{\in} \alpha)] \to (D \overline{\in} \alpha)\}$.

Заметим, что предложение I — истинно, а II — ложно.

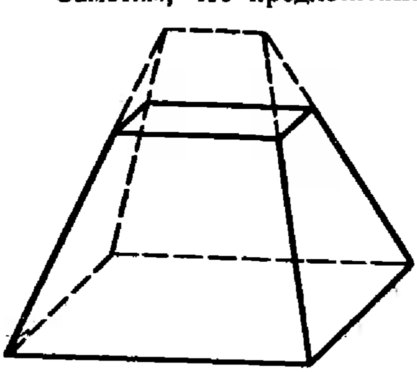


Рис. 161.

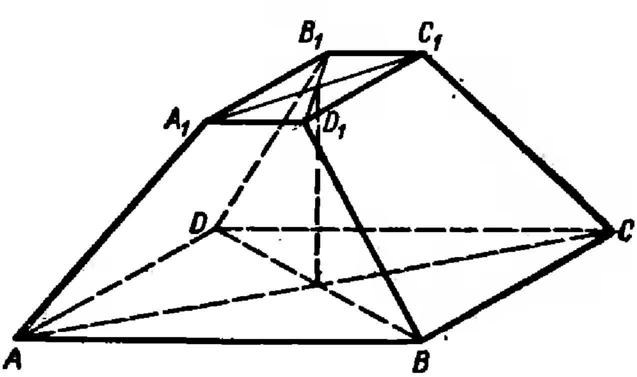


Рис. 162.

6. $\forall X \forall Y \forall Z \forall a \forall \alpha\, [(x \in a) \wedge (y \in \alpha) \wedge \overline{(Z \in \alpha)} \wedge (a \in \alpha) \wedge (ZY \perp \alpha) \wedge (XY \perp a)] \rightarrow (ZX \perp$ $\perp a)$. 7. A: $\forall \delta \exists x\, (\delta \ni x)$; B: $\exists \delta \exists\, x\, (\delta \ni x)$;

C: $\forall \delta \forall x \overline{(\delta \ni x)}$; $\overline{A}$: $\exists \delta \forall x\, \overline{(\delta \ni x)}$. $\overline{B}$ совпадает с C, а $\overline{C}$, а — с B.

§ **3.** 1. а) Неправильно указан род; используется понятие, не введенное ранее. б) Неполностью указано видовое отличие (под данное определение подойдет, например, полуокружность). 2. Используются неизвестные, неопределенные ранее понятия «основание многогранника», «верхнее основание», «нижнее основание». 3. Определения неправильны. Приводим контрпримеры: а) октаэдр; б) правильный октаэдр; в) рисунок 161; г) рисунок 162 (A и A_1, B и B_1, C и C_1, D и D_1 — соответственные вершины подобных многоугольников); д) рисунок 163.

§ **4.** 1. См. сноску на стр. 170. 2. Средней линией четырехугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон. 3. Вот два примера: I. В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других, но больше их разности. В трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов, но больше их разности. II. Три биссектрисы треугольника имеют общую точку. Три биссектральные плоскости трехгранного угла имеют общую прямую.

4. б) Сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри правильного тетраэдра (или на его поверхности), до его граней есть величина постоянная (это предложение верно); в) сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри правильного многогранника (или на его поверхности) до плоскостей его граней есть величина постоянная (это предложение верно). 5. Вот один возможный аналог. В тетраэдре, у которого три грани, сходящиеся в одной вершине, взаимно перпендикулярны, сумма квадратов площадей этих граней равна квадрату площади четвертой грани (это предложение верно).

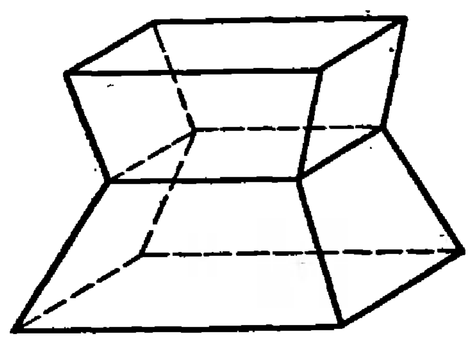


Рис. 163.

6. В равносторонний многоугольник можно вписать окружность (это предложение не верно). 7. Существует правильный многогранник с любым наперед заданным числом граней $n > 4$ (предложение неверно).

8. Каждый равносторонний шестиугольник является также равноугольным. (Это предложение неверно). 15. Две взаимно перпендикулярные плоскости, которые служат биссекторными плоскостями углов, образованных данными пересекающимися плоскостями. 16. Сфера.

17. д) Для каждого натурального n существует n последовательных нечетных чисел, сумма которых равна n^3.

18. Первый игрок должен каждым своим ходом уравнивать количество шаров в ящиках. 21. Нет. 22. Да.

§ **5.** 9. В начале доказательства надо проверить формулу только для $n = 1$. 10. Предполагаем, что k — не любое натуральное число, а такое значение n, при котором формула верна.

Глава VIII

§ **1.** 1. а) $6C_8^3 = 336$; б) $6C_8^3 + C_8^4 = 406$; в) $C_{14}^4 - C_8^4 = 931$. Возможно иное решение, но оно менее удачно: $C_6^1 \cdot C_8^3 + C_6^2 \cdot C_8^2 + C_6^3 \cdot C_8^1 + C_6^4 = 931$. 2. а) $P_5 = 120$; б) $P_5 - P_4 = 96$; в) $A_6^5 - A_5^4 = 600$. 3. $\frac{28!}{(4!)^7}$. 4. а) 56^8; б) У числа $a^\alpha \cdot b^\beta \cdot \ldots \cdot c^\gamma$ различных делителей $(\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots (\gamma + 1)$.

5. 24. 6. 66. 7. а) $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 = (1+1)^5 - 1 - 1 = 30$; б) 22. 8. 60. 9. а) 5; б) $C_5^2 = 10$; в) $C_{10}^3 \cdot C_7^4 = \frac{10!}{3!4!3!} = 4200$. 10. а) $A_9^3 = 504$; б) $9^3 = 729$. 11. 204. 12. а) C_{n-1}^k; б) C_{n-1}^{k-1}.

§ 2. 3. 3011. 5. $(1+a^2)^m$. 6. $(x+1)^7:(x-1)^7 = 2187, x = 2$. 7. C_{n+2}^2. 8. C_{n+3}^3. 9. 61. 10. $100^{101} > 101^{100}$.

§ 3. 1. а) 1; б) 0. 2. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{8}$. 3. $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{36}$; $\frac{5}{36}$; $\frac{5}{36}$. 4. $\frac{36^3 - 35^3}{36^3} \approx \frac{1}{12}$; $\frac{91}{216}$. 5. Вероятности появления сумм 9 и 10 равны соответственно $\frac{25}{216}$ и $\frac{27}{216}$. 6. Один должен получить $\frac{1}{4}$ ставки, второй — $\frac{3}{4}$. 7. $\frac{1}{C_{10}^5} = \frac{1}{252}$. 8. $\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$. 9. а) $\frac{1}{25}$; б) $\frac{8}{25}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\frac{2}{5}$; д) $\frac{16}{25}$; е) $\frac{24}{25}$. 11. $\frac{8}{27}$. 12. $\frac{8 \cdot C_{192}^2}{C_{200}^3}$. 13. $\frac{5}{6}$. 16. $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$. 18. $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{7}{8}$. 19. $1 - (0,2)^2 = 0,96$; $0,8^2 = 0,64$. 20. $1 - 0,999^{1000} \approx 0,63$. 21. $2 \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{11}{14} = \frac{33}{98}$. 22. $C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$.

§ 4. 1. $\log_2 2 = 1$. 2. $\log_2 32 = 5$. 3. а) $\log_2 365 \approx 8,65$; $\log_2 \frac{365}{364} \approx 0,004$; б) $\frac{1}{365}\log_2 365 + \frac{364}{365}\log_2\frac{365}{364} = 0,03$. 4. $2\log_2 32 = 10$. 5. $10\log_2 32 = 50$. 6. $\log_2 4 = 2$; $\log_2 4 = 2$; $\log_2 2 = 1$; $\frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{1}{2}\log_2 2 = 1,5$. 7. $\log_2 4 = 2$. 8. $\log_2 2 = 1$; $\log_2 16 = 4$; $\log_2 8 = 3$; $\frac{9}{8}$.

Глава IX

§ 1. 1. $\sqrt{3}$. 3. $\frac{a}{b}$ ближе к 1. 5. Если $a \neq b$, то быстрее придет первый. 6. В безветренную погоду («сегодня»). 8. Последняя цифра 8.

§ 2. 1. Решить систему из двух уравнений, приведенных в условии задачи. 2. Рассматриваемые линии уровня образуют семейство параллельных прямых $2x + 3y = c$. С ростом пометки c ($c > 0$) линия уровня удаляется от начала координат. 3. а) На прямой a, параллельной оси ординат и проходящей через точку (3, 0); б) справа от a; в) слева от a, включая и прямую a. 8. 23,6 *кг* смеси № 1, 21, 8 *кг* смеси № 2. Стоимость этой покупки 4 руб. 54 коп. 9. 300 уток, 200 гусей. 10. Если из A_1 перевезти 50 млн. *т* угля в B_1 и 10 млн. *т* в B_2, а из A_2 — 30 млн. *т* в B_2, то транспортные расходы будут минимальными (они составят 63 млн. руб. 11. Все самолеты С-1 и 10 самолетов С-2 закрепить за линией Л-2. 12. Распилить каждую из 108 досок на две доски: 1 двухметровую и 1 метровую; 90 досок распилить каждую на 3 метровых доски. Всего получим 54 комплекта. Больше комплектов получить нельзя. 13. Самая дешевая покупка (удовлетворяющая поставленным в задаче требованиям): 4 банки вида A, 19 банок вида B; стоимость — 26,2 руб. Самая легкая покупка: 16 банок типа A и 1 банка типа B.

§ 4. 3. $x = 0,177$, $y = 0,011$. 4. $x = 67,5$ $y = 0,87$.

§ 1. 1. Да. 2. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = 1{,}02040816$. 3. $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$. 4. $a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. 5. $x = 2$. 6. $n^2 - n - 1$. 8. $\{2^n\}$, $\{3^n\}$, $\{A\cdot 2^n + B\cdot 3^n\}$, где A и B — любые числа. 9. а) $y_{n+2} = y_n + y_{n+1}$; б) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...; в) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

§ 2. 1. а) -5050; б) $\frac{2}{9}\left[10\frac{10^n-1}{9} - n\right]$. 2. а) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$; б) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$. 3. а) $\sum\limits_{k=1}^{n} a + (k-1)\,d$; б) $\sum\limits_{k=1}^{100} k^2$. 4. $a_{n+1} - a_1$. 5. $\frac{99}{100}$. 6. 1; $2k$; $3k(k-1)$; $-\frac{1}{k(k+1)}$; $\frac{-2}{k(k+1)(k+2)}$. 7. а) $\frac{n(n+1)}{2}$; б) 343 400; в) 53 130; г) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; д) $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$; е) $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. 9. $\frac{21}{130}$. 10. $\frac{901}{103\cdot 105}$. 11. $\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2\cdot 5} - \frac{1}{(5+3n)(8+3n)}\right]$. 13. $\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{24}$. 14. $\frac{\sin^2 50\alpha}{\sin\alpha}$; $\frac{\sin 100\alpha}{2\sin\alpha}$.

§ 3. 1. а) 1; б) $\frac{1}{2}$. 2. а) Расходится; б) $\frac{2}{3}$.

§ 5. 1. 0,(142857). В периоде 6 цифр. 2. 0,(153846). 6. а) $\varphi(15) = 8$; б) $\varphi(p) = p - 1$. 7. $\varphi(21) = 12$, $\frac{2}{21} = 0{,}(095238)$, в периоде 6 цифр, т. е. меньше $\varphi(21)$.

8. а)—г) Нет. 14. Должен получиться период дроби $\frac{2}{7}$, то есть 285714. 15. 714285.

16. а) 1142856; б) 2142855, 3142854, 4142853, 1285713, 2285712, 2714283. в) Чтобы умножить 142857 на какое-либо натуральное число (например, на 38), нужно разделить это число на 7 (пример: $38 = 7\cdot 5 + 3$), остаток разделить на 7 и найти (пользуясь кругом на рисунке 127, стр. 335) период этой дроби (период дроби $\frac{3}{7}$ — 428571); поставить перед этим периодом частное от деления множителя на 7 (в нашем примере число 5; получится 5428571), то же частное вычесть из полученного числа ($5428571 - 5 = 5428566$). Это и будет искомое произведение ($142857 \cdot 38 = 5428566$).

§ 6. 1. а) $1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1}$; б) $3 + \frac{1|}{|7} + \frac{1|}{|16}$. 2. $\frac{253}{48}$. 3. $\frac{73}{43}$. 4. $\frac{21}{13}$. 10. а) Разложить $\frac{b}{a}$ в цепную дробь с четным числом звеньев (m — четное), найти предпоследнюю подходящую дробь P_{m-1}/Q_{m-1}; в качестве частного решения взять: $x_0 = P_{m-1}$, $y_0 = -Q_{m-1}$; написать общее решение: $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$.

б) Найти дробь P_{m-1}/Q_{m-1} также, как в случае а); в качестве частного решения взять $x_0 = cP_{m-1}$, $y_0 = -cQ_{m-1}$. 11. Так как $\frac{28}{37} = 0 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|3} + \frac{1|}{|8} + \frac{1|}{|1}$ и $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{25}{33}$, то $x_0 = 13\cdot 25$, $y_0 = 13\cdot 33$; $x = 13\cdot 25 + 28t$, $y = 13\cdot 33 + 37t$.

§ 7. 1. Решений нет. 2. Нет. Должно быть: $5x = \pm x + 2\pi n$. 3. а) $2x = \pm\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n$; б) $3x = (-1)^n \cdot 2x + n\pi$; в) решений нет; г) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$. 4. Нет. Потерян корень—2. 5. 1 и 4. 6. $(\lg 2 - \lg 3) : \lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
7. $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (k — любое целое). 8. Корней нет. 9. а) Решений нет; б) $x = 2\pi n$ (n — любое целое). 10. $x = n\pi$ (n — любое целое). 13. $x = \pm 30^\circ + 90^\circ \cdot n$ ($n=0$, ± 1; ± 2; ...). 14. $x = n\pi$. 15. $x = 1$. 16. Примеры: а) $\sin \pi x = 0$; б) $\lg x \times \sin \pi x = 0$; в) $\sin \frac{\pi}{2} x = 0$; г) $\cos \frac{\pi}{2} x = 0$. 17. Примеры: $\sin \frac{\pi}{1 + x^2} = 0$; $\frac{1}{x+1} \sin\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{1 - x^2}\right) = 0$. 18. $a > 1$, $y = \frac{a}{a-1}$.

§ 8. 1. $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$. (Эту формулу называют «формулой Герона» — по имени древнегреческого геометра, который впервые применил ее для нахождения квадратных корней.) 2. $x_1 = 1{,}750$; $x_2 = 1{,}732$; $x_3 = 1{,}732$. 3. $x_3 = 0{,}32$. 4. 0,25; 0,30; 0,31; 0,31. 6. 2,45. 7. 3,090. 8. 0,118. 9. 0,246. 10. 3,87. 11. 1,1. 12. 0,31. 13. 1,37.

Глава XI

§ 1. 2. $\frac{1}{3}v$. 3. 24. 4. а) Через середину какого-либо ребра параллельно двум скрещивающимся ребрам; б) 3. 6. $\frac{1}{12} \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}$ (a, b, c—длины боковых ребер). 7. 26 $дм^2$. 8. Около 48%. 10. $\frac{1}{3}R$.

§ 2. 1. а) Плоскость; б) бесконечно много. 2. а) Плоскость; б) бесконечно много. 3. Окружность. 4. Искомое ГМТ — либо прямая, либо плоскость, либо оно не существует. 5. 4 полуплоскости, образующие 2 прямых двугранных угла. 7. Рассмотрим в северном полушарии параллель Γ_n длины $\frac{100}{n}$ км ($n = 1, 2, \ldots$), а затем параллель L_n, которая южнее, чем Γ_n, на 100 км. Множество M представляет собой объединение южного полюса и всех параллелей L_n (таких параллелей бесконечно много, $n = 1, 2, 3, \ldots$). 8. а) Плоскость γ, параллельная прямым a и b и равноудаленная от них. б) Параллелограмм, лежащий в плоскости γ (см.

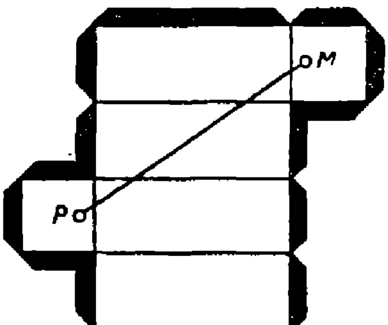


Рис. 164.

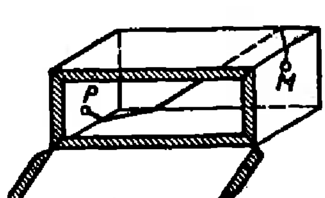


Рис. 165.

ответ к задаче 8 а) и имеющий стороны, соответственно параллельные прямым a и b и равные отрезкам $\frac{1}{2}AB$ и $\frac{1}{2}CD$. 9. шар.

§ 4. 1. Возможный путь: от A (рис. 131, стр. 364) до середины A_1B_1 и затем напрямик до C_1 (6 путей). 2. Кратчайший путь проходит по двум стенкам. Длина кратчайшего пути $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$. 3. См. рисунки 164 и 165. 4. Пусть K, L, T — соответственно середины ребер DD_1, D_1C_1, C_1C. Один из кратчайших путей — ломаная $PKLTM$.

Глава XII

§ 1. 1. $\frac{3}{16}$. 2. а) $\frac{\sin 50\alpha \cdot \sin 51\alpha}{\sin\alpha}$; б) $\frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}$. 3. $n\frac{\pi}{12}$. 4. а) $-\frac{1}{16}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{128}$. 6. $\left|\frac{b^2-a^2}{2}\operatorname{tg}\varphi\right|$. 7. $\frac{\sqrt{a^2+2ab\cos\varphi+b^2}}{\sin\varphi}$.

§ 2. 1. Нет. 2. Нет. 3. Нет. 4. Нет. 5. Нельзя. 6. Левая часть равна $\frac{5\pi}{4}$. 7. $\frac{7\pi}{4}$. 8. π. 9. $\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}$.

§ 4. 1. $(a+bi)(a-bi)$. 2. -1. 3. $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, если $a>0$; $\varphi=\frac{\pi}{2}$, если $a=0$, $b>0$; $\varphi=-\frac{\pi}{2}$, если $a=0$, $b<0$; $\varphi=\pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, если $a<0$, $b>0$; $\varphi=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, если $a<0$, $b<0$. 4. В данном случае замена $1^{\frac{1}{4}}$ на 1 незаконна. $1^{\frac{1}{4}}$, то есть $\sqrt[4]{1}$ имеет в комплексной области не одно, а 4 значения. Равенство $i^{21}=1^{\frac{1}{4}}$ означает, что i^{21} равно одному из этих четырех значений. 9. $x=\pm 1$, $y=0$ (2 решения).

§ 5. 1. а) $5(\pm 1\ \pm i)$; б) $2-3i$, $-2+3i$, $-2-3i$, $3+2i$, $-3-2i$. 3. $\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos^n\alpha}$. 8. а) Окружность с центром в нулевой точке (начале координат) радиуса 1 (ее называют единичной окружностью). 11. а) 0; 1; -1; 4; б) в такой же луч w — плоскости; в) отрицательный луч вещественной оси w — плоскости; преобразуется в положительный луч вещественной оси w — плоскости; два других луча преобразуются в отрицательную полуплоскость вещественной оси; г) в положительную полуось мнимой оси; д) верхнюю полуплоскость; е) в окружности $|w|=1$, $|w|=4$, $|w|=c^2$; ж) в прямую $\operatorname{Im}w=\frac{1}{2}$[1] (она параллельна вещественной оси плоскости w и проходит через точку $w=\frac{1}{2}i$); в прямую $\operatorname{Im}w=-2$; в прямую $\operatorname{Re}w=1$.

[1] $\operatorname{Im}w$ означает «мнимая часть числа w». Если $w=u+iv$ u, v—вещественные числа, то $\operatorname{Im}w=v$. Аналогично, $\operatorname{Re}w$ — вещественная часть числа w.

УКАЗАНИЯ

Глава I

§ 1. 1. 1) Высказывания ребят удобно расположить в такой таблице:

	Из Рославля	Из Гжатска	Из Вязьмы	Из Ельни	Из Ярцева
А. сказал	А.	Г.			
Б. »		В.	Б.		
В. »	В.			Б.	
Г. »		Г.			Д.
Д. »			А.		Д.

2) Допустите, что Д. не из Ярцева, и получите противоречие. 3) Возможное оформление рассуждений: «Допустим, что Д. не из Ярцева». Ставим в клетках, где стоит буква Д. (в пятом столбце), знак «—». «Тогда Г. из Гжатска» (в клетках с буквой Г. в третьем столбце ставим «+») и т. д. 2. Сначала выясните, какой ответ мог дать первый старик. 3. Учитывая ответы крайних статуй, выясните: могла ли средняя статуя оказаться богом правды? А богом дипломатии? 4. 1) Сначала покажите, что недостаточно взять 36 флажков. 2) Докажите затем (способом «от противного»), что среди 37 флажков не менее 10 одного цвета. 7. Первое взвешивание: положить на одну чашку весов (скажем, левую) эталон и одну из 5 «сомнительных» деталей, а на вторую (правую) — 2 «сомнительные» детали. Если окажется, что детали на правой чашке легче, чем на левой, то при втором взвешивании положить на весы по одной сомнительной детали с правой чашки. Если весы опять не уравновесятся, то более легкая из этих двух деталей бракованная. В других возможных случаях задача решается аналогично или еще проще. 9. 1) Митя собрал грибов больше, чем Леня и чем Петя. Выведите отсюда, что Митя был в паре с Колей. 2) Митя с Толей собрали столько грибов, сколько Коля и Леня. Но Митя собрал меньше, чем Коля (почему?). Отсюда выведите, что Толя собрал больше грибов, чем Леня, и, следовательно, Толя был в паре не с Леней. 10. Быстрее всего они вместе доберутся до вокзала, если каждый проедет на велосипеде половину пути. 13. Примите возраст Жени за 1 часть. 14. Сделав первые 23 шага, мальчик продвигается вперед лишь на 17 шагов. 15. а) К моменту первой встречи оба бегуна пробегут после старта вместе целый круг. Пробежав вместе еще 1 круг, они встречаются вторично и т. д.; б) чтобы оказаться рядом, один бегун должен обогнать второго на целый круг (или несколько кругов). 16. 1) Подсчитайте, сколько имеется среди первых 500 натуральных чисел таких, которые делятся на 5, на 25, на 125. 2) Если разложить число $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 500)$ на простые множители, то сколько раз в этом произведении встретится число 5? 3) Заметим, что число 2 в этом произведении встретится чаще, чем число 5. 20. Ес-

ли первый мальчик дал бы второму 2 копейки (или больше), то они заведомо купили бы пачку карандашей.

§ 3. 2. Примите длину шага высокого рабочего за единицу. Найдите расстояние (в единицах), которое пройдет меньший рабочий в то время, когда высокий сделает 100 шагов.

§ 4. 2. Количество помеченных чисел равно [НОК (1000, 15)]: 15. 3. Если от искомого числа отнять 1, то остаток должен разделиться на 60, то есть он равен одному из следующих чисел: 60, 120, 180, 240 и т. д. 480, а само искомое число — одному из таких чисел: 61, 121, . . . , 481 (8 чисел). Из них выбираем число, делящееся на 7. 4. 1) Ищем сначала число, которое на 1 меньше искомого; 2) если к этому числу прибавить 7, то оно разделится на 7. Значит, оно само делится на 7 и т. д. 5. Найдите сначала число, которое на 1 больше искомого. Оно делится на 2, 3 и т. д. 6. Прибавьте к искомому числу 2. 7. Искомое число должно делиться на 504. Кроме того, оно имеет вид 523??? (вопросительные знаки обозначают неизвестные цифры). Делите («углом») 523??? на 504 и находите последовательно цифры частного. Другая идея: 523000 при делении на 504 дает остаток 352. Поэтому к числу 523000 нужно прибавить либо 152 (504 — 352), либо 656 (1008 — 352), чтобы сумма разделилась на 504. 8. Если от искомого числа отнять 1, то остаток должен разделиться на все однозначные числа, а следовательно, и на их НОК 2520. 9. Искомое число нечетное и, кроме того, делится на 3, 5, 7, 9. 10. 1) Вычтите из делимых получившиеся остатки; 2) найдите НОД полученных чисел.

§ 6. 2. П е р в ы й с п о с о б: через концы средней линии проведите два перпендикуляра к основанию; в т о р о й с п о с о б: через те же точки проведите пару параллельных прямых, из которых каждая пересекает одно из оснований; т р е т и й с п о с о б: проведите через те же точки пару прямых, пересекающихся на одном из оснований. 4. Первый способ: из концов средней линии опустите перпендикуляры на основание (если один угол тупой, то за основание примите большую сторону треугольника). Второй способ: из вершины опустите перпендикуляр на среднюю линию. 5. Треугольник можно разбить на 4 равных между собой треугольника, а шестиугольник можно составить из 6 равных между собой треугольников. Более общий способ (для VIII—X кл.): подберите два взаимно простых нечетных числа a и b и четное число n так, чтобы $2(a^2+b^2) = n^2$. Разрежьте затем каждый треугольник на n^2 равных треугольничков (для этого придется каждую сторону треугольника разделить на n равных частей и через полученные точки провести параллели к сторонам). Всего получите треугольников $3n^2$, то есть $6a^2+6b^2$. Составьте теперь треугольник из a^2 треугольничков, а из $6a^2$ треугольничков — шестиугольник. Аналогично составьте шестиугольник из $6b^2$ треугольничков. Пример: $a = 7$, $b = 1$, $n = 10$. Проверьте: $2(7^2+1^2) = 10^2$. Нужно сначала разрезать каждый треугольник на 100 равных треугольничков, затем отобрать $6 \cdot 49 = 294$ треугольничка и составить из них шестиугольник, а из остальных 6 — другой шестиугольник. 6. а) Разрежьте сначала фигуру на 12 равных между собой прямоугольных «кирпичиков». Заметьте, сколько «кирпичиков» нужно взять для одной из четырех равных частей; б) Разрежьте сначала трапецию на 12 равных треугольничков. Подсчитайте, сколько таких треугольных «кирпичиков» понадобится для каждой из трех трапеций. 9. Разрежьте сначала трапецию на 3 равных треугольника, затем — на 12 треугольников. 10. а) Площадь искомого прямоугольника — 100 *кв. м.* 11. б) Сторона квадрата — 6 *см.* Разрез — «лестница». «Ширина ступеньки» — 3 *см*, «высота» — 2 *см*. 12. Разрез — «лестница». Сторона квадрата 12 *см*. 13. Середину отрезка AB соедините с C и D.

§ 8. 6. Если 8 умножить на делитель, то получится *двузначное* число (см. третью строчку), а если на тот же делитель умножить первую цифру частного, то получится *трехзначное* число. Чему же равна первая цифра частного? Чему равен сам делитель? 7. 1) Делитель, умноженный на 8, — *трехзначное* число; делитель, умноженный на первую цифру частного, — *четырехзначное* число. Чему равна эта цифра? А все частное? 2) Вычитая из трехзначного числа (третья строка) трехзначное (четвертая строка), получаем *трехзначное* число. Поэтому число в четвертой строчке меньше 900. Отсюда получите, что первые цифры делителя — 10 или 11; 3) покажите, что первые цифры делителя 11 (см. вторую строку); 4) покажите, что третья цифра делителя не меньше, чем 2 (см. вторую строку), не больше, чем 2 (строка четвертая). **9.** 1) Сначала найдите H и C; 2) B и D — различные цифры, не равные нулю, а произведение $AD \times B$ делится на 25. Покажите, что $B \neq 5$, что AD делится на 25. Найдите AD. **10.** Записи можно расположить так:

$$\begin{array}{r} 3\,2\,1 \\ \ldots ?\,?\,?7 \\ \times \qquad 5 \\ \hline \ldots\ ?\,?\,? \\ 3\,21 \end{array}$$

(вопросительные знаки, соответствующие одной и той же цифре, во множимом и произведении обозначены одним и тем же номером). Найдите сначала цифру $?_1$ $(?_1)$, затем $?_2$ и т. д. **11.** а) *Арифметическое решение.* Самая правая цифра может быть только 7. Аналогично находим остальные цифры (последовательно справа налево); б) *алгебраическое решение.* Пусть искомое число $\overline{1abcde}$. Положим $\overline{abcde} = x$. Тогда $3(10^5 + x) = x \cdot 10 + 1$.

Глава II

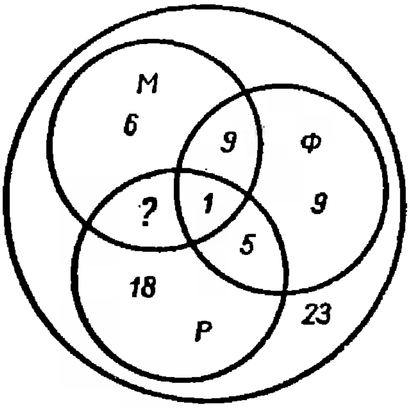


Рис. 166.

§ **1.** **10.** 1) Пусть M — множество всех опрошенных; A и B — множество тех из них, которые читают соответственно «Сан» или «Стар». Изобразите эти множества в виде кругов Эйлера, 2) см. рисунок 50, 3) нас интересует число элементов в $M - (A + B)$; 4) множество $A+B$ состоит из двух неперекрывающихся частей: A и $B - A \cdot B$. Поэтому $A + B$ содержит $430 + (220 - 180) = 470$ жителей; 5) $M - (A + B)$ содержит $800 - 470 = 330$ жителей.

12. 1) Воспользуйтесь схемой Эйлера; 2) начните с общей части всех трех кружков; 3) см. рисунок 166.

23. 1) Рассмотрите квадраты, у которых две стороны лежат на сторонах первого координатного угла, а длины сторон выражаются соответственно числами 1, 2, 3, . . ., n, ...

Контуры этих квадратов обозначим соответственно через

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots,\ Q_n,\ \ldots;$$

2) все точки с двумя натуральными координатами можно перенумеровать, если сначала занумеровать такие точки, которые лежат на Q_1, затем — те точки, которые лежат на Q_2, затем те, которые находятся на Q_3, и т.д.:

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	. . .
Точка	(1,1)	(1,2)	(2,2)	(2,1)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(2,3)	(1,3)	. . .

3) объясните, почему каждая точка с двумя натуральными координатами получит определенный номер.

24. Рассуждайте так же, как при решении задачи 23, но в качестве Q_1, Q_2, Q_3, ... возьмите контуры квадратов, у которых осями симметрии служат оси координат, а длины сторон равны 0, 2, 4, 6, ... единицам.

25. 1) Проведите такое же построение, как при решении задачи 23.; 2) вокруг каждой точки с координатами (p, q) мысленно опишите черный кружочек, если только эта дробь несократима, а если дробь $\frac{p}{q}$ сократима, то опишите вокруг точки (p, q) белый кужочек; 3) покажите, что множество черных кружочков счетно; 4) покажите, что множество положительных рациональных чисел счетно.

26. 1) Рассмотрите квадраты, о которых говорится в указании к задаче 24; 2) черные кружочки опишите около тех целочисленных точек (p, q), для которых $q > 0$ и $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь; 3) дальше решение задачи аналогично решению задачи 25.

§ 3. 10. Покажите сначала (пользуясь формулой $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$), что

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1 = -2\cos C \cdot \cos A \cdot \cos B.$$

§ 4. 2. Пусть парикмахер — мужчина. Тогда как он мог поступить с самим собой? Брил он себя или нет? 7. Если n и $2n + 1$ имеют общий делитель d, то $(2n + 1) - 2n$ (то есть 1) также делится на d. 8. Чему равна сумма всех внешних углов выпуклого многоугольника? 9. 1) При каждом ходе конь переходит с клетки одного цвета на клетку другого цвета; 2) ходов 63; 3) после *нечетного* числа ходов конь окажется на белой клетке. 10. Предположите, например, что $\sqrt[3]{3} = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — *несократимая* дробь, и затем покажите, что p и q имеют общий делитель, больший 1. 11. 1) Преобразуйте $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ в сумму двух точных квадратов, $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$; 2) покажите затем, что $(ad - bc)^2$ делится на общий делитель чисел $a^2 + b^2$ и $ac + bd$. 13. Пусть $\angle A$ — тупой или прямой, тогда $a^2 > b^2 + c^2$, $a > b$, $a > c$. Выведите из этих неравенств, что $a^3 > b^3 + c^3$. 14. 1) Рассмотрите прямоугольник, ограниченный линиями клетчатой бумаги и описанный около данного треугольника; 2) двумя способами найдите площадь треугольника. Покажите, что площадь треугольника должна одновременно выражаться как рациональным числом, так и иррациональным числом, что невозможно.

§ 5. 12. 1) Н е о б х о д и м о с т ь данного условия означает: если медиана треугольника, проведенная к его наибольшей стороне, не равна половине этой стороны, то треугольник не прямоугольный; 2) воспользуйтесь теперь тем, что теорема, противоположная данной, равносильна теореме, обратной данной (см. гл. II, § 3); 3) сформулированная в указании (1) теорема равносильна такой: если треугольник прямоугольный, то его медиана, проведенная к его наибольшей стороне (то есть к гипотенузе), равна половине гипотенузы; 4) для доказательства рассмотрите окружность, описанную около треугольника; 5) д о с т а т о ч н о с т ь условия в данной задаче означает: если медиана, проведенная к большей стороне треугольника, равна половине этой стороны, то треугольник прямоугольный; 6) см. указание (4).

13. 1) Д о с т а т о ч н о с т ь условия означает: если в треугольнике две медианы равны, то он равнобедренный; 2) н е о б х о д и м о с т ь условия означает: если треугольник равнобедренный, то в нем две медианы равны.

15. 1) Д о с т а т о ч н о с т ь означает: если одновременно выполняются указанные три условия, то четырехугольник — ромб; 2) н е о б х о д и м о с т ь означает: если в четырехугольнике нет двух равных смежных сторон, или если в нем имеется одна пара равных смежных сторон, а остальные две стороны не

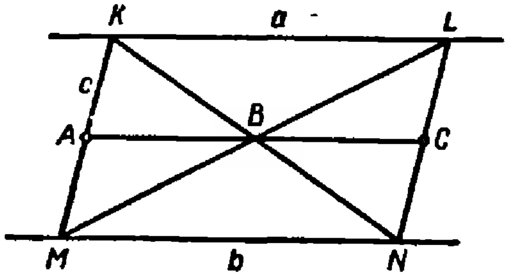


Рис. 167

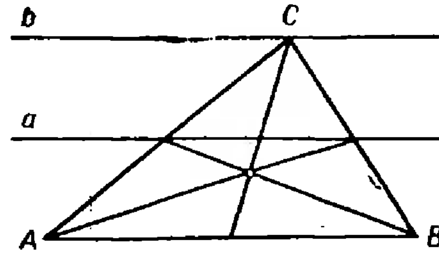


Рис. 168.

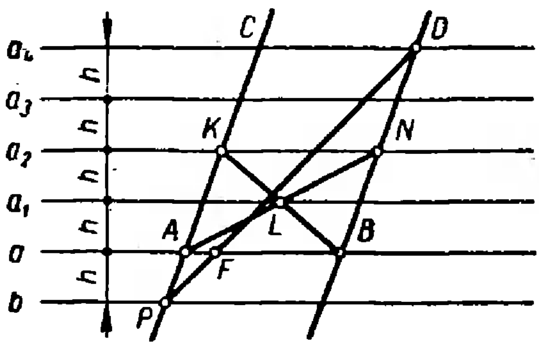


Рис. 169.

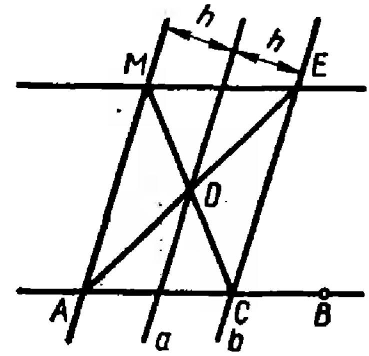


Рис. 170.

равны между собой, или если в нем нет пары параллельных сторон, то он уже не может оказаться ромбом. Справедливость этого утверждения очевидна.

§ 7. 2. 1) Медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы ($\triangle AHC$). Поэтому $FC = FH$; 2) другая идея: пусть $FE \parallel HD$. Тогда A и H симметричны относительно FE. 4. 1) Точки A, B, F, E лежат на одной окружности; 2) центр окружности — на прямой MN; 3) в то же время он равноудален от E и F.

§ 8. 1. Можно построить две медианы треугольника, а затем и третью. 2. Постройте точки C, D, F так, чтобы $\angle CBA = 60^\circ$, $\angle DBA = 120^\circ$, $\angle FBA = 180^\circ$. 3. Постройте угол в 60° с вершиной A и стороной AB. 4. Первый способ: см. задачу 2. Второй способ: пусть A и B — две произвольные точки. Постройте сначала пару точек M и N, симметричных относительно AB. 5. а) Проведите через A и B две пары параллельных прямых; б) средняя линия параллелограмма делится точкой пересечения диагоналей пополам. Построим параллелограмм так, чтобы его диагонали пересекались в B, а одна боковая сторона проходила через A. Для этой цели проводим прямые a и b параллельно AB (рис. 167) на расстоянии h (h — ширина линейки) от AB. Через A проводим произвольную прямую (отличную от AB). Строим затем последовательно: K, M, MB, L, KB, N, LN, C, $AC = 2AB$; в) проведите параллель к каждой стороне угла. 6. а) Воспользуйтесь свойством медиан треугольника. По одну сторону данного отрезка AB (рис. 168) проводим 2 параллели к AB : a на расстоянии h от AB, b на расстоянии $2h$; пусть C — произвольная точка прямой b; строим затем 3 медианы $\triangle ABC$; б) (рис. 169) AC — произвольная прямая (отличная от AB); строим последовательно прямые и точки b, a_1, a_2, . . . , a_{n-1} (в нашем примере $n = 5$). P, K, KB, L, AL, N, BN, D, PD, F, $AF = \frac{1}{n}AB$. 8. См. рисунок 170. $ME \parallel AB$. Другой способ решения можно получить из леммы о трапеции. 9. Воспользуйтесь леммой о трапеции. 10. Постройте на данном отрезке как на основании прямоугольник; найдите точку пересечения его диагоналей. 12. а) Постройте сначала высоты $\triangle ACB$, если C вне круга. Рассмотрите затем случай, когда C внутри круга (но вне AB). Постройте в этом случае вершину M треугольника, если известно его основание AB и точка пересечения его высот C; б) постройте сначала какую-либо хорду MN, перпендикулярную к AB. Известна середина отрезка MN. Проведите через C параллель к MN. Воспользуйтесь леммой о трапеции. **13.** Постройте прямую AC, а затем угол с вершиной C, равный $\angle CAB$. **14.** Отложите от концов AB равные отрезки. **15.** 1) Разбейте букву «Г» на 2 параллелограмма. Пусть их центры тяжести A и B. Где лежит центр тяжести буквы «Г»? 2) Разбейте затем букву «Г» другим способом на 2 параллелограмма; б) разбейте букву «Т» на букву «Г» и прямоугольник. Центр тяжести буквы «Т» лежит на ее оси симметрии.

§ 9. 1. а) Сначала пересеките $\triangle ABC$ прямой, параллельной AB. Постройте медиану получившегося при этом треугольника; б) Пересеките $\triangle ABC$ двумя прямыми, параллельными AB. **2.** Пусть A, B, C — данные точки. Если M и C — по одну и ту же сторону от прямой AB и $\angle AMB = \angle ACB$, то M — на одной окружности с A, B, C. **3.** а) Первый способ: постройте сначала $\triangle BA'C$, симметричный $\triangle BAC$ относительно AB. Второй способ: постройте сначала точку пересечения высот треугольника; б) пересеките $\triangle BAC$ прямой $B'C' \parallel BC$ (B' — на BA, C' — на CA). Опустите в $\triangle B'AC'$ высоту на $B'C'$. **4.** Постройте сначала две точки, заведомо лежащие на биссектрисе. Пусть $\triangle ABC$ — данный, h — произвольный отрезок. Пусть прямая $c(b)$ пересекает луч AB (AC), параллельна AC (AB) и отстоит от AC (AB) на расстоянии h. Пусть b и c пересекаются в точке P. Тогда P лежит на биссектрисе $\angle BAC$. **5.** Постройте 2 параллелограмма AC_1BD_1 и AC_2BD_2 с диагональю AB. Рассмотрите точку пересечения C_1D_1 и C_2D_2. **6.** а) Центр окружности — точка пересечения биссектрис треугольника; б) постройте сначала середины сторон (см. задачу 1). **7.** Параллельно данной прямой проведите секущую, а затем постройте середину отсекаемой ею дуги. **8.** а) Отложите сначала две равные дуги от точки M и через полученные точки проведите прямую; б) проведите через M произвольную секущую MAB (точки A и B — на окружности). Выразите длину касательной через отрезки секущей. **9.** Пусть A и A_1 лежат на a, B и B_1 — на b, AB проходит через D $A_1B_1 \parallel AB$. Разделите A_1B_1 точкой D_1 в отношении $\frac{AD}{BD}$ и рассмотрите прямую DD_1. **10.** Биссектриса $\angle BOC$ параллельна AC. **11.** Задача сводится к построению угла ADO. Постройте сначала треугольник, равный $\triangle ADO$. В $\triangle ADO$ известны две стороны и угол между ними.

§ 10. 5. б) Пусть a, b, c — данные прямые. Рассмотрите ГМТ, равноудаленных от a и b, и ГМТ, равноудаленных от b и c. Пересечение этих двух ГМТ (то есть совокупность их общих точек) и является искомым ГМТ. **8.** Ищется ГМТ, отстоящих от отрезка AB на данное расстояние a. (Под расстоянием от точки до отрезка понимается наименьшее из расстояний от этой точки до точек отрезка.)

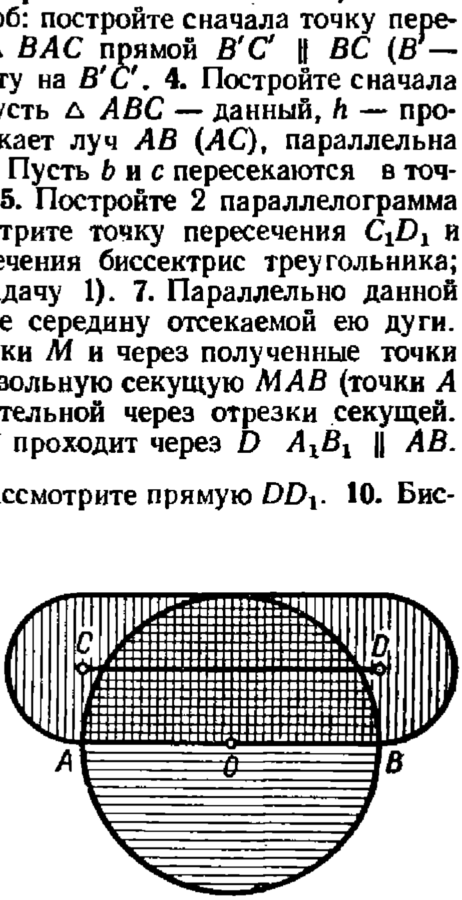


Рис. 171.

9. Пусть R — радиус полукруга, O — центр, AB — диаметр (рис. 171). Точки C и D выбраны так, что $AC \perp AB$, $BD \perp AB$, $AC = BD = \frac{1}{2}R$. Тогда полукруг можно рассматривать как ГМТ, отстоящих на расстояние R от O и в то же время отстоящих на расстояние $\frac{1}{2}R$ от отрезка AB.

§ 2. 1. Рассмотрите 3 возможных случая: хотя бы одно из двух чисел делится на 3; при делении на 3 оба дают один и тот же остаток (1 или 2); при делении на 3 одно число дает остаток 1, а другое 2. 2. 1) Нужно показать, что $n^5 - n$ делится на 10; 2) $n^5 - n = n(n^2-1)(n^2-4) + 5n(n^2-1)$. 3. Воспользуйтесь тождеством $\frac{a^2+b^2}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. 4. Рассмотрите разность $(2n+1)^2 - 1$. 5. $A^n - B^n$ делится на $A - B$, а следовательно, на 10^k. 6. $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2$. 7. $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (ad-bc)^2 + (ac+bd)^2$. 8. 1) Покажите, что $(n^7 - n) - n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)$ кратно 7. 2) Другая идея: применить метод полной индукции. 9. 1)При $n = k+2$, $2^{2^n} = 16^{2^k}$; 2) если число оканчивается на 6, то и любая его натуральная степень оканчивается на 6; 3) другая идея: $16^{2^k} - 1$ — нечетное число и делится на $16 - 1 = 15$, а значит, и на 5. Следовательно, оканчивается на 5. 10. 1) $(a+b)^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b)$. 2) левая часть делится на $a+b+c$; 3) $ab(a+b)$ — всегда четное. 11. а) Покажите, что точный квадрат четного числа делится на 4, а рассматриваемая сумма не делится на 4. 12. $4n \pm 1 = x^2 + y^2$; $4n \pm 1 = (x+y)(x-y)$. Рассмотрите затем систему $x + y = 4n \pm 1$; $x - y = 1$. 13. Пусть $x = 3k + a = 4m + b = 5n + c$. Покажите, что $40a + 45b + 36c = (120x - 120k - 180m - 180n) + x$. 14. 1) Пусть $x = \overline{abc}$, $y = \overline{bca}$ (a, b, c —цифры). Покажите, что $y = 10x - 999a$, 2) отсюда выведите, что y делится на 37, если x делится на 37. 15. 1) Требуется для натурального n подобрать правильную дробь x так, чтобы $\sqrt{n+x} = n\sqrt{x}$; 2) отсюда $x = \frac{n}{n^2-1}$.

16. Воспользуйтесь тождеством $\left(p + \frac{1}{q}\right) : \left(q + \frac{1}{p}\right) = p : q$. 17. 1) По условию $\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}$, откуда $\frac{9a+b}{10b} = \frac{a}{c}$; 2) из условия следует, что $x = 10^n \cdot a + b \cdot p$, $y = p \cdot 10b + c$, где $p = 11\ldots1$ (n цифр 1); 3) поэтому

$$\frac{x}{y} = \frac{(9 \cdot p + 1)a + bp}{p \cdot 10b + c} = \frac{p(9a+b)+a}{p \cdot 10b + c} = \frac{a}{c}.$$

§ 3. 6. б) $y = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } x < 1, \\ x - 1, & \text{если } x > 1; \end{cases}$

в) рассмотрите отдельно случаи: $x > 3$; $1 < x < 3$, $x < 1$;

г) $y = \begin{cases} 8, & \text{если } -2 < x < 2, \\ 2x^2, & \text{если } x < -2 \text{ или } x > 2; \end{cases}$ д) $y = |\cos x|$.

Глава IV

§ 3. 1. $2x^2 - 12x + 25 \equiv 2(x-3)^2 + 7$.

2. б) $\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{1+x^2}$.

3. 1) Выделить точный квадрат; 2) $x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

4. 1) Рассмотрите случай, когда четырехугольник — прямоугольник. Если x — длина одной стороны, то его площадь $S = 20x - x^2$; 2) найдите наибольшее значение этой функции; 3) для этой цели выделите полный квадрат. 5. 1) Выде-

лите полный квадрат; 2) $S=n\,[x^2-2px+q]$, где $p=\frac{1}{n}(a+b+\ldots+l)$, $q=\frac{1}{n}(a^2+$ $+b^2+\ldots+l^2)$; 3) $S=n[(x-p)^2+(q-p^2)]$. Отсюда видно, что S имеет наименьшее значение при $x=p$. 6. 1) Положите $(x-1)(x-4)=y$; 2) тогда $S=$ $=y(y+2)+10=(y+1)^2+9$. 3) Наименьшее значение достигается при $(x-1)(x-4)=-1$.

§ 4. 1. 1) $(x-1)(x-2)(x+3)\equiv A+Bx+Cx^2+Dx^3$ (1), где A, B, C, D — искомые коэффициенты; 2) запишите затем тождество (1) при $x=0$; $x=1$; $x=2$; $x=-3$; 3) из полученной системы уравнений относительно неизвестных A, B, C, D найдете эти числа.

2. $(x+y+z)^3=A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+y^2z+z^2x+y^2x+z^2y+$ $+x^2z)+Cxyz$. 3. а) Выражение делится на $x-y$, на $y-z$, на $z-x$. Поэтому $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=A(x-y)(y-z)(z-x)$; б) покажите, что A — константа; в) вычислите A (подставить вместо x, y, z какие-либо конкретные числа, например 1, —1,0). 4. $\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+1}$, откуда $1=A(2x+1)+$ $+B(2x-1)$, то есть $1=2(A+B)x+A-B$. Поэтому $2(A+B)=0$, $A-B=1$, $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{2x+1}$.

Полагая $x=1, 2, 3, \ldots$ и складывая образующиеся равенства, получим:

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{99\cdot101}=\left[\left(\frac{1}{2}\cdot1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{99}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{101}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{101}=\frac{50}{101}.$$

5. а) 1) $$\frac{1}{x(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}. \qquad (1)$$

Найдите A и B; 2) $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$; 3) в (1) положите $x=1, 2, \ldots, 20$ и образующиеся равенства сложите почленно; б) сначала разложите на простейшие дроби функцию $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$, то есть представьте ее в виде $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$.

Глава V

§ 2. 4. Рассмотрите точку P_1, симметричную точке P относительно прямой AB, точку P_2, симметричную точке P_1 относительно BC, и т. д. 5. Рассмотрите точку C_1, симметричную точке C относительно SB, и перпендикуляр из C_1 на SA. 6. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник (рис. 172), MN — диаметр, причем $MN\perp AC$. Перегните чертеж по прямой MN. Если точка D_1 симметрична D относительно MN, то BD_1— диаметр (ибо $\angle D_1DB=90°$). 7. Пусть $\triangle ABC$ — остроугольный, M — точка пересечения высот, точка A_1 симметрична M относительно BC. Тогда $\angle BA_1C=\angle BMC=180°-(\angle MBC+\angle MCB)$. Но $\angle MCB=\angle MAB$ (острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами), $\angle MBC=\angle MAC$. Поэтому $\angle BA_1C=180°-\angle A$. Отсюда следует, что A_1 — на окружности. Если $\triangle ABC$— тупоугольный, то доказательство несколько изменяется. Для прямоугольного $\triangle ABC$ доказательство очевидно. 8. Не может. Доказательство «от противного». 13. Следует первую монету положить в центр стола, а каждую следующую—симметрично (относительно центра) последней монете, положенной партнером. 14. Пусть $\triangle ABC$ — искомый, BD — данная медиана. Введите в рассмотрение точку B_1, симметричную B относительно D. Постройте сначала $\triangle BAB_1$. 16. Пусть столбы поставлены в точках O (центр квадрата) A и B. Рассмотрите точку A_1, симметричную точке A относительно O.

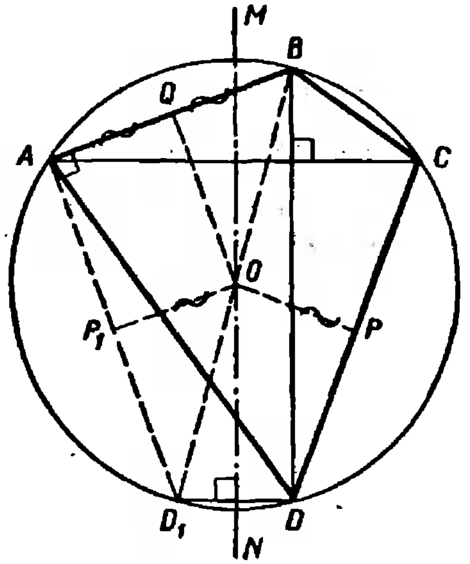


Рис. 172.

§ 3. 1. 1) Поместите в вершинах четырехугольника равные массы; 2) покажите, что центр тяжести образующихся таким образом четырех материальных точек лежит на отрезке, соединяющем середины двух противоположных сторон; 3) Другое решение. Доказать (без применения механических соображений), что средние линии $\triangle A_1A_2A_3$ и $\triangle A_1A_4A_3$ равны и параллельны. 2. Поместите в вершинах треугольника равные массы. 3. Поместите в концах основания равные массы (по 1 ед.), а в вершине — массу в 2 ед. 4. Поместите в вершинах 6-угольника равные массы (скажем, по 1 ед.). Покажите, что центр тяжести O образующихся таким образом 6 материальных точек совпадает с центром тяжести материальных точек $(B_1, 2)$, $(B_3, 2)$, $(B_5, 2)$; в то же время O совпадает с центром тяжести материальных точек $(B_2, 2)$, $(B_4, 2)$, $(B_6, 2)$. 5. Поместите в вершинах тетраэдра равные массы и получающиеся при этом 4 материальных точки сгруппируйте попарно различными способами. 6. См. указание к задаче 5. 4 материальных точки сгруппируйте различными способами в 2 группы: в одной — 3 точки, в другой — одна.

§ 5. 5. 1) Выберите на BA такую точку D, чтобы $BD = DC$. 2) Пользуясь теоремой Стюарта, покажите, что $CD = 2$ *м*. 3) Пусть CF — биссектриса угла ADC. Вычислите CF и DF. 4) Покажите, что CD — биссектриса угла BCF.

§ 6. 1. б) Выразите BL и LD, а затем и BD через стороны четырехугольника и AC. 2. Случай, когда $ABCD$ — прямоугольник. 3. Если x — диагональ пятиугольника, то по теореме Птолемея $x^2 = ax + a^2$. 4. Примените теорему Птолемея к четырехугольнику $A_1A_2A_3A_5$. 5. 1) Рассмотрите вписанный четырехугольник $ABCD$, где CD — диаметр, $\angle ACD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$. 2) В окружности отношение хорды к диаметру равно синусу вписанного угла, опирающегося на эту хорду. По теореме Птолемея $CD \cdot AB = a \cdot c + b \cdot d$;

отсюда: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{a}{CD} \cdot \dfrac{c}{CD} + \dfrac{b}{CD} \cdot \dfrac{d}{CD}$, т. е. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$. 6. Пусть (рис. 173) $BD = l$, $DF = n$, $AF = p$, $AD = c_1$, $CD = a_1$. Так как BF—биссектриса угла B, то $CF = AF = p$. По теореме Птолемея $(l+n)(a_1+c_1) = (a+c)p$. Но $\triangle ADF \sim \triangle BDC$, поэтому $\dfrac{a}{p} = \dfrac{l}{c_1} = \dfrac{a_1}{n}$. Отсюда $p = \dfrac{ac_1}{l}$, $n = \dfrac{a_1c_1}{l}$. Поэтому $\left(l + \dfrac{a_1c_1}{l}\right)(a_1 + c_1) = (a+c)\dfrac{a \cdot c_1}{l}$; $l^2 + a_1c_1 = \dfrac{a+c}{a_1+c_1} \cdot ac_1$. Но $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{c}{c_1} = \dfrac{a+c}{a_1+c_1}$. Следовательно, $l^2 + a_1c_1 = \dfrac{a}{c_1}ac_1$, или $l^2 = ac - a_1c_1$. 7. и 8. Аналогично задаче 6. 9.

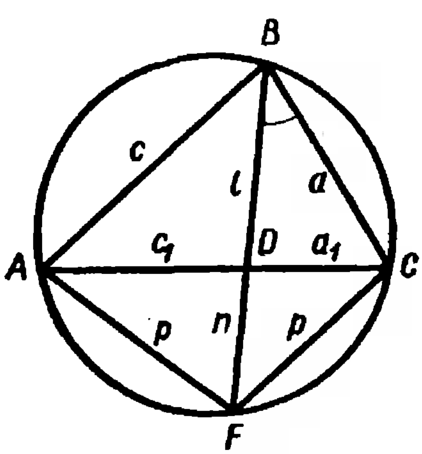


Рис. 173.

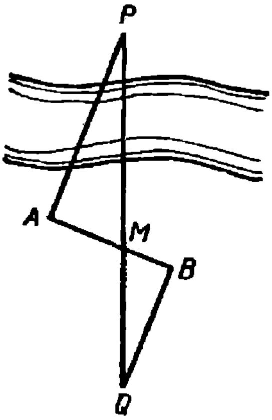


Рис. 174.

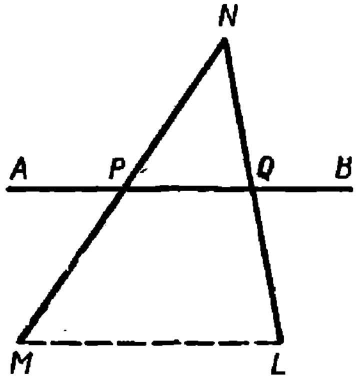


Рис. 175.

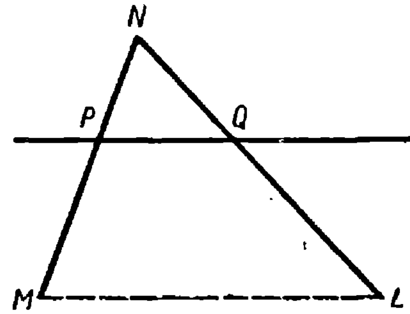


Рис. 176.

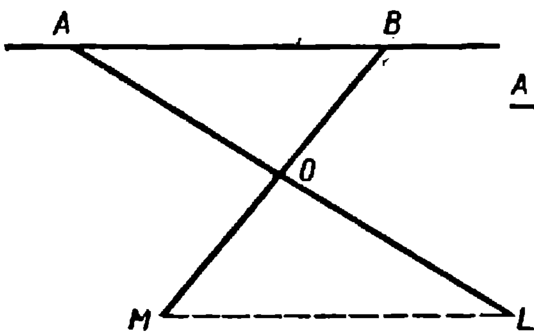


Рис. 177.

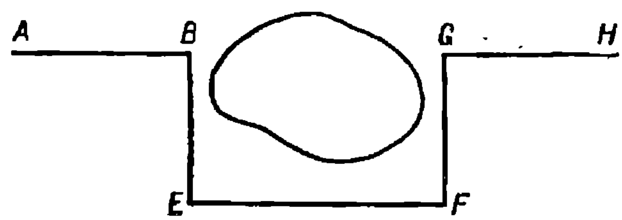


Рис. 178.

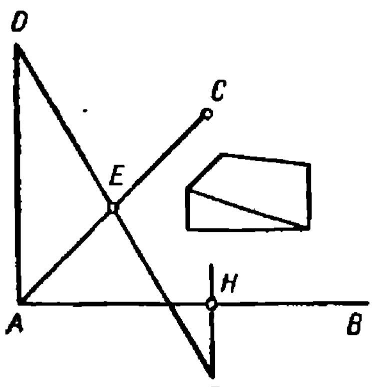


Рис. 179

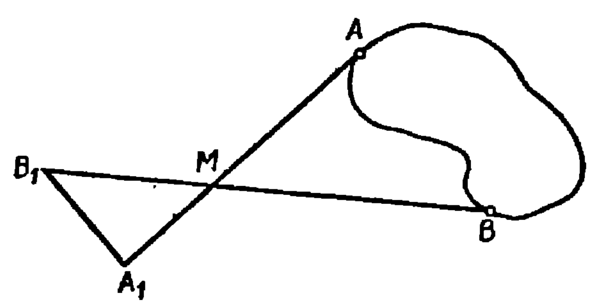


Рис. 180.

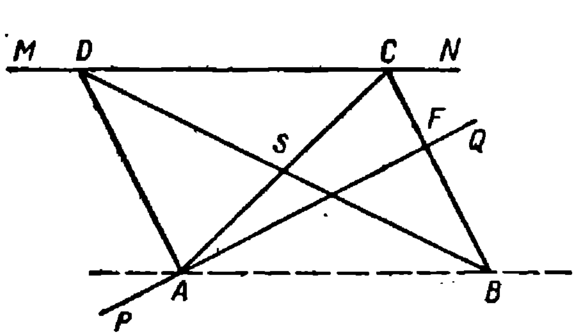


Рис. 181.

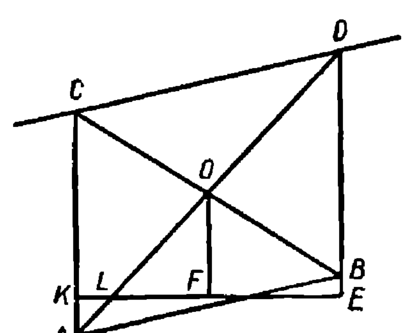


Рис. 182.

§ 7. 1 и 3. 1) Поместите в вершины равные массы. Где находится центр тяжести этой системы материальных точек? 2) Воспользуйтесь теоремой Лагранжа.

§ 8. 1. Воспользуйтесь эккером. 2. Возможный способ ясен из рисунка 174; A — доступная точка, P — недоступная. 3. Возможные способы см. на рис. 175 ($MP = PN$, $NQ = QL$), рис. 176 ($NP : PM = NQ : QL$), рис. 177 ($MO = OB$, $AO = OL$). 5. См. рис. 178. 6. См. рис. 179. Здесь $AE = EC$, $DE = EF$, $AD \perp AB$, $FH \perp AB$. 8. См. рис. 180. $A_1M : AM = B_1M : BM = A_1B_1 : AB$.
12. а) См. рисунок 181. $PQ \perp AD$, $CF \perp PQ$, $AS = SC$. B — на прямых DS и FC. $AB \parallel DC$. Другой способ: восставить в точке C перпендикуляр CK к CD, провешить затем $AB \perp CK$. б) См. рис. 182. K — произвольная точка на отрезке AC, $KE \perp AC$, $ED \perp KE$, $KF = \frac{1}{2}KE$, $AO : AL = KF : KL$, B — на пересечении CO и DE. 13. См. рисунок 183. MN — произвольная доступная прямая, $CE \perp MN$, $DF \perp MN$, $EO = OF$, P на CE и DO, Q на DF и CO. 14. $\triangle ASH \sim \triangle CAH_1$, $\triangle BSH \sim \triangle CBH_1$. Поэтому $\frac{SH}{BH} = \frac{BH_1}{CH_1}$; $\frac{SH}{AH} = \frac{AH_1}{CH_1}$. Отсюда найдите $AH + BH$ и воспользуйтесь равенствами $AH + BH = AH_1 + BH_1 = AB$.

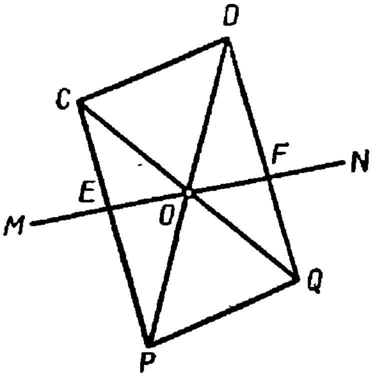


Рис. 183.

§ 9. 1. Первый способ: каждый из отрезков, на которые данные точки разбивают сторону AB, служит основанием одного и только одного треугольника. Сколько таких отрезков? Второй способ: подсчитать двумя способами сумму углов всех треугольников, на которые распадается прямоугольник.

2. См. указание к задаче № 1 (второй способ). Пусть треугольников x. Тогда сумма их углов равна $2dx$. С другой стороны—та же сумма равна $k \cdot 4d + 2d(n-2)$, так что $2dx = k \cdot 4d + 2d(n-2)$, $x = 2k + n - 2$.

3. Пусть AD и BC — основания трапеции, E — точка пересечения AB и MN, F — точка пересечения DC и MN; AC и DB пересекаются в O. Выразите сначала OE через AD и BC.

5. 1) Выразите проекцию катета на гипотенузу через гипотенузу и катет; 2) биссектриса делит гипотенузу на отрезки, пропорциональные катетам.

6. 1) Пусть $\triangle ABC$—данный; AD, BE, CF—его медианы, равные соответственно m_a, m_b, m_c, O — точка их пересечения. Постройте треугольник, стороны которого равны $\frac{1}{3}m_a$, $\frac{1}{3}m_b$, $\frac{1}{3}m_c$; 2) таким будет, например, $\triangle OEK$, где K — середина OC. Пусть его площадь равна q. Пусть $S_{\text{мед}}$ — площадь треугольника со сторонами m_a, m_b, m_c; 3) выразите $S_{\text{мед}}$ через q ($S_{\text{мед}} = 9q$); 4) как относятся площади треугольников, имеющих одну и ту же высоту, но разные основания; имеющих одно и то же основание, но разные высоты? 5) Выразите $S_{\triangle ABC}$ через q (ответ: $12q$); е) д р у г о е р е ш е н и е: постройте треугольник со сторонами $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$. Для этой цели продолжите BE на отрезок $EN = OE$ и рассмотрите $\triangle ONC$. Пусть $S_{\triangle EOC} = p$. Найдите последовательно $S_{\triangle ONC}$, $S_{\text{мед}}$, $S_{\triangle ABC}$, отношение $S_{\text{мед}} : S_{\triangle ABC}$. 7. Около четырехугольника $AOBC$ (рис. 184) можно описать окружность. Ее диаметр — OC, а AB — сторона вписанного в нее правильного треугольника (ибо $\angle AOB = 60°$). Поэтому можно выразить OC через AB. AB найдем из $\triangle ACB$.

8. Пусть POQ— данный угол (рис. 185), M— середина отрезка AB, но M не является серединой отрезка A_1B_1. 1) Покажите, что если $MA_1 > MB_1$, то $S_{\triangle AMA_1} >$

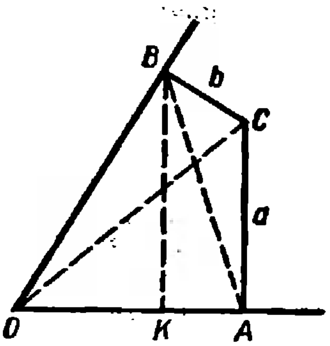


Рис. 184.

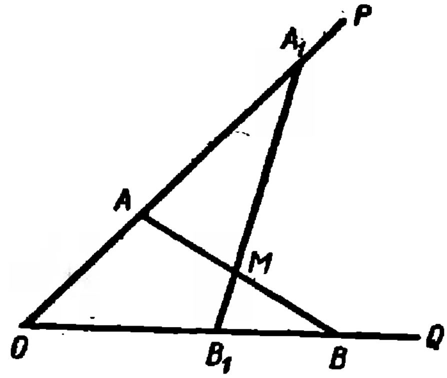


Рис. 185.

$> S_{\triangle BMB_1}$; 2) для этой цели проведите параллель через A к прямой B_1B; 3) покажите, что $S_{\triangle A_1OB_1} > S_{\triangle AOB}$.

9. Задача сводится к нахождению радиуса круга (r), если известна хорда (a) и стрела (b) сегмента, стягиваемого этой хордой.

10. Воспользуйтесь формулами: $S = \frac{abc}{4R}$ и $S = \frac{1}{2} ah_a$.

Глава VI

§ 2. 1. а) Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC$, D— точка на AC. Тогда $S_{ABD} + S_{CBD} = S_{ABC}$. 2. а) Пусть $\triangle ABC$ — правильный, точка P внутри его. $S_{APB} + S_{BPC} + S_{CPA} = S_{ABC}$. 4. а) Если AD — биссектриса, то $S_{BAC} = S_{BAD} + S_{CAD}$. б) (Рис. 186) $S_{BAC} = S_{BAD} - S_{CAD}$.

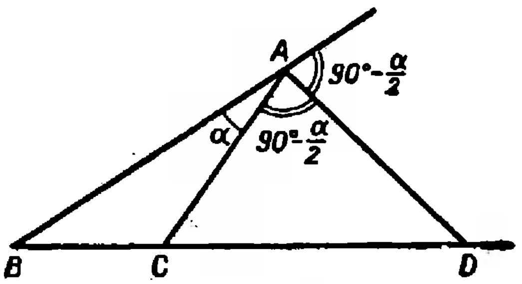


Рис. 186.

5. $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C$. 6. Соедините вершины многоугольника с произвольно взятой точкой. Выразите площадь многоугольника через площади полученных треугольников. 8. 1) Если два треугольника имеют равные основания, то их площади пропорциональны их высотам; 2) $S_{\triangle BOC} = \frac{OA_1}{AA_1} \cdot S_{\triangle ABC}$.

§ 3. 1. Воспользуйтесь тем, что площади двух треугольников с равными основаниями относятся как их высоты, или тем, что площади треугольников с равными высотами относятся как их основания. 2. Используйте задачу 1. 4. Доказать способом «от противного». 6. а) Если CC_1— биссектриса, то $AC_1 : C_1B = b : a$; б) пусть в $\triangle ABC$ AA_1, BB_1, CC_1 — высоты. Покажите сначала, что $AC_1 : AB_1 = AC : AB$. Напишите затем еще 2 аналогичных пропорции. 7. 1) $AC_1 = AB_1$; 2) напишите еще два аналогичных равенства. 8. См. указание к задаче 1. $AA_1 : OA_1 = S_{\triangle BAC} : S_{\triangle BOC}$. Отсюда $AO : OA_1 = (S_{\triangle BOA} + S_{\triangle COA}) : S_{\triangle BOC}$. Еще раз воспользуйтесь задачей 1.

10. 1) Покажите, что возможно поместить в вершинах треугольника ABC массы m_1, m_2, m_3 так, чтобы A_1 оказалась центром тяжести для (B, m_2) и (C, m_3); B_1—для (C, m_3) и (A, m_1); C_1—для (A, m_1) и (B, m_2). 2) Убедитесь, что

O — центр тяжести системы (A, m_1), (B, m_2), (C, m_3). 3) Для доказательства теоремы Ван-Обеля сгруппируйте материальные точки и примените правило рычага.

Глава VII

§ 4. 9. На стороне AC произвольного угла CAB откладываем отрезок $AM = m$; от точки M в направлении MA (то есть на луче MA) откладываем $MN = n$; через M проводим параллель к NB и отмечаем точку P ее встречи с прямой AB. Точка P — искомая.

12. 1) Сформулируйте и решите сначала аналогичную задачу на плоскости; 2) вот эта задача: сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри равностороннего треугольника до его сторон, есть величина постоянная; 3) для доказательства соедините данную точку с вершинами треугольника и рассмотрите сумму площадей получившихся треугольников; 4) сравните эту сумму с площадью данного треугольника; 5) теперь по аналогии решите исходную задачу. 13. 1) Сформулируйте и решите сначала аналогичную задачу на плоскости: в прямоугольном треугольнике с катетами a и b найти высоту, опущенную на гипотенузу; 3) затем по аналогии решите исходную задачу. 14. 1) Сформулируйте и решите аналогичную задачу для треугольника; 2) пусть a, b, c —стороны треугольника; h_a, h_b, h_c — его высоты, S — его площадь, r —радиус вписанной окружности; 3) выразите сначала r через S, a, b, c; 4) затем выразите a — через S и h_a, b — через S и h_b, c — через S и h_c; 5) из полученных формул следует: $r=1:\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$; 6) теперь решите по аналогии исходную задачу.

18. Рассмотрите случаи: $n = 0$, $m = 1$; $n = 0$, m — любое; $n = 2$, m — любое; n — любое, m — любое $(m > n)$.

19. 1) Рассмотрите сначала предельный случай, когда одна сторона четырехугольника(для определенности AB) стягивается в точку. 2) Покажите, что в этом случае $MN < \frac{1}{2}(MC + MD)$. 3) К этому случаю сведите исходную задачу. Для этого следует перенести отрезки AD и BC параллельно самим себе так, чтобы A и B совпали с M. 4) Получите другой вариант решения, стягивая в точку не AB, а BC.

20. 1) Пусть для определенности $A_2A_4 > A_1A_3$. Деформируйте четырехугольник $B_1B_2B_3B_4$, неограниченно приближая вершины B_1 и B_2 к A_2, а вершины B_3 и B_4 — к A_4. 2) Рассмотрите предельные положения диагоналей B_1B_3 и B_2B_4. Покажите, что в предельном положении сумма этих отрезков больше, чем $A_1A_3 + A_2A_4$. 3) Какое отсюда следует правдоподобное предположение? 4) Постройте теперь конкретный пример, когда $B_1B_3 + B_2B_4 > A_1A_3 + A_2A_4$.

21. Рассмотрите предельный случай, когда высота равнобедренного треугольника с данным основанием AB неограниченно возрастает.

Глава VIII

§ 1. 2. г) Из рассматриваемых в случае а) чисел 24 числа начинаются цифрой 1, цифрой 2 — столько же и т. п. Отсюда заключите, что сумма цифр, стоящих на первом (аналогично: на втором, на третьем и т. д.) месте в рассматриваемых числах, равна $24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$, то есть 360. Покажите затем, что сумма рассматриваемых чисел равна $360 \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1)$, то есть $360 \cdot 11111$; д) надо выбрать те числа, которые оканчиваются на 20, 40, 12, 32, 52, 24. 3. Сколькими способами можно из 28 человек выбрать 4 для первого купе? А из остальных 24 человек — 4 для второго купе? И т. д.

Всего способов $C_{28}^4 \cdot C_{24}^4 \cdot C_{20}^4 \cdot \ldots \cdot C_4^4 = \frac{28!}{(4!)^7}$. **4.** а) $5000000 = 2^6 \cdot 5^7$. Каждый делитель имеет вид $2^\alpha \cdot 5^\beta$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 6,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 7)$; б) сколько делителей у числа $a^\alpha \cdot b^\beta \cdot \ldots \cdot c^\gamma$? **6.** Сформулируйте сначала и решите аналогичную задачу, если имеются цветы двух сортов. **8.** Меньше 23000 те числа, которые либо начинаются цифрой 1, либо комбинацией 20 или 21. **11.** Сколько можно выделить полос шириной в k клеток? Сколько в такой полосе квадратов со стороной в k клеток? **13.** Воспользоваться задачей 12.

§ 2. **3.** Сумма равна 2^{10^4}. Найдите логарифм этого числа и его характеристику. **4.** Общий член разложения имеет вид $C_{100}^k \cdot 7^{\frac{100-k}{7}} \cdot 13^{\frac{k}{13}}$. Чтобы он оказался рациональным, нужно, чтобы $\frac{k}{13}$ и $\frac{100-k}{7}$ были одновременно целыми. $\frac{k}{13}$ — целое, если k — одно из следующих чисел: 0, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91. При этом $100 - k$ окажется кратным 7 лишь тогда, когда $k = 65$. Поэтому рациональный член равен $C_{100}^{65} \cdot 7^5 \cdot 13^5$. Другой подход: задача сводится к нахождению целых чисел u и v таких, что $k = 13u$, $100 - k = 7v$, так что $13u + 7v = 100$, $v = 14 - 2u + \frac{2+u}{7}$. Отсюда $u = 5$. **6.** Составьте производную пропорцию. Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

7. 1) Разложите $(a + b + c)^n \equiv [(a + b) + c]^n$ по биномиальной формуле; каждое слагаемое $A(a + b)^k \cdot c^{n-k}$ можно представить как $k + 1$ одночленов вида $A \cdot a^p \cdot b^{k-p} \cdot c^{n-k}$; 2) дальше воспользуйтесь тождеством вида $1+2+\ldots+m = \frac{m(m+1)}{2}$. **8.** 1) Разложите $[(a + b + c) + d]^n$ по биномиальной формуле; 2) воспользуйтесь предыдущей задачей. **9.** 1) Заметьте, что $123^{456} = (40 + 1)^{456} \cdot (80 + 1)^{114}$; 2) воспользуйтесь биномиальной формулой; 3) покажите, что интересующее нас число имеет те же две последние цифры, что и числа: $(456 \times 40 + 1) \cdot (114 \cdot 80 + 1)$; $(6 \cdot 40 + 1) \cdot (4 \cdot 80 + 1)$; $(40 + 1) \cdot (20 + 1)$. **11.** 1) Примените метод индукции; 2) докажите, что при p простом C_p^k делится на p $(0 < k < p)$.

Глава IX

§ 1. **3.** Нужно сравнить две разности: $1 - \frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a} - 1$. Пусть знак «$\wedge$» означает «>», «<» или «=», а знак «$\vee$» — соответственно «<»; «>» или «=». $1 - \frac{a}{b} \wedge \frac{b}{a} - 1$; $0 \wedge \frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2$; $0 \wedge \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{ab}$; $0 \wedge \frac{(b-a)^2}{ab}$.

Но правая часть больше нуля (ибо $b \neq a$). Поэтому «$\wedge$»; означает «<» $1 - \frac{a}{b} < \frac{b}{a} - 1$. Дробь $\frac{a}{b}$ ближе к 1, чем $\frac{b}{a}$. Другой способ: рассмотрите разность $\left(\frac{b}{a} - 1\right) - \left(1 - \frac{a}{b}\right)$. Иначе: из двух дробей $\frac{b-a}{a}$ и $\frac{b-a}{b}$ с равными числителями меньше та, у которой знаменатель больше. **4.** $\sqrt{ab} \wedge \frac{2ab}{a+b}$, $a + b \wedge 2\sqrt{ab}$, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \wedge 0$. Отсюда видно, что знак «$\wedge$» соответствует «>», если $a \neq b$ и «=», если $a = b$. Итак,

$$\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

5. Пусть первый шел t часов, а второй T часов. Тогда $\frac{t}{2}\cdot a+\frac{t}{2}\cdot b=S$ (S—весь путь), $\frac{S}{2a}+\frac{S}{2b}=T$. Отсюда $t=\frac{2S}{a+b}$, $T=\frac{(a+b)\cdot S}{2ab}$, $t \wedge T$; $\frac{2S}{a+b}\wedge\frac{(a+b)\cdot S}{2ab}$, $4ab \wedge (a+b)^2$; $0 \wedge (a-b)^2$. Но $0<(a-b)^2$, если $a \neq b$. Поэтому $t<T$. Первый пришел раньше второго. Другой способ: рассмотреть $T-t$. 6. Пусть $t_{\text{ветр.}}$ и $t_{\text{безв.}}$ означают соответственно время перелета в ветреную и безветренную погоду, a— собственная скорость самолета, v — скорость ветра; ясно, что $a > v$. Имеем: $t_{\text{безв.}}=\frac{2S}{a}$; $t_{\text{ветр.}}=\frac{S}{a+v}+\frac{S}{a-v}=\frac{2Sa}{a^2-v^2}$, $t_{\text{безв.}} \wedge t_{\text{ветр.}}$; $\frac{2S}{a}\wedge\frac{2Sa}{a^2-v^2}$, $a^2-v^2 \wedge a^2$. Но $a^2-v^2<a^2$.

Поэтому $t_{\text{безв.}} < t_{\text{ветр.}}$ Другой прием: $t_{\text{ветр.}}-t_{\text{безв.}}=\frac{2Sa}{a^2-v^2}-\frac{2S}{a}=$ $=\frac{2Sv^2}{(a^2-v^2)\cdot a}>0.$

§ 3. 1. Обозначьте $(a-1)(a-6)$ через y и выделите затем полный квадрат. 2. Каждое слагаемое больше, чем $\frac{1}{2n}$.

3. $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)\cdot k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.

4. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{99}{100}\cdot\frac{100}{101}$

5. Решается аналогично задаче 4.

6. Используйте тождество: $(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$. 7. 1) Разложите $(n+1)^n$ по биномиальной формуле. Но $C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots k}<\frac{n^k}{k!}$ ($n>2$, k — натуральное); 2) поэтому $C_n^k\cdot n^{k-1}\leqslant n^n$ и $(n+1)^n\leqslant(n-1)\cdot n^n+$ $+n^2+1$; 3) но при $n\geqslant3$, $n^2+1<2n^2<n^3\leqslant n^n$. Поэтому $(n+1)^n<$ $<(n-1)\cdot n^n+n^n=n^{n+1}$, ч. т. д. 8. 1) Воспользуйтесь формулой, определяющей положение центра тяжести n материальных точек, лежащих на луче (глава I, § 3 задача 10); 2) если $(A_1, m_1), \ldots, (A_n, m_n)$ — несколько материальных точек, лежащих на луче с началом S, L — их центр тяжести и $SA_1<SA_2<\ldots$ $\ldots<SA_n$, то $SA_1<SZ<SA_n$; 3) подберите на луче n материальных точек так, чтобы SA_1, SA_n и SZ оказались равными соответственно крайним и среднему членам доказываемого неравенства; 4) для этой цели положите: $m_1=\cos\alpha_1$, $m_2=\cos\alpha_2$, … … $m_n=\cos\alpha_n$; 5) положите также $SA_1=\operatorname{tg}\alpha_1$, $SA_2=\operatorname{tg}\alpha_2, \ldots, SA_n=\operatorname{tg}\alpha_n$.

9. 1) Рассматривайте каждую часть неравенства

$$\frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{b_1+\cdots+b_n}>\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

как расстояние от начала луча до центра тяжести некоторой системы материальных точек; 2) суммарную массу каждой из этих двух систем положите равной $m=b_1+b_2+\ldots+b_n$; 3) воспользуйтесь задачей 11 из § 3 главы V.

10. 1) Требуется доказать $(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2$; 2) рассмотрите на луче SN такие точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что $SA_1=x_1, \ldots, SA_n=x_n$;

поместите в них массы $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$; 3) примените к этой системе материальных точек теорему Лагранжа; 4) воспользуйтесь тем, что $J_S \geqslant M \cdot SZ^2$, где M — масса всей системы, а Z — ее центр тяжести; 5) после доказательства неравенства заметьте, что $J_S = M \cdot SZ^2$ тогда и только тогда, когда $J_Z = 0$, а это равенство означает, что все материальные точки системы совмещены в точке Z, то есть

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

11. 1) На произвольном луче SN рассмотрите n материальных точек $(A_1, m_1), \ldots, (A_n, m_n)$. К этой системе примените неравенство

$$J_S > M \cdot SZ^2, \text{ где } M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n;$$

2) подберите массы так, чтобы получить $M = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$; 3) достаточно положить $m_1 = a_1^2, m_2 = a_2^2, \ldots, m_n = a_n^2$; 4) подберите затем положение точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, чтобы оказалось $SZ = \frac{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}{n}$; 5) для этого положите:

$$SA_1 = \frac{b_1}{a_1}, \ldots, SA_n = \frac{b_n}{a_n}.$$

13. 1) Рассмотрите равнобедренный треугольник ACB и неравнобедренный $AC'B$, имеющие равные основания и равные высоты (C и C' выбираются по одну сторону от прямой AB, $C \neq C'$); 2) рассмотрите затем точку B', симметричную точке B относительно CC'; 3) воспользуйтесь тем, что ломаная $AC'B' > ACB'$.

14. 1) Воспользуйтесь задачей 13; 2) рассмотрите равнобедренный $\triangle ADB$ и неравнобедренный треугольник AKB и покажите, что из соотношения $S_{\triangle ADB} < S_{\triangle AKB}$ следует, что $AD + DB < AK + KB$. **18.** Пусть M — точка встречи диагоналей AC и BD; M' — любая другая точка. Покажите, что

$$M'A + M'B + M'C + M'D > AC + BD = MA + MB + MC + MD.$$

20. 1) $2S = bc \sin B + ad \sin D = ab \sin A + cd \sin C$;
2) поэтому $4S = bc \sin B + ad \sin D + ab \sin A + cd \sin C < bc + ad + ab + cd = (a + c)(b + d)$, так что $S < \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2} \equiv S_{\text{прибл.}}$ 3) $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2} - S = \frac{1}{4}(a + c)(b + d) - \frac{1}{4}(bc \sin B + ad \sin D + ab \sin A + cd \sin C) = \frac{1}{2} \times \left(b \cdot c \sin^2 \frac{90^\circ - B}{2} + ad \sin^2 \frac{90^\circ - D}{2} + ab \sin^2 \frac{90^\circ - A}{2} + cd \sin^2 \frac{90^\circ - C}{2}\right) \leqslant 2S_{\text{прибл.}} \times \sin^2 \frac{\varphi}{2}$.

Глава X

§ 1. 1. Рассмотрите общие члены всех трех последовательностей. **2** и **3.** В числителе и знаменателе—суммы членов геометрических прогрессий. **5.** 1) Перейдите к дробным показателям. Уравнение можно записать так: $\lim \{x^{S_n}\} = 2$, где $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$; 2) S_n — сумма прогрессии; 3) $S_n \to 1$ при $n \to \infty$; 4) поэтому $x = 2$.

§ 2. 1. а) Покажите, что сумма равна $-(1+2+3+\ldots+100)$. б) Каждое слагаемое можно рассматривать как сумму членов геометрической прогрессии (со знаменателем 10). 7. а) — в) Используйте тождества $k=\frac{k(k+1)}{2}-\frac{(k-1)k}{2}$; $k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}-\frac{(k-1)(k+1)}{3}$ и т. д. г), д) 1) Представьте k^2 и k^3 в виде линейной комбинации выражений k; $k(k+1)$; $k(k+1)(k+2)$; 2) $k^2=k(k+1)-k$; $k^3=k(k+1)(k+2)-3k(k+1)+k$. е) Используйте тождество $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$.

8. $\frac{n+1}{(k+1)(n-k)}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k}$. 9. $\frac{1}{k(k+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$.

10. $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{3\cdot5}\right)$; $\frac{1}{3\cdot5\cdot7}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{5\cdot7}\right)$ и т. д.

11. $\frac{1}{2\cdot5\cdot8}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2\cdot5}-\frac{1}{5\cdot8}\right)$; $\frac{1}{5\cdot8\cdot11}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{5\cdot8}-\frac{1}{8\cdot11}\right)$ и т. д. 12. 1) Выясните, сколько чисел в первых $(n-1)$ строчках. $\left(\text{Ответ: } \frac{(n-1)n}{2}.\right)$ 2) Чему равно первое число n-й строчки? (Ответ: n^2-n+1.) 3) Числа n-й строчки образуют арифметическую прогрессию. 13. Рассмотрите $(1+2+3+\ldots+n)^2$. 14. 1) Умножьте S и T на $\sin\alpha$; 2) каждое из произведений вида $2\sin\alpha\cdot\sin(2k-1)\alpha$ представьте в виде разности двух косинусов; 3) для нахождения суммы T представьте произведение $2\sin\alpha\cos(2k-1)\alpha$ в виде разности двух синусов $(k=1, 2, 3, \ldots, 50)$.

§ 5. 8. а) Заметьте, что будут сколь угодно большие промежутки, состоящие только из нулей. Дальше рассуждайте от противного. 9. При делении 1 на 7 получаем на каком-то этапе в остатке цифру 3. Тем самым уже вполне определены все последующие остатки и частные. Но такие же остатки (и, следовательно, частные) получим мы при делении 3 на 7. Отсюда ясно, как найти период дроби $\frac{3}{7}$. На рисунке 127 следует выбрать число 3 (расположенное внутри окружности) и, начиная с расположенной рядом с ним (вне окружности) цифры (4), выписать следующие за ней цифры в направлении, указанном часовой стрелкой.

Аналогично находят периоды дробей $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{7}$.

§ 6. 6. 1) Из формул (6) следует, что при любом k

$$Q_k\cdot P_{k-1}-P_kQ_{k-1}=-(Q_{k-1}\cdot P_{k-2}-P_{k-1}\cdot Q_{k-2});$$

2) записывая это тождество при $k=n$; $n-1$; $n-2, \ldots, 3$, 2 и перемножая почленно полученные равенства, придем (после сокращения) к (7). 12. Воспользуйтесь следующим равенством, вытекающим из рекуррентных формул (6):

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot q_{n-1}}{Q_n\cdot Q_{n-2}}.$$

13. Следует из задачи 12.

14. 1) Рассмотрите цепную дробь, у которой подходящими дробями порядка $n-1$, n и $n+1$ являются соответственно числа

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\quad \frac{P_n}{Q_n},\quad \alpha;$$

2) Если $\alpha = q_0 + \frac{1|}{|q_1} + \ldots + \frac{1|}{|q_n} + \ldots + \frac{1|}{|q_m}$, то искомой в пункте 1) цепной дробью является $q_0 + \frac{1|}{|q_1} + \ldots + \frac{1|}{|q_n} + \frac{1|}{|x_{n+1}}$, где $x_{n+1} = q_{n+1} + \frac{1|}{|q_{n+2}} + \ldots + \frac{1|}{|q_m}$; 3) По рекуррентным формулам (6) имеем

$$\alpha = \frac{x_{n+1} \cdot P_n + P_{n-1}}{x_{n+1} \cdot Q_n + Q_{n-1}};$$

4) отсюда

$$\left(\alpha - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) : \left(\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right) = x_{n+1} \cdot \frac{Q_n}{Q_{n-1}} > 1;$$

5) поэтому

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right| < \left|\alpha - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|.$$

16. Убедитесь сначала, что

$$\left|\alpha - \frac{P_{10}}{Q_{10}}\right| < \left|\frac{P_{11}}{Q_{11}} - \frac{P_{10}}{Q_{10}}\right| = \frac{1}{Q_{11} \cdot Q_{10}} < \frac{1}{Q_{10}^2}.$$

17. а) Обозначим данное выражение через x. Тогда $x = 1 + \frac{1}{x}$. Из двух корней этого уравнения следует выбрать положительный; б) если x — рассматриваемое выражение, то $x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + x}}$.

§ 7. 3. Заменяя уравнение г) уравнением $3x = x + n\pi$, мы приобретаем посторонние корни. 6. Разделите обе части на $9^{-\frac{1}{x}}$ и введите обозначение: $(2:3)^{-\frac{1}{x}} = y$. 7. $\log_{\sin x} \cos x = 1 : \log_{\cos x} \sin x$. Ограничиться рассмотрением логарифмов при положительных основаниях. 8. $\sin 2x = \frac{\pi}{3} > 1$. 9. В каких пределах меняется правая часть? (От — 1 до 1.) А левая? (От 1 до ∞.) Когда возможно равенство? (Если $2^{\sin^2 x} = 1$ и $\sin x = 1$.) 10. Корни уравнения должны удовлетворять одновременно трем условиям: $\cos^2 x = 1$ и $2^{\sin^4 x} = 1$. 11. Корни уравнения должны удовлетворять одновременно трем условиям: $\cos^2 x = 1$; $\cos^2 5x = 1$ и $\sec^2 10x = 1$. 12. Левая часть не больше, чем 2; правая — не меньше, чем 2. Должны одновременно иметь место равенства: $\sin^2 x = 1$; $\cos^2 x = 1$; $\sec^2 3x = 1$. 13. $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$. 14. Перенесите $\sin^2 x$ вправо; тогда левая часть уравнения не меньше, чем 1, правая — не больше, чем 1. Поэтому равенство возможно лишь тогда, когда обе части равны 1. 15. Какова область существования левой части?

Глава XI

§ 1. 1) Используйте теорему о трех перпендикулярах; 2) пусть AC_1 — диагональ куба, BD — диагональ его грани. Убедитесь, что проекция прямой AC_1 на эту грань перпендикулярна к BD; 2. Тетраэдр $ABCD$ может быть получен из куба отпиливанием четырех равных между собой пирамид. Объем каждой $\frac{1}{6} v$.

3. Решите сначала аналогичную задачу для треугольника. Примите общую вершину трех распиленных ребер за вершину основания пирамиды. 4. а) Проведите произвольное сечение, параллельное двум скрещивающимся ребрам тетраэдра. Докажите, что в сечении — параллелограмм. Докажите, что сечение — прямоугольник. Когда этот прямоугольник станет квадратом? 5. 1) Пусть в пирамиде $PABC$ сначала провели срез по $\triangle A_1B_1C_1$, а затем — по $\triangle AC_1B$. Ищется вес пирамиды C_1ABP; 2) $V_{AC_1BP} : V_{C_1A_1B_1P} = S_{ABP} : S_{A_1B_1P} = (CP:C_1P)^2$; $CP : C_1P = 1 : \sqrt[3]{a}$. 6. Пусть $SABC$ — данный тетраэдр; $SA = a$; $SB = b$; $SC = c$. Тогда по условию $BC = a$; $AC = b$; $BA = c$. Достройте пирамиду $SABC$ до призмы $ABCSB_1C_1$. Докажите, что $V_{SABC} = \frac{1}{2} V_{SB_1C_1CB}$. Но B_1C_1CB — ромб, в котором известна сторона. Если O — точка пересечения диагоналей этого ромба, то $SO \perp B_1C$; $SO \perp BC_1$; SO, OB, OC найдите из системы уравнений: $SO^2 + OC^2 = SC^2$; $SO^2 + OB^2 = SB^2$; $OB^2 + OC^2 = BC^2$. 10. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров радиуса R, O — центр четвертого шара, r — его радиус, A_1, A_2, A_3, A — точки касания шаров со столом. Тогда $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2R$; $OO_1 = OO_2 = OO_3 = R + r$; $O_1A_1 = O_2A_2 = O_3A_3 = R$. Пусть $OD \perp A_1O_1$ и D на A_1O_1. Выразите двумя способами O_1D через R и r и приравняйте результаты

$$\left(R - r = \sqrt{(R+r)^2 - \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2}\right).$$

§ 2. 5. Рассмотрите сначала аналогичную задачу на плоскости. 7. 1) Напрашивается ответ: искомая точка P может быть только Южным полюсом. Это неверно! 2) Кроме Южного полюса, ищите еще точки P, обладающие указанным в условии свойством, в северном полушарии, за полярным кругом.

§ 3. 1. Выразите диагональ через две стороны и угол между ними, затем через две другие стороны и угол между ними; исключив затем вспомогательные углы, выразите диагональ только через стороны. 2. Выразите BA^2 и BC^2 по теореме косинусов через $\angle BDA$ и отрезки BD, DA, CD. Исключите затем $\angle BDA$. 3. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, S — его площадь. Тогда $2S = (ab + cd)\sin B$. Выразите затем диагональ двумя способами через стороны и угол B. Исключите затем из этих двух соотношений диагональ, а затем из полученных формул исключите B. 4. Используйте задачу 3. 5. Пусть A_1, B_1, C_1—центры правильных треугольников, построенных на BC, CA, AB. Покажите, что $\angle A_1CB_1$ равен $\angle C + 60°$ или $300° - \angle C$, так что $\cos(A_1CB_1) = \cos(60° + C)$. Выразите A_1B_1 через a, b и C; B_1C_1 — через b, c, A. Докажите затем, что $A_1B_1^2 - B_1C_1^2 = 0$. Другое решение: показать, что

$$A_1B_1^2 = B_1C_1^2 = C_1A_1^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S), \text{ где } S = S_{\triangle ABC}.$$

Глава XII

§ 1. 2. Умножьте сумму на $\sin\alpha$ (общий прием для вычисления сумм $\sum_{n=0}^{m} \sin(a + nh)$ или $\sum_{n=0}^{m} \cos(a + nh)$: нужно сумму умножить на $\sin\frac{h}{2}$).

5. 1) Положим для краткости $\frac{2K(1-\cos\gamma)}{R_3} = C$, $\frac{R_3}{R_B} - \cos\gamma = A$, $\sin\gamma = B$. Тогда $V_0^2 = \frac{C}{A + (B\sin 2\beta - A\cos 2\beta)}$, V_0^2 принимает наимень-

шее свое значение тогда, когда $B \cdot \sin 2\beta - A\cos 2\beta$ принимает свое наибольшее значение; 2) введите вспомогательный угол φ так, чтобы $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\varphi$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\varphi$ $(0 < \varphi < 2\pi)$.

Тогда $B\sin 2\beta - A\cos 2\beta = \sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin(2\beta-\varphi)$;
3) это выражение принимает свое наибольшее значение $\sqrt{A^2+B^2}$, когда $\sin(2\beta-\varphi) = 1$, то есть

$$\beta = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi \; (k = 0, \; \pm 1, \; \pm 2, \ldots).$$

6. 1) Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм, O — точка пересечения диагоналей; $\angle AOB = \varphi$. Тогда его площадь $S = 2OA \cdot OB \cdot \sin\varphi$; 2) с помощью теоремы косинусов свяжите известные OA и OB с a, b, φ;
3) $a^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\varphi$, $b^2 = OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB\cos\varphi$;
4) отсюда найдите $OA \cdot OB$ (не разыскивая отдельно сомножители).

7. 1) Пусть $OP = x$, $\angle BOP = \beta$. Составьте систему двух уравнений с двумя неизвестными β и x;
2) $\sin\beta = \frac{b}{x}$, $\sin(\varphi-\beta) = \frac{a}{x}$;
3) исключите неизвестное β, для чего с помощью первого уравнения найдите еще $\cos\beta$ и подставьте $\sin\beta$ и $\cos\beta$ во второе уравнение (предварительно развернув его по формуле для синуса разности).

8. 1) Пусть L — Луна, O — Земля, B — Берлин, K — Капштадт, $OL = x$; $\angle OLB = \alpha$, $\angle OLK = \beta$. Покажите, что задача сводится к решению системы (относительно x, α, β).

$$x = \frac{R\sin\gamma}{\sin\alpha}, \quad x = \frac{R\sin\delta}{\sin\beta}, \quad \alpha+\beta = \theta, \text{ где } \theta = \gamma+\delta-\varphi-\psi;$$

2) сначала найдите α; 3) α и β удовлетворяют системе:

$$\alpha+\beta = \theta; \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = m, \text{ где } m = \frac{\sin\gamma}{\sin\delta};$$

4) составив производную пропорцию

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{m-1}{m+1},$$

выведите отсюда, что

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{m-1}{m+1}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Отсюда найдите α; 5) зная α, R и γ, вычислите x.

§ 2. 6. Покажите, что левая часть заключена между $\frac{3}{4}\pi$ и $\frac{3}{2}\pi$. **7.** Покажите, что левая часть заключена между π и 2π. **8.** 1) Так как $x>1$, то $\sqrt{(1-x^2)^2} = x^2-1$. 2) Данное выражение положительно, но меньше, чем $\frac{3}{2}\pi$. **9.** Рассмотрите точку D', симметричную точке D относительно EF. Рассмотрите $\angle ECD'$. $\angle D'EC = \angle ECA + \angle EDA$. $\angle D'EC = 45^\circ$.

§ 4. 6. а) $|(m+ni)^2|^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$. С другой стороны, $|(m+ni)^2|^2=(|m+ni|^2)^2=(m^2+n^2)^2$; б) пусть $z=|m+ni|^2$. Представьте z^3 в виде суммы двух точных квадратов. 7. $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=|a+i|^2\times\times|b+i|^2\cdot|c+i|^2=|(a+i)(b+i)(c+i)|^2=|abc-(a+b+c)+i(ab+bc+ca-1)|^2=[abc-(a+b+c)]^2+(ab+bc+ca-1)^2$.
8. $(a_1^2+b_1^2)\ldots(a_n^2+b_n^2)=|(a_1+ib_1)\ldots(a_n+ib_n)|^2$.
9. 1) Модуль левой части уравнения равен 1; 2) левая часть уравнения равна 1; 3) поэтому $y=0$, $x=1$. 10. а) Сводится к системе $x^2=y$, $y^2=x$; б) $x^3=y$, $y^3=x$. 11. 1) Пусть $\arg z=\alpha$. Воспользуйтесь формулой $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; 2) убедитесь, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}$. Пользуясь тем, что $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$, выведите отсюда требуемое равенство.

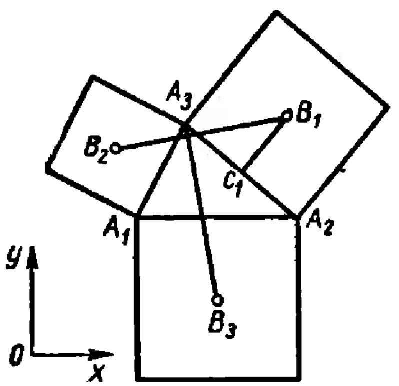


Рис. 187.

§ 5. 3. а) 1) Рассмотрите вспомогательную сумму

$$T=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{\cos^n\alpha};$$

2) составьте выражение $S+iT$;

3) $S+iT=1+\frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}+\left(\frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}\right)^2+\ldots+\left(\frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}\right)^n$;

4) $S+iT=\frac{e^{(n+1)i\alpha}-\cos^{n+1}\alpha}{(e^{i\alpha}-\cos\alpha)\cdot\cos^n\alpha}$;

5) найдите S, выделив в правой части последней формулы вещественную часть;

б) составьте сумму $T+iS$ и воспользуйтесь формулой Муавра.

5. 1) Пусть $A_1A_2A_3$ (рис. 187) — данный треугольник (вершины A_1, A_2, A_3 следуют в указанном порядке при обходе контура против часовой стрелки); B_1, B_2, B_3 — центры квадратов, противолежащих этим вершинам. Пусть a_{12} и c — комплексные координаты векторов B_1B_2 и B_3A_3. Чтобы решить задачу, достаточно вычислить отношение $a_{12}:c$; 2) $a_{12}=b_2-b_1$, $c=a_3-b_3$; 3) пусть C_1 — середина отрезка A_2A_3. Тогда вектор $\overrightarrow{C_1B_1}$ получается из вектора $\overrightarrow{C_1A_2}$ поворотом на $\frac{\pi}{2}$ радиан. Это позволяет вычислить b_1; 4) $b_1-c_1=(a_2-c_1)i$, $c=\frac{1}{2}(a_2+a_3)$. Поэтому $b_1=\frac{1}{2}(a_3+a_2)+\frac{1}{2}(a_3-a_2)\cdot i$; 5) написав аналогичные формулы для b_2 и b_3, легко убедиться, что $a_{12}:c=i$; 6) это означает, что векторы, изображаемые этими числами (то есть $\overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{B_3A_3}$), равны по длине и взаимно перпендикулярны.

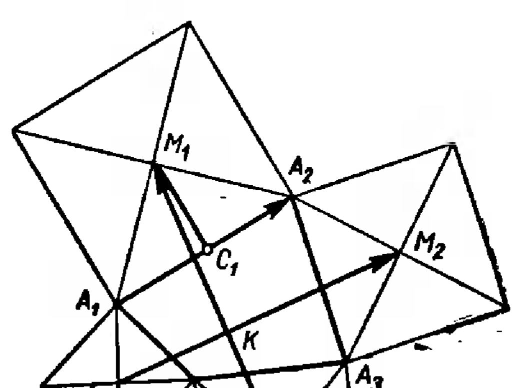


Рис. 188.

6. 1) См. рисунок 188. Обобщение предыдущей задачи (задача 5 получается, когда $A_4A_1\to 0$). Решается по той же схеме, что задача 5; 2) покажите, что

$$m_k = \frac{1}{2}(a_{k+1} + a_k) + \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k)\,i \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ a_5 \equiv a_1); \qquad (1)$$

3) векторы $\overrightarrow{M_3M_1}$ и $\overrightarrow{M_4M_2}$ имеют комплексные координаты $m_1 - m_3$ и $m_2 - m_4$. Пользуясь (1), покажите, что $m_3 - m_1 = (m_4 - m_2)\, i$. **8.** 1) Сначала убедитесь, что при любом вещественном φ $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi$. Покажите что $(e^{i\beta} - e^{i\alpha}) : e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} = 2i \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$. **9.** 1) Вспомните формулу, выражающую S через радиус описанной окружности и стороны треугольника. 2) Воспользуйтесь задачей 8. **12.** 1) Пусть $Z \equiv AB \times OC$. Выразите сначала c через z; 2) покажите, что $c = 1 : \bar{z}$; 3) воспользуйтесь тем, что $z = \frac{1}{2}(a + b)$ и $\bar{a} = 1 : a$.

РЕШЕНИЯ

Глава I

§ 1. 8. В результате переливаний состав жидкости в бутыли изменился, именно: определенное количество спирта было заменено водой. Общий же вес жидкости в бутыли не изменился. Значит, в бутыль было влито столько граммов воды, сколько было взято из нее граммов спирта. Куда же девался этот спирт? Он был вылит в бочонок с водой. Итак, в бочонке столько же граммов спирта, сколько граммов воды в бутыли.

Глава II

§ 1. 18. Эти множества эквивалентны: взаимно однозначное соответствие между ними устанавливается, если каждому нечетному числу сопоставить непосредственно следующее за ним четное.

19. Эти множества равномощны; чтобы установить взаимно однозначное соответствие, достаточно каждому натуральному числу n сопоставить число $2n$:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots \end{array}$$

20. Эти множества равномощны. Действительно, все целые числа можно расположить в одну последовательность

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3\ \ldots .$$

В эту последовательность каждое целое число входит с каким-то номером (0 — это число № 1 в этой последовательности, 1 — число № 2, — 1 — число № 3 и т. д.). Если сопоставим каждому целому числу его номер в этой последовательности, то мы тем самым установим взаимно однозначное соответствие между множеством всех целых чисел и множеством всех натуральных чисел.

21. Пусть X — точка отрезка AB (длина его 1 *см*), x — расстояние точки X от начала отрезка; аналогично, пусть Y — точка отрезка CD (длина его 1 *дм*), y — расстояние от начала этого отрезка до точки Y. Сопоставим каждой точке X такую точку Y, что $y = 10x$. Тем самым устанавливается равномощность данных отрезков.

22. Возможность установления взаимно однозначного соответствия между произвольным интервалом AB (безразлично, какой длины) и бесконечной прямой MN ясно из рисунка 189. Здесь $OA = OB$, $AB \perp MN$. Путем проектирования из точки S_1 мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между OA и лучом OM; путем проектирования из точки S_2 устанавливаем эквивалентность OB и луча ON.

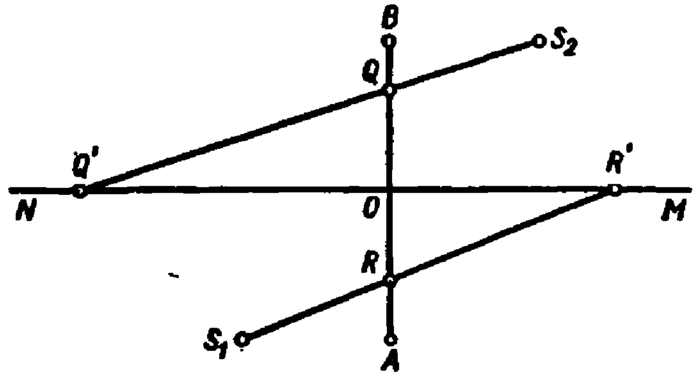


Рис. 189.

§ 2. 2. Алгоритм таков: найди остаток d от деления числа n на 11; сначала назови число d; после каждого хода противника назови число, которое на 11 больше числа, названного тобою на предыдущем ходе; если разность между числом n и числом, названным противником, меньше 11, то назови число n.

§ 3. 2. Если один угол является внешним для треугольника, а второй — внутренним, не смежным с этим внешним углом, то первый из этих углов больше второго.

Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3.

Если прямая является биссектрисой угла треугольника, то она делит сторону, противолежащую этому углу, в отношении, равном отношению двух других сторон.

Если число четное, то и его квадрат является четным числом. Если три точки являются вершинами треугольника, то существует окружность, проходящая через все эти точки.

12. Профессор знал, что истинно утверждение:

А. Если человек—верующий христианин, то его съедят людоеды. Отсюда он сделал вывод, что верно утверждение.

В. Если человек не является верующим христианином, то людоеды его не съедят.

Утверждение *В* является противоположным по отношению к *А*. Но если верно прямое утверждение, то еще ничего нельзя сказать о том, верна ли или не верна противоположная теорема. Вот если бы людоеды ели только верующих христиан, то жизнь профессора была бы в безопасности.

13. Утверждение больного можно кратко сформулировать так:

А. Если есть обострение, то будет улучшение после ванн.

Врач утверждает: иногда бывает, что нет обострения, но наступает улучшение после ванн. Тем самым он опроверг утверждение:

В. Если нет обострения, то нет улучшения после ванн.

Но больные этого не утверждали; утверждение *В* противоположно утверждению *А*.

Опровержением предложения *А* было бы следующее утверждение:

Иногда бывает, что есть (во время лечения) обострение, но улучшения (от ванн) нет.

§ 4. 1. «Допущу, что у товарища в левом кулаке 3 копейки, а в правом — 20 копеек. В таком случае товарищ, выполняя требуемые вычисления, должен был получить $2\cdot 3 + 3\cdot 20 + 6 = 72$. Но он получил 55. Следовательно, допущение ложно. У товарища в левом кулаке 20 копеек».

5. Пусть верно, что (в пустоте) быстрее падает то тело, которое тяжелее. Тогда скорость большого камня должна быть больше скорости малого камня, и поэтому, когда мы эти камни свяжем, малый камень должен тормозить большой камень и вместе они будут падать *медленнее*, чем большой камень. С другой стороны, два связанных вместе камня — это тело, которое тяжелее большего камня, и, следовательно, оно должно падать *быстрее* большого камня. Мы полу-

чили два противоречащих друг другу вывода из сделанного допущения. Значит, оно ошибочно.

15. Допустим, что доказываемое предложение ошибочно. Тогда должны существовать таких два числа x_1 и x_2, для которых имеют место такие неравенства:

$$0 < x_1 < x_2,$$

и в то же время

$$\log_a x_2 < \log_a x_1 \qquad (a > 1).$$

Так как (при $a > 1$) функция a^y постоянно возрастает с возрастанием y, то

$$a^{\log_a x_2} < a^{\log_a x_1},$$

то есть $x_2 < x_1$, что противоречит условию.

§ 5. 11. а) Контрпример: выбираем произвольный $\triangle ABC$, в котором $AC > AB$, $AC > BC$. Через A и C проводим соответственно прямые $a \parallel BC$, $c \parallel AB$. На той дуге окружности с центром B, радиуса AC, которая лежит внутри угла ABC, вне a и c выбираем произвольную точку D. $ABCD$ — четырехугольник с равными диагоналями, но без параллельных сторон.

Глава IV

§ 2. 1. Уравнение $89x = 10z + y$, где $1 < x < 9$, $0 < y < 9$, $0 < z < 9$, имеет единственное решение $x = 1$, $y = 9$, $z = 8$.

2. Пусть ученик $А$ сел на стул с номером x, $Б$ — на стул с номером y, а $В$ — на стул с номером z. Тогда

$$2x + 10y + 11z = S, \tag{1}$$

где S— сумма, которую ребята сообщают ведущему (в нашем примере $S = 141$). Кроме того, сумма всех трех номеров равна $3 + 5 + 8 = 16$, то есть

$$x + y + z = 16. \tag{2}$$

Из (1) — (2) следует, что

$$2x + 10y + 11(16 - x - y) = S,$$

то есть

$$9x + y = 176 - S,$$

$$x + \frac{y}{9} = \frac{176 - S}{9}. \tag{3}$$

Так как $0 < y < 9$, то из (3) следует, что x — частное от деления числа $176 - S$ на 9, а y — остаток. Если $S = 141$, то $176 - S = 35$; $\frac{35}{9} = 3 + \frac{8}{9}$; $x = 3$, $y = 8$.

4. б) Из $5x + 8y = 7$ и $5 \cdot 3 + 8 \cdot (-1) = 7$ следует, что $5(x - 3) + 8(y + 1) = 0$. Поэтому (при целых x, y) $x - 3$ делится на 8, $y + 1$ делится на 5, так что $\frac{x - 3}{-8} = \frac{y + 1}{5} = t$, где t — целое число. Отсюда $x = 3 - 8t$, $y = -1 + 5t$.

5. Из $ax + by = c$, $ax_0 + by_0 = c$ и целочисленности x и y следует $\frac{x - x_0}{-b} = \frac{y - y_0}{a} = t$, где t — целое число. Поэтому $x = x_0 - b \cdot t$, $y = y_0 + a \cdot t$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

6. Задача сводится к неопределенному уравнению $5x - 13y = 1$. Нетрудно подметить частное решение: $x_0 = 8$, $y_0 = 3$. Поэтому общее решение таково: $x = 8 + 13t$, $y = 3 + 5t$ (t — целое число). По условию $5x = 5(8 + 13t) > 200$ и $y = 3 + 5t < 20$, откуда $2\frac{6}{13} < t < 3\frac{2}{5}$, то есть $t = 3$, $y = 18$.

7. Допустим, что уже построили $\frac{1}{5}$ окружности и $\frac{1}{17}$ окружности. Подберем затем целые числа x и y так, чтобы

$$x \cdot \frac{1}{5} - y \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{85}. \qquad (1)$$

Иначе говоря, $17x - 5y = 1$. Частным его решением является, например, пара чисел: $x_0 = 3$ и $y_0 = 10$. Действительно,

$$17 \cdot 3 - 5 \cdot 10 = 1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) видно, что $17(x - 3) - 5(y - 10) = 0$, откуда

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y-10}{17} = t \quad (t \text{ — целое число}).$$

Давая t — произвольные целочисленные значения, получим бесконечно много способов для решения исходной задачи.

9. Пусть какой-либо из трех школьников купил x книг по 50 коп., y — по 20 коп., z — по 10 коп. и u — по 5 коп. Тогда $5x + 2y + z + \frac{1}{2}u = 20$; $x + y + z + u = 20$. Отсюда

$$u = 8x + 2y, \qquad (1)$$

$$z = 20 - 9x - 3y. \qquad (2)$$

Так как ученик купил книги четырех различных наименований, то $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$, $u \geqslant 1$. Из (2) ясно, что $x \leqslant 1$. Значит, $x = 1$, $u = 8 + 2y$, $z = 11 - 3y$. Ясно, что $y < 3$. Результат мы располагаем в виде такой таблицы

	x	y	z	u
1-я возможность	1	1	8	10
2-я возможность	1	2	5	12
3-я возможность	1	3	2	14

По возможным значениям для z (8, 5, 2) заключаем, что Алик воспользовался второй возможностью, Боря — 3-й, а Володя — первой.

12. Обозначим искомое число через x. Тогда $x + 7 = 7y$ (1), $7y + 8 = 8z$ (2), $8z + 9 = 9t$ (3), где y, z, t — целые числа. Решая уравнение (2), получим $z = 1 + 7v$, $y = 8v$. Аналогично из уравнения (3) $t = 1 + 8u$, $z = 9u$ (u и v целые). u и v связаны между собой. Это следует из равенств $z = 1 + 7v$ и $z = 9u$. Решая уравнение $1 + 7v = 9u$, найдем $u = 7k - 3$, $v = 9k - 4$ (k — любое целое). Тогда $y = 8(9k - 4)$, а $x = 7(72k - 33)$. Трехзначные числа получим при $k = 1(273)$ и $k = 2(777)$. Подходит нам, очевидно, лишь 273.

15. Пусть один крестьянин купил x вещей, а его жена y вещей. Тогда $x^2 - y^2 = 63$. Отсюда видно, что $x - y$ и $x + y$ — натуральные множители, на которые разлагается число 63. Но это число лишь тремя способами разлагается на множители: $63 = 1 \cdot 63 = 3 \cdot 21 = 7 \cdot 9$.

Поэтому приходим к рассмотрению трех случаев:

I. $x - y = 1, \quad x + y = 63, \; x = 32, \; y = 31.$

II. $x - y = 3, \quad x + y = 21, \; x = 12, \; y = 9.$

III. $x - y = 7, \quad x + y = 9, \quad x = 8, \; y = 1.$

Разность 23 — это, по условию, разность между числом вещей, купленных Петром, и числом вещей, купленных Марией; с другой стороны, эта разность может быть получена лишь при вычитании чисел 32 и 9 (из полученных при решении систем I—III). Поэтому крестьянин, купивший 32 вещи, — это Петр; крестьянка, купившая 9 вещей, — это Мария. Так как $11 = 12 - 1$, то сходными рассуждениями убедимся, что 12 вещей купил Павел, а 1 вещь— Екатерина. Но тогда 8 вещей и 31 вещь купили соответственно Андрей и Валентина. Итак, Валентина — жена Петра, Мария — жена Павла, Екатерина — жена Андрея.

16. Если $x > 1$ и $y > 1$, то левая часть уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{z}$$

меньше, чем 1, тогда как правая всегда больше, чем 1, и равенство невозможно. Поэтому $x = 1$ или $y = 1$. При $x = 1$ $y = z$. Получаем бесконечно много решений, полагая $z = 1, 2, \ldots.$ При $y = 1$, $x = z$, что приводит к новой бесконечной серии решений.

17. Легко найти все решения уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z} \tag{1}$$

при $x = 2$ $\qquad y = 2;$

при $x = 2$ $\qquad y = z; \qquad (z = 1, 2, \ldots).$ (2)

при $y = 2$ $\qquad x = z.$ (3)

Остается рассмотреть такие случаи: I. Хотя бы одно из чисел x или y равно 1. II. Оба числа x и y не меньше, чем 3.

Пусть $x = 1$. Тогда $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{y}$. Правая часть этого равенства при любом натуральном y больше, чем $\frac{1}{2}$. А левая часть больше, чем $\frac{1}{2}$, лишь при $z = 1$. Поэтому $z = 1$ и, следовательно, $y = 2$. Итак, получаем решение: $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$, и аналогично можно получить другое решение: $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$.

Оба эти решения уже содержатся в формулах (2) — (3). Нам остается рассмотреть случаи, когда $x \geqslant 3$ и $y \geqslant 3$. Если одно из чисел x или y больше, чем 3, то второе равно 3. Действительно, если $x \geqslant 4$ и $y \geqslant 4$, то $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{2}$, так что (1) не имеет места.

С другой стороны, ни одно из чисел x, y не может быть больше, чем 5. Действительно, пусть $x \geqslant 6$; тогда $y = 3$ и

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{z},$$

то есть равенство (1) не выполняется. После этого уже легко перебрать все оставшиеся решения уравнения (1): $x = 3$, $y = 3$, $z = 6$; $x = 3$, $y = 4$, $z = 12$; $x = 3$, $y = 5$, $z = 30$; $x = 4$, $y = 3$, $z = 12$; $x = 5$, $y = 3$, $z = 30$.

§ 5. 1. Будем истолковывать x как время. Величина $x^3 + x$, которая изменяется с течением времени непрерывно, была в начальный момент (при $x = 0$) меньше единицы, а по истечении, скажем, 100 единиц времени (то есть при $x = 100$) она стала, очевидно, большей, чем 1; поэтому ясно, что в какой-то промежуточный

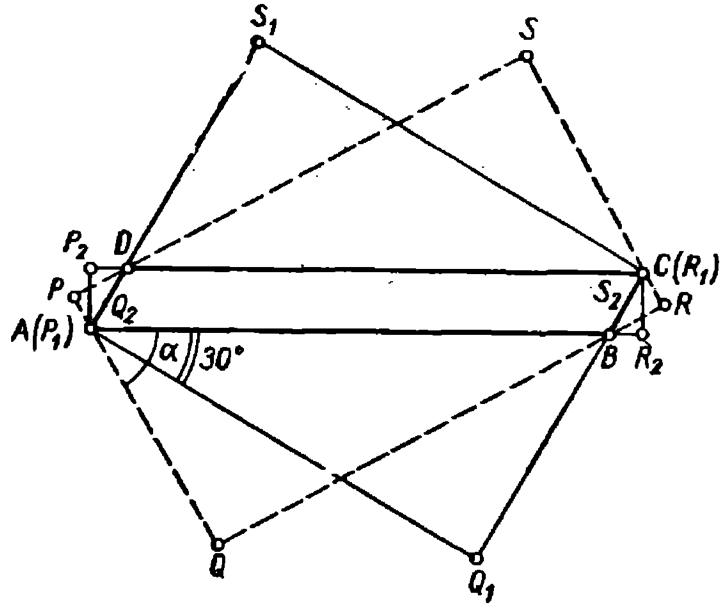


Рис. 190.

момент x_0 она должна была оказаться равной 1, то есть $x_0^3 + x_0 = 1$. А это и означает, что уравнение $x^3 + x = 1$ наверняка имеет положительный корень.

Заметим еще, что при $x = \frac{1}{2}$ величина $x^3 + x$ меньше, чем 1, а при $x = 1$ величина $x^3 + x = 2 > 1$. Когда время x изменялось от $\frac{1}{2}$ до 1, величина $x^3 + x$, изменяясь непрерывно, должна была в какой-то момент x_0 оказаться равной 1.

2. В момент времени $x = 2\pi$ величина $f(x) = x + 0,3 \sin x$ была меньше, чем 6,7; с ростом x до 3π величина $f(x)$ изменялась непрерывно; и при $x = 3\pi$ величина $f(x)$ уже оказалась большей, чем 6,7 (она равна $3\pi > 9$). Значит, в какой-то промежуточный момент x_1 она была равна 6,7, то есть $x_1 + 0,3 \cdot \sin x_1 = 6,7$. Это число x_1 и является корнем рассматриваемого уравнения.

3. Проведем прямую, параллельную линии центров данных кругов и касающуюся большей окружности. Будем теперь эту прямую перемещать параллельно самой себе так, чтобы она, скажем, равномерно приближалась к линии центров. Обозначим через $u(u = u(t))$ суммарную длину хорд, высекаемых данными окружностями из движущейся прямой в момент времени t. В *начале* движения $u = 0$; в конце движения она равна сумме диаметров данных кругов, то есть 6 *дм*, а это уже больше, чем $\sqrt[1970]{1970}$ *дм*, (ибо $1970 < 2^{1970}$, так что $\sqrt[1970]{1970} < 2$). Поэтому в какой-то промежуточный момент времени прямая занимала такое положение, при котором величина u была *равна* $\sqrt[1970]{1970}$ *дм*.

4. Построим сначала прямоугольник $P_1Q_1R_1S_1$ (рис. 190), который описан около параллелограмма $ABCD$. Легко видеть, что это не квадрат: $P_1Q_1 > P_1S_1$.

Проведем теперь через точку A прямую PQ, и пусть угол $\alpha \equiv \measuredangle BAQ > 30°$. Прямую PQ будем равномерно поворачивать вокруг точки A от того положения, когда она образует с AB угол в 30° (то есть занимает положение P_1Q_1) до того положения, когда она окажется перпендикулярной к прямой AB. Каждый раз будем строить на прямой PQ прямоугольник, описанный около параллелограмма $ABCD$. С течением времени каждая сторона прямоугольника $PQRS$ будет изменяться непрерывно и непрерывно будет меняться разность $PQ—PS$. В начальный момент (когда $\alpha = 30°$) эта разность (как мы уже видели выше) положительна, в конечный момент (при $\alpha = 90°$) она уже отрицательна; следовательно, в какой-то промежуточный момент времени (при каком-то $\alpha = \alpha_0$) эта разность равна 0, то есть $PQ = PS$, и прямоугольник $PQRS$ — квадрат.

§ 3. 2. Пусть A, B, C — вершины треугольника (рис. 191). Центр тяжести системы трех материальных точек $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ обозначим через O. Заменим $(B, 1)$ и $(C, 1)$ их материальным центром $(A_1, 2)$ (A_1 — середина отрезка BC); от этого положение центра тяжести всей системы не изменится. Но теперь система состоит лишь из двух материальных точек: $(A, 1)$ и $(A_1, 2)$. Поэтому O — на отрезке AA_1, причем по правилу рычага $1 \cdot OA = 2 \cdot OA_1$ (то есть $OA : OA_1 = 2 : 1$). Аналогично убедимся, что O лежит на медианах BB_1 и CC_1. Следовательно, три медианы AA_1, BB_1, CC_1 имеют общую точку.

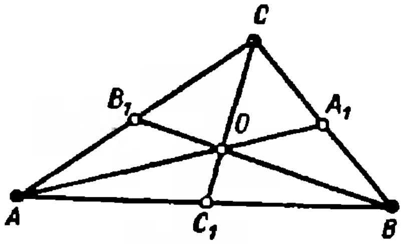


Рис. 191

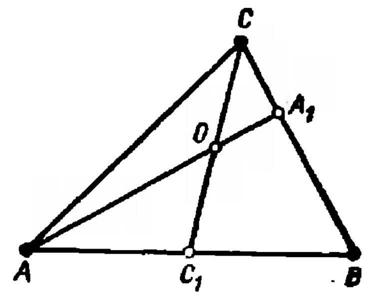


Рис. 192.

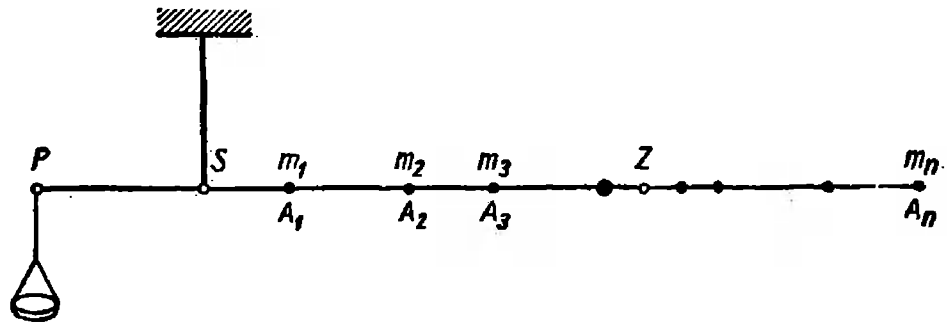


Рис. 193

3. Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 192) точка O — середина медианы CC_1. Тогда O — барицентр системы из трех материальных точек $(A, 1)$, $(B, 1)$ и $(C, 2)$. Заменим $(B, 1)$ и $(C, 2)$ их материальным центром $(A_1, 3)$; тогда получим систему лишь из двух материальных точек $(A, 1)$ и $(A_1, 3)$, и ее барицентром будет точка O. Это означает, что O — на отрезке AA_1, то есть A_1 и есть точка встречи прямой AO с BC. Так как A_1 — барицентр $(B, 1)$ и $(C, 2)$, то по правилу рычага $CA_1 : A_1B = 1 : 2$.

8. Без потери общности можно считать, что $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Выберем на прямой SA_n точку P так, чтобы $SP = 1$ и S была между P и A_1 (рис. 193). Представим себе теперь рычажные весы с плечами SP и SA_n. Плечи будем себе представлять в виде невесомых стержней (практически это означает, что массы стержней ничтожны по сравнению с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$). Если на правом плече в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не помещены никакие массы, а на левом плече тоже нет никаких нагрузок, то весы будут в равновесии. Поместим теперь в A_1 массу m_1. Чтобы весы по-прежнему остались в равновесии (чтобы правое плечо не перетянуло), поместим в P (на левой чашке весов) тоже некоторую массу n_1. Тогда в силу правила рычага

$$n_1 \cdot 1 = m_1 \cdot x_1, \text{ или } n_1 = m_1 \cdot x_1.$$

Затем поместим в A_2 массу m_2, а для сохранения равновесия нужно поместить в точке P еще массу n_2, которая может быть определена по правилу рычага:

$$n_2 \cdot 1 = m_2 \cdot x_2, \text{ или } n_2 = m_2 \cdot x_2.$$

Аналогичным образом поместим в $A_3, A_4, \ldots, A_n$ массы $m_3, m_4, \ldots, m_n$, а для сохранения равновесия придется в точке P еще поместить массы $m_3x_3, \ldots, m_nx_n$. В результате на плече SA_n окажутся n материальных точек $(A_1m_1), \ldots, (A_n, m_n)$, а в точке P — масса $k = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n$. При этом весы будут в равновесии. Равновесие не нарушится, если массу M всех материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \ldots, (A_n, m_n)$ сосредоточим в их центре тяжести Z. Но тогда точка S окажется центром тяжести двух материальных точек: (P, k) и (Z, M).

По правилу рычага $k \cdot 1 = M \cdot SZ$, откуда

$$z \equiv SZ = \frac{k}{M} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

10. Пусть $n = 2$; B_1, B_2, B — проекции точек A_1, A_2, Z на a. По правилу рычага $A_1Z : ZA_2 = m_2 : m_1$. Пусть для определенности $B_1 \neq B_2$ и $z_1 < z_2$. Из трапеции $B_1B_2A_2A_1$ легко усмотреть, что $(z - z_1) : (z_2 - z) = A_1Z : ZA_2$. Поэтому $z = \dfrac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}$. Если $z_1 \geqslant z_2$ или $B_1 \equiv B_2$, то рассуждение аналогично или еще проще. Случай $n = 3$ сводится к случаю $n = 2$, если заменить материальные точки (A_1, m_1) и (A_2, m_2) их материальным центром $(C, m_1 + m_2)$.

§ 4. 3. Пусть n — произвольное натуральное число, $a = n + (n + 1) = 2n + 1$, $b = 2n(n + 1)$. В прямоугольнике треугольнике с катетами a и b гипотенуза определяется из соотношения: $c^2 = a^2 + b^2 = [n + (n + 1)]^2 + [2n(n + 1)]^2 = n^2 + (n + 1)^2 + 2n(n + 1) + [2n(n + 1)]^2 = 1 + 4n(n + 1) + [2n(n + 1)]^2 = [2n(n + 1) + 1]^2$, то есть $c = 2n(n + 1) + 1$.

4. $[k(m^2 - n^2)]^2 + (k \cdot 2mn)^2 = [k(m^2 + n^2)]^2$.

§ 5. 1. Теорема доказывается на основании теоремы Пифагора. Опустим из C перпендикуляр CF на AB. Пусть $\angle BDC \geqslant \angle ADC$. Тогда $a^2 = a_1^2 + d^2 + 2a_1 \cdot DF$ (1); $b^2 = b_1^2 + d^2 - 2b_1 \cdot DF$ (2). Умножим (1) на b_1, (2) на a_1 и сложим, учитывая, что $a_1 + b_1 = c$. Получим: $a^2b_1 + b^2a_1 = a_1b_1c + d^2c$ (3), ч.т.д.

2. Пусть $l_c \equiv d$ — биссектриса угла C. Тогда имеем 3 уравнения: уравнение (3) (см. задачу 1), $a_1 + b_1 = c$ и $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{b_1}{b}$. Из последних двух найдем, что $a_1 = \dfrac{ac}{a + b}$, $b_1 = \dfrac{bc}{a + b}$. Подставив результаты в (3), найдем d.

3. Пусть $l_c = l_b$. Тогда $ab\dfrac{(a + b)^2 - c^2}{(a + b)^2} = ac\dfrac{(a + c)^2 - b^2}{(a + c)^2}$ или

$$b\left[1 - \frac{c^2}{(a + b)^2}\right] = c\left[1 - \frac{b^2}{(a + c)^2}\right], \text{ то есть } b - c + bc\frac{b(a + b)^2 - c(a + c)^2}{(a + c)^2(a + b)^2} = 0.$$

Отсюда видно, что если $b > c$ $(b < c)$, то левая часть положительна (соответственно — отрицательна), следовательно, не равна 0. А так как левая часть должна быть равна 0, то $b = c$.

§ 6. 9. Можно ограничиться случаем, когда D лежит внутри окружности γ, описанной вокруг $\triangle ABC$. На стороне AB как на основании построим $\triangle AFB$, подобный $\triangle BCD$ (рис. 194). Очевидно, что F вне AC (ибо $\angle BAF = \angle BDC > \angle BAC$), поэтому $AC < AF + FC$ (1). Легко видеть, что $AF = \dfrac{a \cdot c}{BD}$ (2), $\dfrac{a}{BF} = \dfrac{BD}{b}$ (3) и $\angle ABD = \angle FBC$ (4). Из 4) и 3) следует,

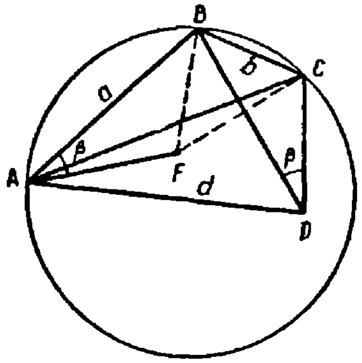


Рис. 194.

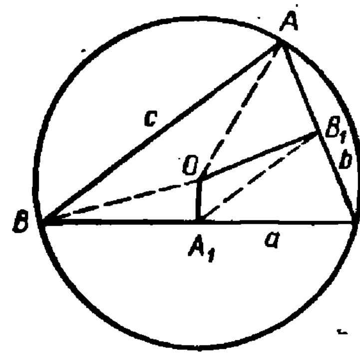


Рис. 195.

что $\triangle ABD \sim \triangle FBC$, а поэтому $FC = \frac{b \cdot d}{BD}$ (5). Из (1), и (5) заключаем, что $AC \cdot BD < a \cdot c + b \cdot d$

§ 7. 1) Поместим в вершинах треугольника ABC по 1 единице массы. Их центром тяжести будет точка Z пересечения медиан. Если S — центр описанной окружности, то по теореме Лагранжа получим

$$[1 \cdot SA^2 + 1 \cdot SB^2 + 1 \cdot SC^2] - \left[1 \cdot \left(\frac{2}{3} m_a\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{2}{3} m_b\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{2}{3} m_c\right)^2\right] = 3 \cdot SZ^2,$$

откуда

$$SZ^2 = R^2 - \frac{4}{27}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2).$$

2. Используя решение задачи 1 и полагая $SZ = \frac{1}{3} R$, получим после упрощений $6R^2 = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$. Но по известным формулам для медиан ($4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ и т. п.) имеем: $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Следовательно, $8R^2 = a^2 + b^2 + c^2$, то есть $2R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Пусть $c \geqslant a$, $c \geqslant b$. Тогда

$$\left[R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] + \left[R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = \left(\frac{c}{2}\right)^2. \qquad (1)$$

На рисунке 195 $OA_1 \perp BC$, $OB_1 \perp AC$. Из этого рисунка ясно, что равенство (1) означает: $OA_1^2 + OB_1^2 = A_1B_1^2$, откуда видно, что $\measuredangle A_1OB_1 = 90°$. Но тогда и $\measuredangle A_1CB_1 = 90°$.

4. Пусть S — центр окружности, $SA = R$, $SG = d$. Пользуясь теоремой Лагранжа, легко увидеть, что

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3(R^2 - d^2). \qquad (1)$$

Но для любой точки G, лежащей внутри окружности,

$$GA \cdot GA_1 = GB \cdot GB_1 = GC \cdot GC_1 = R^2 - d^2.$$

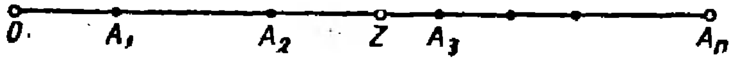


Рис. 196.

Пользуясь равенством (1), получим $\dfrac{GA^2}{GA \cdot GA_1} + \dfrac{GB^2}{GB \cdot GB_1} + \dfrac{GC^2}{GC \cdot GC_1} = 3$, откуда, очевидно, следует требуемое тождество.

5. Подберем массы a и b в точках A и B так, чтобы выражение $2PA^2 + 3PB^2$ можно было рассматривать как момент инерции относительно точки P. Для этого достаточно поместить в A 2 единицы массы, а в B — 3 единицы. Пусть O — центр тяжести материальных точек $(A, 2)$ и $(B, 3)$. Точка O лежит на отрезке AB и определяется из условия $2AO = 3OB$, то есть $AO = \dfrac{3}{5}a$, где $a = AB$. По теореме Лагранжа $J_p - J_0 = 5\,OP^2$. Но (по условию) $J_p = c^2$,

$$J_0 = 2 \cdot OA^2 + 3 \cdot OB^2 = 2\left(\frac{3}{5}a\right)^2 + 3\left(\frac{2}{5}a\right)^2 = \frac{6}{5}a^2.$$

Поэтому

$$OP^2 = \frac{1}{5}\left(c^2 - \frac{6}{5}a^2\right). \qquad (1)$$

Итак, точка P тогда и только тогда принадлежит рассматриваемому множеству, когда она удовлетворяет условию (1). В зависимости от того, будет ли $c^2 - \dfrac{6}{5}a^2$ больше, равно или меньше нуля, искомое множество окажется окружностью, или точкой O, или пустым множеством.

6. Выберем на луче ON (рис. 196) n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, чтобы $OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2$, ..., $OA_n = a_n$. В каждой из этих точек поместим 1 единицу массы. Пусть Z — центр тяжести образовавшейся системы материальных точек. Тогда

$$OZ = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n). \qquad (1)$$

По теореме Лагранжа $J_0 = J_z + n \cdot OZ^2 \geqslant n \cdot OZ^2$, так что $OZ \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{n}J_0}$. (2)

Но $J_0 = 1 \cdot a_1^2 + 1 \cdot a_2^2 + \ldots + 1 \cdot a_n^2$. Отсюда следует доказываемое неравенство.

Равенство имеет место, если $J_z = 0$. Но $J_z = (z - a_1)^2 + (z - a_2)^2 + \ldots$ $\ldots + (z - a_n)^2$, так что $J_z = 0$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = z$.

§ 8. 16. Пусть $AP \times BQ \equiv S$. Тогда $\dfrac{SP}{SC} = \dfrac{SD}{SB}$; $\dfrac{SC}{SA} = \dfrac{SQ}{SD}$, откуда $\dfrac{SP}{SA} = \dfrac{SQ}{SB}$, $PQ \parallel AB$. Если $AP \parallel BQ$, то $AC = DQ$, $CP = BD$, $AP = BQ$ и поэтому $PQ \parallel AB$.

Глава VI

§ 1. 1. Пусть в трапеции $ABCD$ AD и BC — основания, O — точка пересечения диагоналей. $\triangle ADB$ и $\triangle ADC$ равновелики. Если отнять от каждого из них $\triangle AOD$, то получим 2 равновеликих треугольника.

9. а) (см. рис. 97) $S_{ACC_1A_1} + S_{BCC_1B_1} = S_{ABB_1C_1A_1} - S_{A_1C_1B_1} = S_{ABB_1A}$; б) пусть ABB_1A_1 — квадрат (рис. 197), $\triangle ACB$ — прямоугольный, $B_1K \perp BC$. Тогда $\angle BB_1K = \angle ABC$; $BB_1 = AB$. Поэтому $B_1K = BC$, так что $S_{BCC_1B_1} = BC^2$. Аналогично $S_{ACC_1A_1} = AC^2$. Но а) $S_{ACC_1A_1} + S_{BCC_1B_1} = S_{ABB_1A_1}$, то есть $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

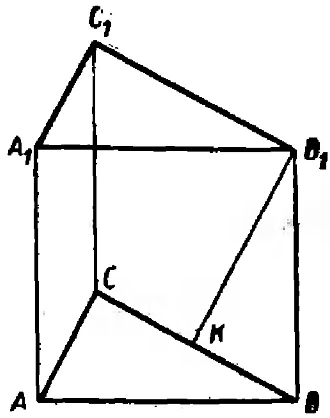


Рис. 197.

Глава VII

§ 1. 4. Для доказательства следует рассмотреть возможные комбинации значений истинности высказываний a и b и соответствующие значения истинности высказываний $\bar{a} \vee b$ и $a \to b$.
Записи удобно расположить в виде следующей таблицы:

a	b	$\bar{a}$	$\bar{a} \vee b$	$a \to b$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Отсюда ясно, что $\bar{a} \vee b = a \to b$. Аналогично доказывается вторая формула.
6.

a	b	$a \vee b$	$\overline{a \vee b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \wedge \bar{b}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Отсюда видно, что высказывания $\overline{a \vee b}$ и $\bar{a} \wedge \bar{b}$ одновременно истинны и одновременно ложны, так что $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$. Второе равенство устанавливается аналогично.

9. а) 1) По правилам де Моргана $\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D} = \overline{A \cdot B} + \overline{C \cdot D} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$; б) пусть A — множество всех (ехавших в вагоне) мужчин, B — множество студенток и студентов, C — множество пассажиров моложе 20 лет, D — множество пассажиров, ехавших до Смоленска. Тогда в $\bar{A}$ входит 30% пассажиров данного вагона, в $\bar{B}$ — 20%, в $\bar{C}$ — 25%, в $\bar{D}$ — 15%, а в множестве $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$ (то есть $\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D}$ — см. пункт а) — *не более чем* 30 + + 20 + 25 + 15 = 90 процентов всех пассажиров. Поэтому дополнительное множество $A \cdot B \cdot C \cdot D$ содержит *не менее чем* 10% всех пассажиров, то есть не менее 8 пассажиров.

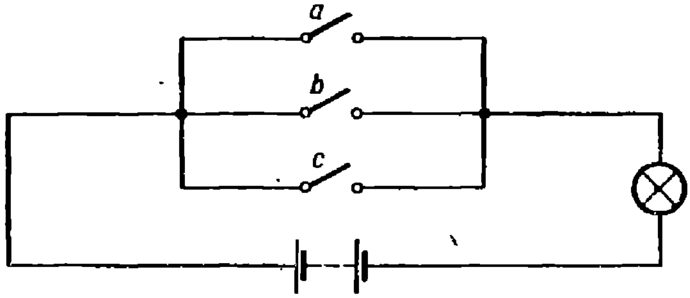


Рис. 198.

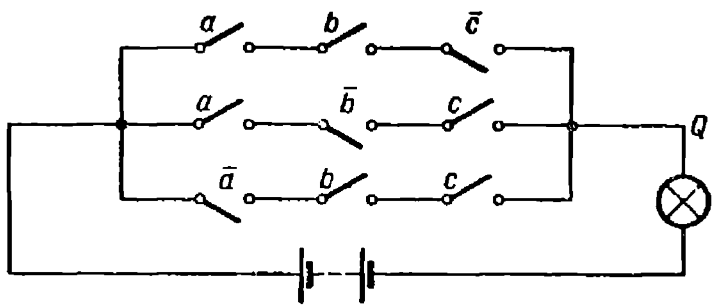


Рис. 199

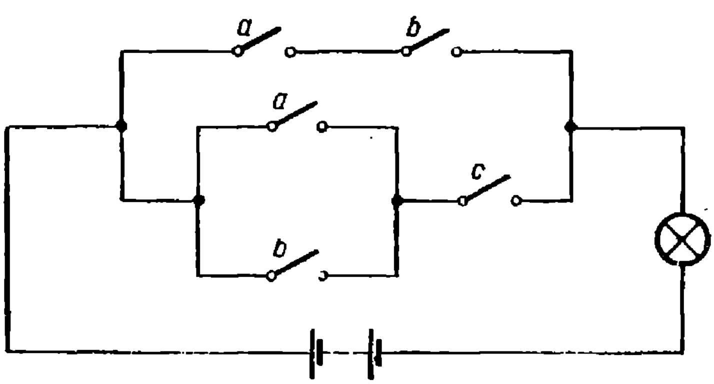


Рис. 200.

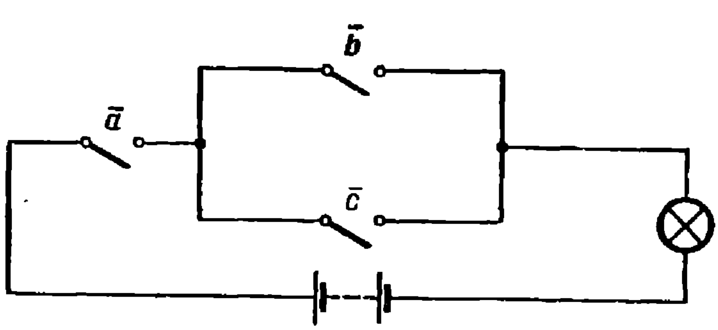


Рис. 201.

15. а) Обозначим рубильники ребят соответственно через a, b, c. Запись $x = 1$ означает, что цепь пропускает ток (лампочка горит); $x = 0$ — цепь не пропускает тока (лампочка погашена).

Ясно, что лампочка будет гореть тогда и только тогда, когда включен или рубильник a, или включен рубильник b, или включен рубильник c. Это позволяет написать:

$$x = a + b + c.$$

На рисунке 198 приведена соответствующая контактная схема.

б) В этом случае лампочка должна гореть ($x = 1$), если a и b включены, а c выключен,

или a включен, b выключен и c включен,

или a выключен, b и c включены.

Во всех остальных случаях лампочка не должна гореть. А это означает, что

$$x = a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot c.$$

Соответствующая схема изображена на рисунке 199.

в) $x = a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c = a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c = (a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c) + (a \cdot \overline{b} \cdot c + a \cdot b \cdot c) + (\overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c) = a \cdot b(c + \overline{c}) + bc \cdot (a + \overline{a}) + c \cdot a (b + \overline{b}) = a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = a \cdot b + (a + b) \cdot c.$

Искомая схема изображена на рисунке 200.

16. Схема на рисунке 113 может быть задана формулой $x = a + b \cdot c$. Тогда $x = \overline{a \cdot \overline{(b \cdot c)}} = \overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c})$. Этой формуле соответствует схема на рисунке 201.

17. Для определенности будем еще требовать, чтобы лампочка (x) была погашена, если оба переключателя (a и b) находятся в состоянии «выключено». Это запишем так:

a	b	x
0	0	0

Если затем будет включен переключатель a, то лампочка должна загореться; это можно записать так:

a	b	x
1	0	1

Затем, при включении переключателя b, должна получиться такая картина:

a	b	x
1	1	0

И, наконец, если затем еще раз повернуть переключатель a (то есть перевести его в состояние «выключено»), то лампочка должна загореться:

a	b	x
0	1	1

Результаты сведем в одну таблицу:

a	b	x
0	0	0
1	0	1
1	1	0
0	1	1

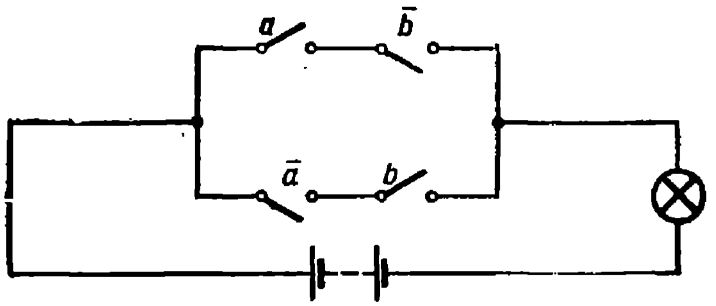


Рис. 202.

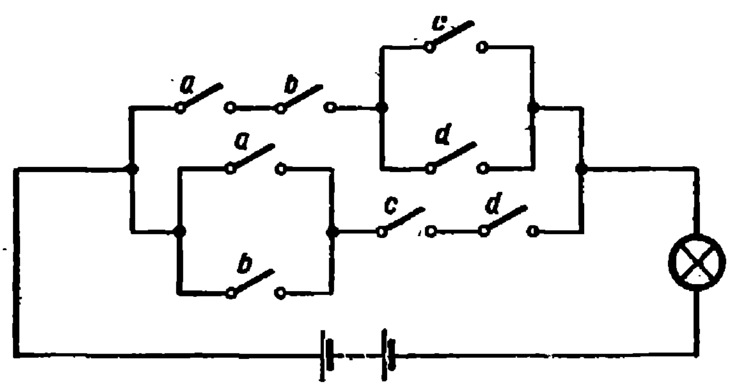


Рис. 203.

Электрическая схема, которая будет действовать в соответствии с этой таблицей, будет удовлетворять требованиям данной задачи. Таким образом, $x = 1$ (лампочка должна загореться) тогда и только тогда, когда

[$a = 1$ и $b = 0$ (то есть $\bar{b} = 1$)] или [$a = 0$ (то есть $\bar{a} = 1$) и $b = 1$], то есть $x = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$.

По этой формуле можно составить искомую контактную схему (рис. 202).

18. $x = b \cdot c \cdot d + a \cdot c \cdot d + a \cdot b \cdot d + a \cdot b \cdot c = ab \cdot (c + d) + (a + b) \cdot c \cdot d$. Соответствующая схема видна на рисунке 203.

Глава VII

§ 5. 4. Так как $S_3 = \frac{3}{4}$ и $S_4 = S_3 + \frac{1}{4 \cdot 5}$, то $S_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}$; в) так как $S_{51} = S_{50} + \frac{1}{51 \cdot 52}$ и уже доказано, что $S_{50} = \frac{50}{51}$, то $S_{51} = \frac{50}{51} + \frac{1}{51 \cdot 52} =$

$= \frac{51}{52}$; г) $S_{52} = S_{51} + \frac{1}{52 \cdot 53} = \frac{51}{52} + \frac{1}{52 \cdot 53} = \frac{52}{53}$; д) так как $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ и $S_k = \frac{k}{k+1}$, то $S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$.

5. а) Так как $66 \,⋮\, 6$, то подавно $66^2 \,⋮\, 2$ и $66^3 \,⋮\, 3$, так что (1) при $n = 66$ — целое число.

$$\frac{67}{6} + \frac{67^2}{2} + \frac{67^3}{3} = \frac{66+1}{6} + \frac{(66+1)^2}{2} + \frac{(66+1)^3}{3} = \left(\frac{66}{6} + \frac{66^2}{2} + \frac{66^3}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + 66 + (66 + 66^2) \text{ — целое число.}$$

Аналогично при $n = 68$ пользуемся равенством:

$$\frac{68}{6} + \frac{68^2}{2} + \frac{68^3}{3} = \left(\frac{67}{6} + \frac{67^2}{2} + \frac{67^3}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + (2 \cdot 67 + 67^2);$$

б) по условию $\frac{k}{6} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3}$ — целое число. Поэтому

$$\frac{k+1}{6} + \frac{(k+1)^2}{2} + \frac{(k+1)^3}{3} \equiv \left(\frac{k}{6} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + (2k + k^2) \text{—}$$

целое число; в) при $n = 1$ (1) — целое число. В силу пункта б) (при $k = 1$) получаем, что (1) — целое число при $n = 2$ и т. д., пока не доберемся до $n=30$.

6. При $n = 1$ формула, очевидно, верна. Учитывая пункт д) из задачи 4 и принцип математической индукции, заключаем, что формула справедлива для любого натурального n.

7. При $n = 1$ равенство (1) принимает вид $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$. Оно справедливо. Пусть k — такой номер, при котором рассматриваемое равенство справедливо, то есть

$$1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2k}. \tag{A}$$

Докажем, что равенство (1) справедливо и для следующего номера $k + 1$ (то есть, если положить $n = k + 1$):

$$1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}. \tag{B}$$

Действительно, учитывая (A) имеем:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} =$$

$$= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

Итак, из справедливости (A) следует (B). В силу принципа индукции доказываемое равенство верно для всех номеров n.

8. При $n = 1$ утверждение верно $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 \text{ — целое число}\right)$. В силу пункта б) из задачи 5 и принципа индукции, утверждение верно для любого номера n.

11. При $n = 8$ утверждение верно: 8 руб. можно уплатить, отдав трехрублевый и один пятирублевый билеты.

Пусть теперь уже установлено, что k руб. возможно уплатить (без сдачи) лишь тройками и пятерками, то есть $k = 3t + 5p$ (здесь t и p— какие-то целые неотрицательные числа).

Докажем, что в таком случае возможно $(k + 1)$ руб. уплатить без сдачи только тройками и пятерками. Действительно, $k + 1 = 3t + 5p + 1$.

Возможны два случая. 1) $p = 0$. Тогда $t \geqslant 3$, $k + 1 = 3(t - 3) + 5 \cdot 2$, и $(k + 1)$ руб. можно уплатить только тройками и пятерками ($t - 3$ тройки и 2 пятерки); 2) $p \neq 0$. Тогда $p \geqslant 1$ и $k + 1 = 3(t + 2) + 5(p - 1)$; опять видно, что $(k + 1)$ руб. можно уплатить лишь тройками и пятерками [$(t + 2)$ троек и $(p - 1)$ пятерок)].

Итак, утверждение верно при $n = 8$ и из справедливости его при $n = k$ следует его справедливость при $n = k + 1$. Поэтому оно верно для всех номеров n, которые не меньше 8.

12. При $n = 5$ неравенство

$$2^n > n^2 \tag{1}$$

справедливо: $2^5 > 5^2$. Пусть k — такой номер, что при $n = k$ неравенство (1) справедливо, то есть $2^k > k^2$.

Докажем, что (1) верно и для следующего номера, то есть при $n = k + 1$. Действительно, $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 = (k + 1)^2 + k^2 - 2k - 1 = (k + 1)^2 + (k - 1)^2 - 2 > (k + 1)^2$, если $k \geqslant 5$.

13. При $n = 2$ утверждение легко проверяется. Пусть k—такой номер, что $2^{2^k} + 1$ оканчивается цифрой 7. Тогда 2^{2^k} оканчивается цифрой 6. $2^{2^{k+1}} = (2^{2^k})^2$ тоже оканчивается цифрой 6 (ибо если число оканчивается шестеркой, то и его квадрат оканчивается шестеркой — это легко доказать). Но тогда $2^{2^{k+1}} + 1$ оканчивается цифрой 7. Итак, из справедливости теоремы при $n = k$ следует ее справедливость при $n = k + 1$. В силу принципа индукции теорема верна для всех номеров $n \geqslant 2$.

14. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$—данная прогрессия, q— ее знаменатель. По определению при любом n

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad S_1 = a_1. \tag{1}$$

Докажем формулы

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}. \tag{2}$$

Ясно, что при $n = 1$, обе формулы (2) верны. Из равенств

$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ и $S_k = \dfrac{a_k \cdot q - a_1}{q - 1}$ и (1) следует, что $a_{k+1} = a_k \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1} \times q = a_1 \cdot q^k$ и

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{a_k \cdot q - a_1}{q - 1} + a_{k+1} = \frac{a_{k+1} - a_1}{q - 1} + a_{k+1} = \frac{a_{k+1} \cdot q - a_1}{q - 1}.$$

Иначе говоря, из справедливости формул (2) для номера k (то есть при $n = k$) следует их справедливость для следующего номера $k + 1$ (то есть при $n = k + 1$). Так как (2) верны еще и при $n = 1$, то в силу принципа индукции формулы (2) справедливы для всех номеров n.

15. При $n = 1$ утверждение верно: одна окружность разбивает плоскость на 2 области, а это число можно получить из формулы $2 + n(n - 1)$ при $n = 1$.

Пусть утверждение уже установлено при $n = k$: k окружностей разбивают плоскость на $2 + k(k - 1)$ областей.

Докажем, что утверждение верно для $n=k+1$, то есть $k+1$ окружностей разбивают плоскость на $2+(k+1)k$ областей.

Рассуждаем так: если после нанесения на плоскость k окружностей $c_1, c_2, \ldots$ $\ldots, c_k$ нанесем окружность c_{k+1}, то она пересечется с каждой из ранее нанесенных окружностей в двух точках; всего получим на окружности c_{k+1} $2k$ точек, которые разобьют ее на $2k$ дуг. Если эти дуги наносить на плоскость не все сразу, а последовательно, одна за другой, то замечаем, что каждая разбивает одну из ранее имевшихся областей на две, то есть увеличивает число областей на 1. Всего число областей увеличится на $2k$ и станет равным $2+k(k-1)+2k=2+k(k+1)$.

В силу принципа математической индукции заключаем, что утверждение верно для всех натуральных чисел.

16. Из справедливости утверждения при $n=k$ действительно следует справедливость утверждения при $n=k+1$, но только при условии $k \geqslant 2$ (при $k=1$ приведенное в тексте рассуждение ошибочно).

Глава VIII

§ 2. 10. $101^{100}=(100+1)^{100}=100^{100}+100\cdot 100^{99}+\frac{100\cdot 99}{1\cdot 2}\cdot 100^{98}+\ldots+$ $+C_{100}^{98}\cdot 100^2+(100\cdot 100+1)$. Из последних 100 слагаемых каждое не больше, чем 100^{100}. Следовательно, $101^{100}<100\cdot 100^{100}=100^{101}$.

11. Доказательство методом индукции. При $n=1$ теорема верна. Пусть теперь k — такое натуральное число, что $k^p-k \vdots p$[1]. Рассмотрим

$$(k+1)^p-(k+1)=(k^p-k)+c_p^1k^{p-1}+c_p^2k^{p-2}+\ldots+c_p^mk^{p-m}+\ldots+c_p^{p-1}\cdot k.$$

Так как c_p^m — целое число (число сочетаний), то из формулы для C_p^m $(m<p)$ видно, что $p(p-1)\ldots(p-m+1) \vdots (1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m)$. Но так как p — простое число и $p>m$, то оно взаимно просто с произведением $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m$, так что $(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-m+1)$ делится нацело на $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m)$. Поэтому C_p^m делится на p $(m=1, 2, \ldots, p-1)$. Кроме того, $k^p-k \vdots p$ по допущению. Следовательно, $(k+1)^p-(k+1) \vdots p$. Но тогда ясно, что теорема верна.

§ 3. 6. Вероятность того, что выиграл бы второй игрок, составляет $\frac{1}{4}$. Поэтому с вероятностью $\frac{3}{4}$ выиграл бы первый игрок. Ставку следует, естественно, делить пропорционально этим вероятностям.

12. Если из общего числа n равновозможных случаев событию A благоприятствует a случаев, а событию B — b (других) случаев, то событию $A+B$ благоприятствует $a+b$ случаев. Поэтому $p(A+B)=\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=p(A)+$ $+p(B)$.

17. Пусть из n равновозможных случаев событию благоприятствует a случаев, а из них осуществляется еще и B в c случаях. Тогда

$$p(A)=\frac{a}{n};\quad p(A\cdot B)=\frac{c}{n};\quad p(B/A)=\frac{c}{a}.$$

Поэтому

$$p(A\cdot B)=p(A)\cdot p(B/A).$$

---

[1] Знак $\vdots$ употребляется вместо слов «делится на».

§ 4. 8. В результате опыта может оказаться выбранной любая из следующих фигур: король $\left(\text{вероятность } \frac{1}{16}\right)$, ферзь $\left(\frac{1}{16}\right)$, ладья $\left(\frac{1}{8}\right)$, слон $\left(\frac{1}{8}\right)$, конь $\left(\frac{1}{8}\right)$, пешка $\left(\frac{1}{2}\right)$. Поэтому согласно формуле (1) энтропия данного опыта

$$H(\alpha) = 2 \cdot \frac{1}{16} \log_2 16 + 3 \cdot \frac{1}{8} \log_2 8 + \frac{1}{2} \log_2 2 = 2\frac{1}{8}.$$

Глава IX

§ 1. 7. а) Пусть p и q — длины плеч весов (соответственно левого и правого); по условию $p \neq q$. Пусть требуется отпустить покупателю c *кг* товара. Когда продавец положил на правую чашку гирю в $\frac{1}{2} c$ *кг*, а на левую какое-то количество x *кг* товара, то $x \cdot p = q \cdot \frac{c}{2}$, откуда $x = \frac{cp}{2q}$. Аналогично найдем, что при втором взвешивании продавец взвесил $y = \frac{cq}{2p}$ *кг* товара. Всего он отпустил покупателю $x + y = \frac{1}{2} c \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) > c \sqrt{\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p}} = c$, то есть $x + y > c$. В убытке продавец.

б) Вот один из возможных способов. Сначала продавец кладет на левую чашку весов 1 *кг* гирь, а на правую — столько гирь, чтобы уравновесились весы (пусть он положил m *кг*).

Затем он будет класть на левую чашку отпускаемый товар, а на правую чашку— гири так, чтобы весы уравновесились. Чтобы при этом оказалось на левой чашке c *кг* товара, необходимо на правую чашку положить гири весом x *кг*; подсчитаем x. Обозначая через p и q длины плеч, получим: $c \cdot p = x \times q$, $1 \cdot p = m \cdot q$, откуда $x = c \cdot m$ (*кг*).

Итак, если продавец хочет отпустить c *кг* товара на левой чашке, ему следует на правую чашку положить cm *кг* гирь и на левую чашку положить столько товара, чтобы весы уравновесились; в) пусть x — вес груза. Тогда $x \cdot p = a \cdot q$, $x \cdot q = b \cdot p$. Отсюда $x = \sqrt{ab}$.

§ 2. 4. Равенству $x + 2y = 4$ удовлетворяют все точки некоторой прямой линии a (рис. 204). Ее легко построить по двум точкам пересечения с осями координат (при $x = 0$ $y = 2$, при $y = 0$ $x = 4$). Вне этой прямой $x + 2y \neq 4$. Прямая разбивает всю плоскость на две полуплоскости D_1 и D_2. Нетрудно понять из соображений непрерывности, что во всех точках области D_1 выражение $2x + y - 4$ должно иметь один и тот же знак. Действительно, пусть точки A_1 (x_1, y_1) и $A_2(x_2, y_2)$ лежат в полуплоскости D_1, и в них функция $x + 2y - 4$ имеет разные знаки. Пусть точка $P(x, y)$ перемещается с какой-либо постоянной скоростью из точки A_1 в точку A_2 вдоль отрезка A_1A_2. При этом движении будут непрерывно изменяться x, y и сумма $x + 2y - 4$. Если (для определенности) в начале движения эта сумма была отрицательна, а в конце движения положительна, то в какой-то промежуточный момент она должна была быть равна 0. В этот момент точка P имела координаты x_0, y_0, для которых сумма $x + 2y - 4$ была равна 0. Но тогда точка (x_0, y_0) должна лежать на прямой a; в то же время она лежит на отрезке A_1A_2. Иначе говоря, отрезок A_1A_2 и прямая a пересекаются, что явно невозможно, если точки A_1 и A_2— в одной полуплоскости.

Итак, во всех точках полуплоскости D_1 сумма $x + 2y - 4$ имеет один и тот же знак. Следовательно, если в какой-либо одной «пробной» точке из D_1 (например, в точке (0, 0)) $x + 2y - 4$ оказывается отрицательным числом (то есть $x + 2y < 4$), то и во всех точках из D_1 число $x + 2y - 4$ отрицательно ($x + 2y < 4$, рис. 205).

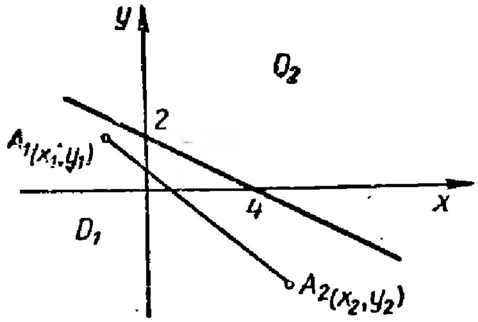


Рис. 204.

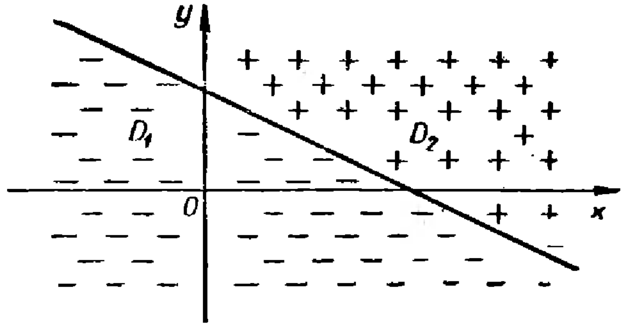


Рис. 205.

7. а) См. рисунок 206; б) пусть $c > 0$; рассмотрим семейство прямых $x+y=c$. Чем больше будет c, тем дальше будет эта прямая от начала координат 0 (это расстояние равно $\frac{c}{\sqrt{2}}$). При малых c (например, при $c = 0$ или $c = 10$) эта прямая не задéнет область D; при больших c (например, при $c = 50$) прямая $x + y = c$ пересечет область D (по некоторому отрезку). Среди прямых вида $x + y = c$, пересекающих область D (то есть имеющих с нею хотя бы одну общую точку), *наименьшую* пометку имеет та, которая ближе других к началу координат O. Из чертежа ясно, что это будет та прямая, которая проходит через точку B Эта прямая и будет искомой линией уровня функции $S = x + y$. Пометку c_0 этой прямой можно найти, очевидно, из формулы

$$x_0 + y_0 = c_0,$$

где (x_0, y_0) — координаты точки B. Для чисел x_0, y_0 имеем систему: $2x_0 + 7y_0 = 200$, $9x_0 + 4y_0 = 300$, откуда $x_0 \approx 23{,}6$, $y_0 \approx 21{,}8$, $c_0 \approx 45{,}4$.

Искомая линия уровня функции $S = x + y$ — это и есть прямая $x + y = 45{,}4$.

8. Задача сводится к тому, чтобы из всех пар (x, y), удовлетворяющих условиям (1) — (4) (см. начало данного параграфа), выбрать такую, для которой сумма $S = x + y$ имеет наименьшее значение. Но каждая пара (x, y), удовлетворяющая условиям (1) — (4), изображается в виде точки из множества D (внутренней или граничной). Каждая точка (x, y) из D лежит на какой-нибудь одной линии уровня $x + y = c$. Значение суммы S для такой точки (x, y) как раз и равна этой пометке c. Но из линий уровня, имеющих с D хотя бы одну общую точку, наименьшую пометку имеет (как мы видели при решении задачи 7) та линия уровня, которая проходит через точку B; пометка этой линии равна $c_0 = 45{,}4$, координаты точки B равны: $x_0 = 23{,}6$, $y_0 = 21{,}8$. Эти числа и дают решение задачи: следует купить 23,6 *кг* удобрений смеси № 1 и 21,8 *кг* смеси № 2; покупка при этом будет стоить $S = 45{,}4$ (гривенников), то есть $S = 4$ руб. 54 коп. Всякая другая покупка смеси № 1 и № 2, содержащая требуемые по условию количества фосфора и калия, будет стоить дороже этой суммы.

9. Пусть x — число откормленных уток, y — число гусей. Из условия ясно, что

$$x > 0 \qquad (1)$$

$$y > 0 \qquad (2)$$

$$x + y < 500, \qquad (3)$$

$$x + 3y < 900. \qquad (4)$$

Прибыль от откорма 1 утки составляет 2 руб. (3 — 1), от откорма 1 гуся — 4 руб. (7—3). Поэтому вся прибыль составит (в рублях)

$$S = 2x + 4y. \qquad (5)$$

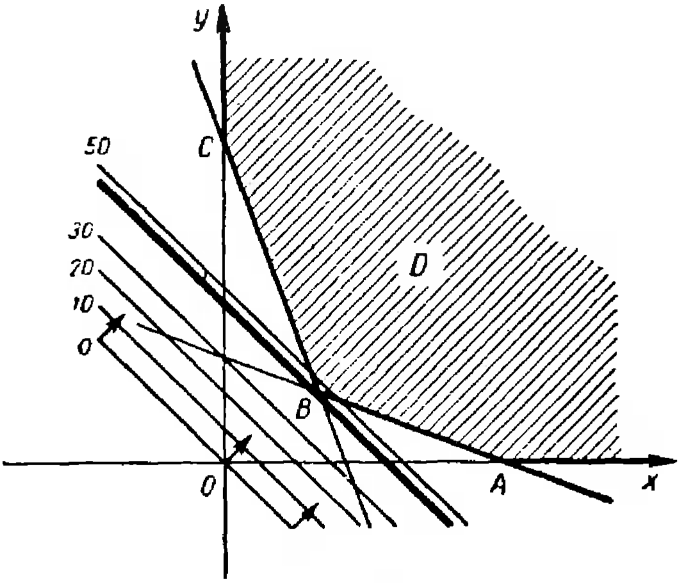


Рис. 206.

Задача состоит в нахождении наибольшего значения (максимума) функции (5) при условии, что x, y удовлетворяют условиям (1) — (4).

Для решения задачи выделим то множество D, в котором удовлетворяются все условия (1) — (4). Для этой цели строим сначала граничные прямые

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 500, \quad x + 3y = 900.$$

Каждая из них разбивает плоскость на две полуплоскости; выбираем ту из полуплоскостей, в которой имеет место соответствующее неравенство (1) — (4) (в случае необходимости пользуемся «приемом пробной точки», о котором говорили выше, в решении задачи 4).

Область D есть пересечение четырех отобранных полуплоскостей. На рисунке 207 она заштрихована. Затем рассматриваем семейство линий уровня функции (5), то есть семейство прямых вида

$$2x + 4y = c \qquad (c > 0).$$

Чем дальше будет прямая этого семейства от начала координат O, тем больше будет c (и наоборот).

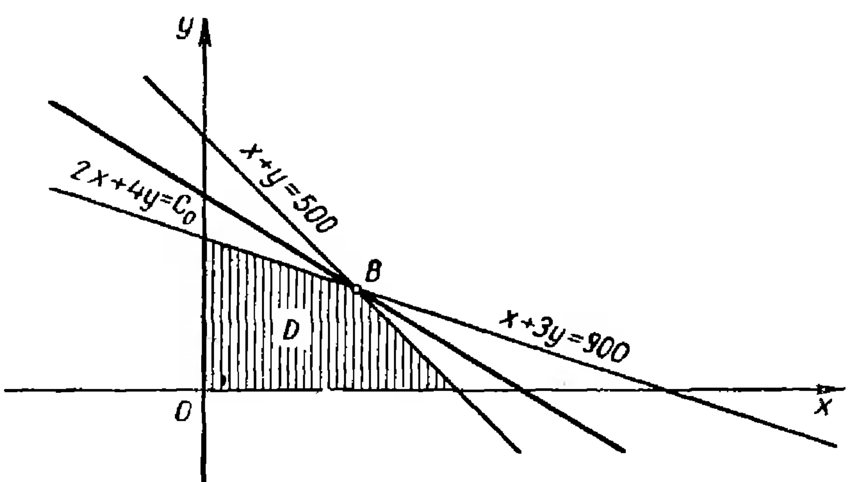


Рис. 207.

Из тех прямых этого семейства, которые еще пересекают множество D, самой далекой от начала O будет прямая, которая проходит через точку B. Соответствующую ей пометку c_0 найдем, если в равенство $2x+4y=c_0$ подставим вместо x, y координаты точки B ($x=300$, $y=200$). Получим $c_0=1400$. Итак, в точке B функция S равна 1400. А в любой другой точке из области D величина S меньше (ибо эта точка лежит на линии уровня с меньшей пометкой).

Приходим к такому ответу: наибольшая прибыль, которую может извлечь колхоз, составляет 1400 руб.; она будет получена, если откармливать 300 уток и 200 гусей.

10. Пусть x_{ij} означает число миллионов тонн угля, которые следует перевезти из бассейна A_i в пункт потребления B_j ($i, j=1, 2$). Из условия ясно, что из бассейнов A_1 и A_2 в пункты назначения B_1 и B_2 необходимо отправить весь уголь, без остатка. Поэтому

$$x_{11}+x_{12}=60, \quad x_{21}+x_{22}=30, \quad x_{11}+x_{21}=50, \quad x_{12}+x_{22}=40. \qquad (1)$$

Стоимость перевозки (в сотнях тысяч рублей)

$$S=5x_{11}+8x_{12}+15x_{21}+10x_{22}. \qquad (2)$$

Пользуясь формулами (1), выразим S лишь через одно из переменных x_{ij}. Это можно сделать различными способами, так что получим:

$$S=1030-8x_{11} \qquad (3)$$

$$S=630+8x_{21}, \qquad (4)$$

$$S=550+8x_{12}, \qquad (5)$$

$$S=870-8x_{22}. \qquad (6)$$

Из формулы (4) видно, что S не может быть меньше, чем 630 (ибо $x_{21}\geqslant 0$). Но если положим $x_{21}=0$, то тем самым однозначно определяются все числа x_{11}, x_{12}, x_{22} из формул (1): $x_{11}=50$, $x_{12}=10$, $x_{22}=30$. Так как все эти числа оказались неотрицательными, то они и дают решение задачи.

12. Из каждой полученной доски (длиной 3,1 *м*) можно получить доски требуемых размеров двумя способами:

I. Разрезать ее на две доски: 1 длиной 1 *м* и 1 длиной 2 *м*;

II. Разрезать ее на 3 доски длиной 1 *м*.

Обозначим через x и y число досок, распиленных соответственно способами I и II. Число образовавшихся комплектов обозначим через z. Всего при распиловке было получено x двухметровых досок и $x+3y$ метровых.

Поэтому

$$x\geqslant 2z, \qquad (1)$$

$$x+3y\geqslant 7z. \qquad (2)$$

Кроме того, $\quad x+y=200, \qquad (3)$

и, понятно, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. $\qquad (4)$

Требуется найти максимум функции

$$S=z. \qquad (5)$$

Исключим одно из трех переменных, например y. Так как $y=200-x$, то условия (1) — (4) приобретают вид:

$$x\geqslant 2z, \quad 2x+7z\leqslant 600, \quad z\geqslant 0, \quad x\geqslant 0. \qquad (6)$$

Множество D точек (x, z), удовлетворяющих условию (6), есть треугольник OAB, изображенный на рисунке 208. Из точек этого множества наибольшую ординату z имеет точка B. Чтобы найти эту ординату, решим систему $x=2z$, $2x+7z=600$, откуда $z=\frac{600}{11}=54\frac{6}{11}$.

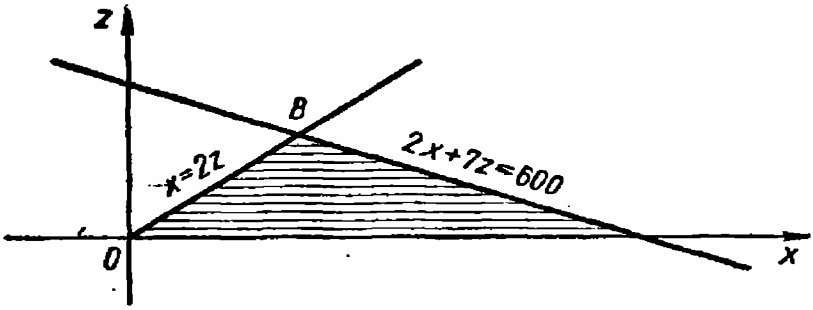


Рис. 208.

Но так как z — по смыслу задачи — целое число, то следует полагать $z=54$. Это и будет наибольшее число комплектов, которые можно заготовить из данных досок. Для них потребуется 108 двухметровых досок, и, следовательно, 108 досок придется распилить первым способом. Распилив еще остальные 92 доски вторым способом, получим достаточное для всех комплектов число метровых досок. Однако на самом деле достаточно из этих 92 досок распилить меньшее число. Действительно, для 54 комплектов требуется 378 метровых досок, из них 108 получены ранее. Чтобы получить остальные 270 метровых досок, достаточно распилить (вторым способом) лишь 90 досок.

13. Допустим, что купили x банок вида A и y банок вида B. Из условия следует, что

$$x+4y > 20, \tag{1}$$

$$3x+2y > 50, \tag{2}$$

$$x > 4, \tag{3}$$

$$y > 0. \tag{4}$$

Если S — цена всей покупки, то $S=1{,}8x+y$. (5)

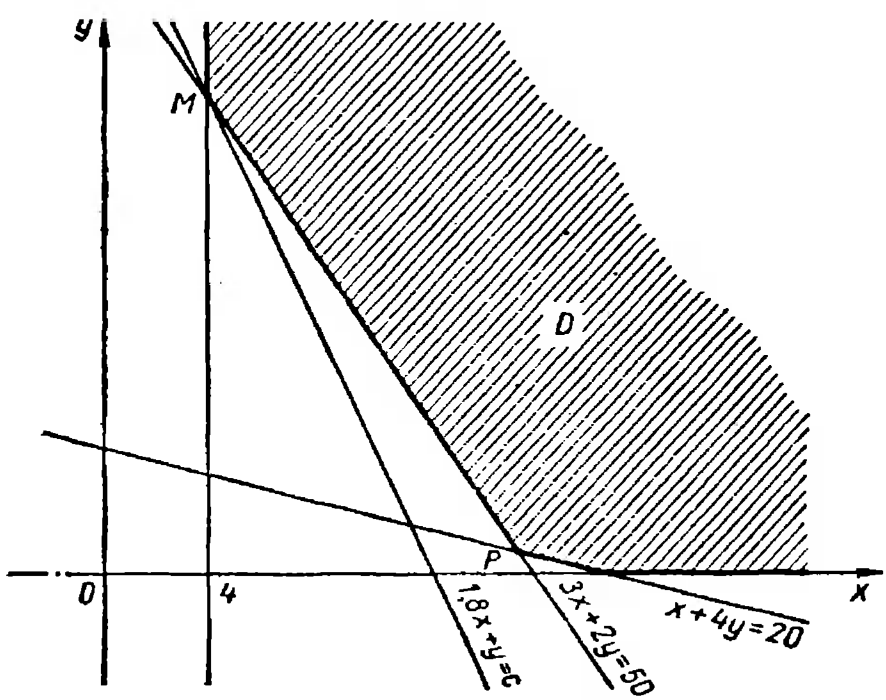


Рис. 209.

Множество D точек (x, y), удовлетворяющих неравенствам (1) — (4), изображено на рисунке 209.

Из тех прямых семейства $1{,}8x + y = c$ $(c > 0)$, которые пересекают область D, прямая, проходящая через точку M, ближе всего к началу координат O и, следовательно, имеет *наименьшую* пометку. Поэтому значение функции (5) в точке M и дает искомый минимум. Координаты точки M находим из системы

$$x = 4, \quad 3x + 2y = 50, \text{ откуда } y = 19.$$

Соответствующее значение функции (5) равно

$$S = 1{,}8 \cdot 4 + 19 = 26{,}2.$$

Итак, выгоднее всего купить 4 банки вида A и 19 банок вида B; стоимость этой покупки — 26,2 рубля, а вес ее составит $4 \cdot 12 + 19 \cdot 1 = 23{,}8$ (*кг*).

Если же мы хотим сделать покупку так, чтобы вес был минимальным, то нужно искать минимум функции

$$T = 1{,}2 \cdot x + y.$$

Можно убедиться, что из прямых семейства $1{,}2 \cdot x + y = c$ ближе всех отстоит от точки $(0, 0)$ та прямая, которая проходит через точку P. Ее координаты находим из системы $x + 4y = 20$, $3x + 2y = 50$. Отсюда $x = 16$, $y = 1$. Тогда $T = 20{,}2$.

Если хотим купить консервы так, чтобы их вес был минимальным, то нужно взять 16 банок типа A, 1 банку типа B. Их общий вес составит 20,2 *кг*, а стоимость

$$S = 1{,}8 \cdot 16 + 1 \cdot 1 = 29{,}8 \text{ (руб.)}.$$

Вторая покупка будет на 3 руб. 60 коп. дороже и на 3,6 *кг* легче, чем первая покупка.

§ 3. 9. Выберем на каком-либо луче SA_n n точек $A_1, \ldots, A_n$ так, чтобы $SA_1 = a_1, \ldots, SA_n = a_n$. Сначала загрузим эти точки равномерно, поместив в каждой из них массу, равную $\frac{m}{n}$ единиц $(m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$.

Для центра тяжести Z образовавшейся системы $\left(A_1, \frac{m}{n}\right), \ldots, \left(A_n, \frac{m}{n}\right)$ имеем: $SZ = \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}$.

Так как $b_1 < \frac{m}{n} < b_n$, то найдется такой номер k, что $b_k < \frac{m}{n} \leqslant b_{k+1}$. Снимем теперь в точках $A_1, A_2, \ldots, A_k$ часть массы, оставляя в них (вместо $\frac{m}{n}$ единиц) соответственно $b_1, b_2, \ldots b_k$ единиц, а снятую массу перенесем в точки $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$ так, чтобы в них стало соответственно $b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots b_n$ единиц массы. В результате получим новую систему из материальных точек $(A_1, b_1), (A_2, b_2), \ldots, (A_n, b_n)$; ее центр тяжести обозначим через Z'. Так как при переходе от равномерной загрузки к неравномерной часть массы была удалена от начала луча S, то и центр тяжести системы также оказался более удаленным от точки S, чем при равномерной загрузке, то есть $SZ' > SZ$. Но $SZ' = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$.

Из полученных соотношений и следует неравенство Чебышева.

12. Пусть в треугольнике ACB имеем $AC = b$, $BC = a$. Из B проведем высоту $BK = h$ к AC. Если $\angle C \neq 90°$, то $h < a$ и $S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2}bh < \frac{1}{2}ab$. Если же $\angle C = 90°$, то $S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2}ab$. Тем самым доказано утверждение из условия задачи.

14. Пусть треугольник ADB — равнобедренный, треугольник AKB — неравнобедренный и

$$S_{\triangle ADB} \leqslant S_{\triangle AKB}. \qquad (1)$$

Тогда построим вспомогательный равнобедренный треугольник так, чтобы

$$S_{\triangle ACB} = S_{\triangle AKB}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) ясно, что $S_{\triangle ADB} \leqslant S_{\triangle ACB}$, высота треугольника ADB, опущенная на AB, не может быть больше высоты треугольника ACB, то есть D — внутри или на границе треугольника ACB. Поэтому

$$AD + DB \leqslant AC + CB. \qquad (3)$$

В силу соотношения (2) и задачи 13

$$AC + CB < AK + KB. \qquad (4)$$

Поэтому подавно

$$AD + DB < AK + KB. \qquad (5)$$

Итак, если верно (1), то верно (5). Следовательно, если

$$AD + DB = AK + KB$$

то (1) не может иметь место, то есть $S_{\triangle ADB} > S_{\triangle AKB}$. Тем самым доказано утверждение, приведенное в условии задачи.

16. Квадрат с данным периметром p имеет площадь $\frac{p^2}{16}$. Пусть $ABCD$ — какой-либо другой четырехугольник с данным периметром p. Покажем, что его площадь меньше, чем $\frac{p^2}{16}$.

Действительно, мы можем $ABCD$ разрезать одной из диагоналей (скажем, AC) на два треугольника ABC и ADC. Не меняя основания AC и суммы боковых сторон в каждом из этих треугольников, заменим их равнобедренными треугольниками AB_1C и AD_1C. Согласно задаче 14 $S_{AB_1C} \geqslant S_{ABC}$ и $S_{AD_1C} \geqslant S_{ADC}$. Поэтому $S_{AB_1CD_1} \geqslant S_{ABCD}$. Диагональ B_1D_1 разбивает AB_1CD_1 на два равных треугольника.

Не меняя в треугольнике B_1AD_1 его основания B_1D_1 и суммы его боковых сторон, заменим его *равнобедренным* треугольником $B_1A_1D_1$ — от этого его площадь не уменьшится. Аналогично поступим с треугольником $\triangle B_1CD_1$.

В результате у нас возникнет ромб $A_1B_1C_1D_1$ периметра p, причем $S_{A_1B_1C_1D_1} \geqslant S_{AB_1CD_1}$.

Но из всех ромбов данного периметра p наибольшую площадь имеет квадрат. Поэтому $S_{A_1B_1C_1D_1} \leqslant \left(\frac{p}{4}\right)^2$.

Итак, площадь любого четырехугольника периметра p не больше площади квадрата того же периметра.

17. Рассмотрим треугольник ACB, у которого $\angle CAB = 30°$, и треугольник $AC'B$, у которого $\angle C'AB \neq 30°$. Обозначим через CD высоту треугольника ACB. Пусть DE — перпендикуляр, опущенный из D на AC; $C'E'$ — перпендикуляр, опущенный из C' на DE; K — точка пересечения прямых DE и AC'.

$$CA + CB - CD = 2\left(CA - \frac{1}{2}CD\right) = 2(CA - CE) = 2AE,$$

$$C'A + C'B - C'D = 2\left(C'A - \frac{1}{2}C'D\right) = 2(C'A - C'E') > 2(C'A - C'K) >$$
$$> 2AK > 2AE.$$

Поэтому $C'A + C'B - C'D > CA + CB - CD$, ч. т. д.

19. Сначала выберем точку E в $ABLK$ и F в $CDKL$ (рис. 210) произвольно. Затем заменим точку E точкой E' так, чтобы треугольник $AE'B$ был равнобедренным и имел такую же высоту, что и треугольник AEB.

В силу задачи 13 $AE' + E'B < AE + EB$. Аналогично выберем точку F', так, чтобы $DF = CF'$.

Ясно, что $AE + BE + EF + CF + DF \geqslant \geqslant AE' + BE' + E'F' + CF' + DF'$.

Пусть прямая $E'F'$ встречает AB и CD в точках M и N.

Тогда $AE' + BE' + CF' + DF' + E'F' = = (AE' + BE' - E'M) + (CF' + DF' - F'N) + + MN$.

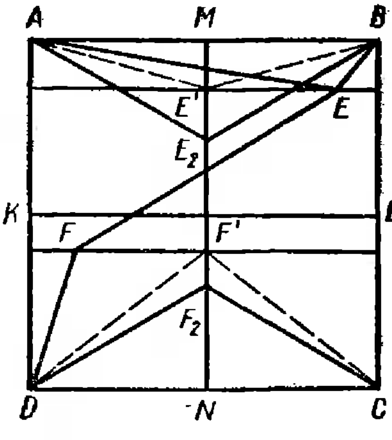


Рис. 210.

Воспользуемся задачей 17. Для этого выберем на MN точки E_2 и F_2 так, чтобы $\measuredangle BAE_2 = \measuredangle CDF_2 = 30°$. Тогда (см. задачу 17) $AE' + BE' - E'M \geqslant AE_2 + + BE_2 - E_2M$,

$$AF' + BF' - F'N \geqslant AF_2 + BF_2 - F_2N$$

и поэтому

$AE + BE + EF + CF + DF \geqslant (AE_2 + BE_2 - E_2M) + (CF_2 + DF_2 - F_2M) + + MN = AE_2 + BE_2 + CF_2 + DF_2 + E_2F_2$.

Итак, из всех рассматриваемых линий наименьшую длину имеет линия, составленная из отрезков: $AE_2, BE_2, CF_2, DF_2, E_2F_2$.

§ 4. 3. В нашем случае $\boldsymbol{a} = (1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1)$, $\boldsymbol{b} = (21,\ 32,\ 45,\ 55,\ 57,\ 64,\ 77,\ 80,\ 90,\ 96)$, $\boldsymbol{c} = (0{,}39,\ 0{,}55,\ 0{,}64,\ 0{,}76,\ 0{,}81,\ 0{,}91,\ 1{,}05,\ 1{,}05,\ 1{,}18,\ 1{,}22)$ Поэтому $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 10$; $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 617$; $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = 43505$; $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 8{,}56$; $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = =589{,}0$. Нормальная система (12) — (13) принимает вид:

$10x + 617y = 8{,}56$; $617x + 43505y = 589{,}0$.

Отсюда $x = 0{,}177$, $y = -0{,}011$.

4. Из условия задачи получаем следующую систему уравнений:

$$x + 0 \cdot y = 66{,}7;\quad x + 15y = 80{,}6;\quad x + 36y = 99{,}4;$$
$$x + 4 \cdot y = 71{,}0;\quad x + 21y = 85{,}7;\quad x + 51y = 113{,}6;$$
$$x + 10y = 76{,}3;\quad x + 29y = 92{,}9;\quad x + 68y = 125{,}1.$$

В данном случае $\boldsymbol{a} = (1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1)$,

$$\boldsymbol{b} = (0;\ 4;\ 10;\ 15;\ 21;\ 29;\ 36;\ 51;\ 68),$$
$$\boldsymbol{c} = (66{,}7;\ 71;\ 76{,}3;\ 80{,}6;\ 85{,}7;\ 92{,}9;\ 99{,}4;\ 113{,}6;\ 125{,}1).$$

Поэтому $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 9$; $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = 10144$; $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 234$; $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 811{,}3$; $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 24628{,}6$. Нормальная система приобретает вид:

$9x + 234y = 811{,}3$; $234x + 10144y = 24628{,}6$.

Отсюда $x = 67{,}5$; $y = 0{,}87$.

Глава X

§ 1. 9. в) Найдем сначала такие геометрические прогрессии $y_n = q^n (q \neq 0)$, которые удовлетворяют условию

$$y_{n+2} = y_n + y_{n+1}. \tag{1}$$

Условие (1) дает $q^{n+2} = q^n + q^{n+1}$, откуда $q^2 - q - 1 = 0$, $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. При любом выборе постоянных A_1 и A_2 последовательность $y_n = A_1 \cdot q_1^n + A_2 \cdot q_2^n$ удовлетворяет условию (1). Их надо выбрать из того условия, что $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. Получим $A_1 + A_2 = 0$, $A_1 q_1 + A_2 q_2 = 1$. Отсюда

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\quad A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}},\quad y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_1^n - q_2^n\right);$$ г) $$y_{n+1} \cdot y_{n-1} - y_n^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_1^{n+1} - q_2^{n+1}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_1^{n-1} - q_2^{n-1}\right) - \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_1^n - q_2^n\right)\right]^2 = -\frac{1}{5}\left[\left(q_1^2 + q_2^2\right) q_1^{n-1} \cdot q_2^{n-1} - 2q_1^n \cdot q_2^n\right] = -\frac{1}{5}(q_1 - q_2)^2 (q_1 \cdot q_2)^{n-1} = (-1)^n.$$

§ 3. 1. а) $$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому $$\lim_{n\to\infty} S_n = 1,$$

б) $$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

2. а) S_n — сумма n членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем (-2). Поэтому $S_n = \frac{(-1)^n \cdot 2^n - 1}{-2-1}$, $|S_n| > \frac{1}{3} \cdot (2^n - 1) \to \infty$, при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность S_n не имеет определенного конечного предела; б) $S_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}}$.

При $n \to \infty$ получим $\lim S_n = \frac{2}{3}$. Итак, ряд сходится, и его сумма равна $\frac{2}{3}$.

3. $$S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \ldots + \frac{n}{2n+1}.$$

Если бы ряд сходился к сумме S, то мы имели бы:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$. Но $S_n - S_{n-1} = \frac{n}{2n+1}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

Противоречие доказывает ошибочность допущения о сходимости ряда.

4. Пусть ряд сходится, S — его сумма. Тогда при $n \to \infty$

$$\lim S_n = S, \lim S_{n-1} = S, \lim (S_n - S_{n-1}) = 0, \text{ т. е.}$$
$$\lim a_n = 0.$$

§ 5. 11. Пусть $P = \overline{x_1, x_2, \dots, x_m}$. Тогда $\frac{a}{b} = 0x_1x_2, \dots x_m x_1 x_2 \dots x_m \dots$, то есть $\frac{a}{b} = \frac{P}{10^m} + \frac{P}{10^{2m}} + \dots + \frac{P}{10^{km}} + \dots = \frac{P}{10^m - 1}$.

12. Из задачи 11 видно, что $\frac{1}{p} = \frac{P}{10^{p-1} - 1}$, то есть $p \cdot P = 10^{p-1} - 1$. А это число содержит $p-1$ девяток.

13. Из задачи 11 видно, что $\frac{1}{p} = \frac{P}{10^m - 1}$, $\frac{k}{p} = \frac{P_k}{10^m - 1}$; отсюда $P_k = kP$.

14. Согласно задаче 13, $2P = P_2$, то есть должен получиться период дроби $\frac{2}{7}$ (285714).

15. См задачу 13: $5P_1 = P_5 = 714285$.

§ 6. 5. При $n = 0$ утверждение верно. Действительно, подходящая дробь $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1}$, и можно принять $P_0 = q_0$, $Q_0 = 1$. Именно эти значения мы и получим, если воспользоваться формулами (6) при $P_{-2} = Q_{-1} = 0$, $Q_{-2} = P_{-1} = 1$. Пусть теперь число k таково, что для всех $n < k$ числители и знаменатели подходящих дробей $\frac{P_n}{Q_n}$ можно вычислить последовательно по формулам (6). Докажем, что и P_k, Q_k тоже можно вычислить по тем же формулам, то есть

$$P_k = q_k \cdot P_{k-1} + P_{k-2}, \quad Q_k = q_k \cdot Q_{k-1} + Q_{k-2}.$$

Так как

$$\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = q_0 + \frac{1|}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \dots + \frac{1|}{|q_{k-1}},$$
$$\frac{P_k}{Q_k} = q_0 + \frac{1|}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \dots + \frac{1|}{|q_k}$$

то отсюда ясно, что $\frac{P_k}{Q_k}$ получается из $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$, если в последней дроби заменить q_{k-1} на $q_{k-1} + \frac{1}{q_k}$.

Но

$$\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{q_{k-1} \cdot P_{k-2} + P_{k-3}}{q_{k-1} \cdot Q_{k-2} + Q_{k-3}},$$

причем P_{k-2}, Q_{k-2}, P_{k-3}, Q_{k-3} от q_{k-1} не зависят.

Поэтому

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{\left(q_{k-1} + \frac{1}{q_k}\right) P_{k-2} + P_{k-3}}{\left(q_{k-1} + \frac{1}{q_k}\right) Q_{k-2} + Q_{k-3}} = \frac{q_k \cdot (q_{k-1} \cdot P_{k-2} + P_{k-3}) + P_{k-2}}{q_k (q_{k-1} \cdot Q_{k-2} + Q_{k-3}) + Q_{k-2}}.$$

Но в силу индуктивного допущения

$$P_{k-1} = q_{k-1} \cdot P_{k-2} + P_{k-3}, \quad Q_{k-1} = q_{k-1} \cdot Q_{k-2} + Q_{k-3}.$$

Поэтому $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{q_k \cdot P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k \cdot Q_{k-1} + Q_{k-2}}$, откуда видно, что члены q-й подходящей дроби могут быть действительно вычислены по формулам (6). Теперь ясно, что формулы (6) пригодны при любом натуральном n.

8. Так как $\frac{5}{8} = 0 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2}$ $(m = 4)$ и $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{2}{3}$, то по формуле Эйлера (при $n = 4$) получим $8 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 1$, то есть $x_0 = 2$, $y_0 = 3$. Общее решение $x = 2 + 5t$; $y = 3 + 8t$ $(t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

9. $\frac{117}{83} = 1 + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|3} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1}$ $(m = 6)$, $\frac{P_5}{Q_5} = \frac{86}{61}$.

По формуле Эйлера $Q_6 \cdot P_5 - P_6 \cdot Q_5 = 1$, то есть $83 \cdot 86 - 117 \cdot 61 = 1$. Поэтому $x_0 = 86$, $y_0 = 61$, $x = 86 + 117t$, $y = 61 + 83t$.

§ 8. 3. Построив графики $y = x^3$ и $y = 1 - 3x$, убеждаемся, что уравнение имеет единственный вещественный корень (графики пересекаются лишь в одной точке). Так как абсцисса точки пересечения графиков заключена между 0 и 1, то это и означает, что корень — между 0 и 1. К этому выводу можно было бы также прийти из соображений непрерывности. Последовательные приближения находим по формуле $x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2 + 3}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Получаем: $x_1 = \frac{1}{1^2 + 3} = 0{,}25$; $x_2 = \frac{1}{x_1^2 + 3} = 0{,}326\ldots \approx 0{,}33$; $x_3 = \frac{1}{x_2^2 + 3} \approx 0{,}32$.

4. а) Легко проверить, что $x = 4$ — корень; б) построив графики $y = 4x$ и $y = 2^x$, убедимся, что уравнение имеет всего два корня; в) так как обе части данного уравнения меняются непрерывно с ростом x и при $x = 0$ его левая часть меньше правой, а при $x = 1$ левая часть больше правой, то уравнение имеет корень x между 0 и 1; г) чтобы применить метод неподвижной точки для нахождения этого корня, перепишем уравнение в виде: $x = 2^{x-2}$. Положив $x_0 = 0$, вычисляем последовательные приближения по формуле: $x_{n+1} = 2x_n^{-2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Получаем: $x_1 = 2^{-2} = 0{,}25$;

$x_2 = 2^{0{,}25-2} = 0{,}297\ldots$; после округления положим: $x_2 = 0{,}30$;

$x_3 = 2^{0{,}30-2} = 0{,}307\ldots$; после округления положим $x = 0{,}31$;

$x_4 = 2^{0{,}31-2} = 0{,}310\ldots$, то есть $x_4 \approx 0{,}31$.

5. Сначала убедимся, что если $x_n > 0$, то $x_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$. Действительно, в силу (8) $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \geqslant 0$, то есть $x_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$.

В частности, если $0 < x_n \leqslant \sqrt{a}$, то $x_n \leqslant \sqrt{a} \leqslant x_{n+1}$, и $0 \leqslant x_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant x_{n+1} - x_n$, то есть имеет место (9). Покажем, что (9) справедливо и при $x_n > \sqrt{a}$. В этом случае имеем: $(x_n - x_{n+1}) - (x_{n+1} - \sqrt{a}) = \sqrt{a} - \frac{a}{x_n} = \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)\sqrt{a} > 0$, $x_{n+1} - \sqrt{a} < x_n - x_{n+1}$. Но $x_{n+1} - \sqrt{a} \geqslant 0$; следовательно, и $x_n - x_{n+1} > 0$, так что можно написать: $|x_{n+1} - \sqrt{a}| < |x_{n+1} - x_n|$.

Докажем (10):

$$|x_n - \sqrt{a}| = |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - \sqrt{a})| \leqslant |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - \sqrt{a}|.$$

В силу (9) имеем: $|x_n - \sqrt{a}| \leqslant 2|x_n - x_{n+1}|$.

6. Положим $x_0 = 3$ (можно было бы в качестве x_0 принять также число 2 или любое другое положительное число). По формуле Герона (8) при $a = 6$ имеем:

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{6}{x_0}\right)=2,50;\ x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{6}{x_1}\right)=2,45;\ x_3=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{6}{x_2}\right)=2,449\ldots.$$

Так как $|x_2-x_3|<0,001$, то согласно (10) получим: $|\sqrt{6}-x_2|\leqslant 2|x_2-x_3|<$ $<0,002$. Итак, $\sqrt{6}\approx 2,45$, причем погрешность, допускаемая при замене $\sqrt{6}$ на 2,45, меньше 0,002.

7. Так как при $x=3$ разность между левой частью уравнения и правой отрицательна, а при $x=4$ — положительна, причем с ростом x от 3 до 4 эта разность меняется непрерывно, то между 3 и 4 уравнение имеет корень $(\bar{x})$. Положим $f(x)=3+\dfrac{1}{x+8}$. Эта функция отображает, очевидно, отрезок [3, 4] в себя (если x между 3 и 4, то и $f(x)$ между 3 и 4). Кроме того, при любых x' и x'' из отрезка [3, 4] имеем:

$$|f(x'')-f(x')|=\left|\frac{1}{x''+8}-\frac{1}{x'+8}\right|=\frac{|x''-x'|}{(x'+8)(x''+8)}\leqslant\frac{1}{121}|x''-x'|.$$

Таким образом, в данном случае при $q=\dfrac{1}{121}$ имеет место неравенство (12). Так как $q<1$, то $f(x)\equiv 3+\dfrac{1}{x+8}$ дает *сжатое* отображение отрезка [3, 4] в себя. Последовательные приближения будем искать по формуле $x_{n+1}=3+\dfrac{1}{x_n+8}$ ($n=0, 1, 2, \ldots$), приняв $x_0=3$. Так как $q<\dfrac{1}{2}$, то можно воспользоваться оценкой (20). Получаем:

$$x_0=3,\ x_1=3+\frac{1}{x_0+8}=3,0909\ldots\approx 3,091;$$

$$x_1=3,091,\ x_2=3+\frac{1}{x_1+8}=3,0901\ldots\approx 3,090;$$

$$x_2=3,090,\ x_3=3+\frac{1}{x_2+8}=3,0901\ldots\approx 3,090.$$

Отсюда следует, что, полагая $\bar{x}\cong 3,090$, допустим погрешность, которая меньше 0,001.

8. Записав данное уравнение в виде $(x+4)^2=\dfrac{2}{x}$ и построив графики $y=(x+4)^2$ и $y=\dfrac{2}{x}$, видим, что уравнение имеет *единственный* положительный корень $(\bar{x})$. Теперь уравнение запишем так: $x=\dfrac{2}{(x+4)^2}$. Корень $\bar{x}$ заключен между 0 и 1—в этом легко убедиться, сравнивая обе части уравнения сначала при $x=0$, а затем при $x=1$. Функция $f(x)=\dfrac{2}{(x+4)^2}$ дает *сжатое* отображение отрезка [0, 1] в себя. В самом деле, при $0\leqslant x\leqslant 1$ имеем $0\leqslant f(x)\leqslant 1$; кроме того, при $0\leqslant x'<x''\leqslant 1$ получаем:

$$|f(x'')-f(x')|=\left|\frac{2}{(x''+4)^2}-\frac{2}{(x'+4)^2}\right|=2\,\frac{(x'+x''+8)\,|x''-x'|}{(x''+4)^2\cdot(x'+4)^2}<$$

$$<\frac{2\cdot 10}{4^2\cdot 4^2}|x''-x'|<\frac{1}{12}|x''-x'|,$$

то есть $|f(x'')-f(x')|<\dfrac{1}{12}|x''-x'|$. Таким образом, верно неравенство (12) при $q=\dfrac{1}{12}$. Полагаем $x=0$ и находим последовательные приближения по формуле:

$$x_{n+1}=\frac{2}{(x_n+4)^2} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как $q<\dfrac{1}{2}$, то можно воспользоваться оценкой (20). Вычислим $x_1,\ x_2,\ \ldots,$ округляя каждое из этих чисел до трех десятичных знаков; получим:

$$x_0=0, \qquad x_1=\frac{2}{(x_0+4)^2}=0,025;$$

$$x_1=0,125, \quad x_2=\frac{2}{(x_1+4)^2}=0,1175\ldots\approx 0,118;$$

$$x_2=0,118, \quad x_3=\frac{2}{(x_2+4)^2}=0,1179\ldots\approx 0,118.$$

Из общих соображений, приведенных в основном тексте (см. формулы (21) и (22)) заключаем, что $|\overline{x}-x_2|<0,001$, то есть $\overline{x}\approx 0,118$, причем погрешность не превышает $0,001$.

9. Записав данное уравнение в виде $x^2+4=\dfrac{1}{x}$ и построив графики функций $y=x^2+4$ и $y=\dfrac{1}{x}$, легко убедиться, что уравнение имеет единственный положительный корень. Перепишем теперь уравнение так: $x=\dfrac{1}{x^2+4}$. Сравнивая левую часть с правой сначала при $x=0$, а затем при $x=1$, заключаем, что искомый корень $(\overline{x})$ заключен между 0 и 1. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$ осуществляет *сжатое* отображение отрезка $[0,\ 1]$ в себя. Действительно, при любых x' и x'', для которых $0<x'<x''<1$, имеем:

$$|f(x'')-f(x')|=\left|\frac{1}{(x'')^2+4}-\frac{1}{(x')^2+4}\right|=\frac{(x'+x'')}{[(x')^2+4]\,[(x'')^2+4]}\,|x''-x'|<$$
$$<\frac{1}{8}\,|x''-x'|,$$

то есть $|f(x'')-f(x')|<q\,|x''-x'|$ при $q=\dfrac{1}{8}<1$. Так как в данном случае $q<\dfrac{1}{2}$, то можно воспользоваться формулами (21) — (22). Принимая $x_0=1$, получим:

$$x_0=1,\ x_1=\frac{1}{x_0^2+4}=0,5; \qquad x_2=0,235,\ x_3=\frac{1}{x_2^2+4}=0,2466\ldots;$$

$$x_1=0,500,\ x_2=\frac{1}{x_1^2+4}=0,235\ldots; \qquad x_3=0,247,\ x_4=\frac{1}{x_3^2+4}=0,2462\ldots;$$

$$x_4=0,246,\ x_5=\frac{1}{x_4^2+4}=0,2461\ldots;$$

Так как после округления с тремя верными десятичными знаками x_5 совпадает с x_4, то можно написать:

$\bar{x} \approx 0{,}246$ (погрешность меньше 0,001).

10. Уравнение Кеплера запишем в виде $x = e \sin x + M$ (x — число, которое можно толковать как радианную меру некоторого угла). Уравнение имеет единственный корень $\bar{x}$ (это ясно из графиков $y = \frac{x - M}{e}$ и $y = \sin x$).

Положим $f(x) = e \sin x + M$. Тогда при любых x' и x''

$$|f(x'') - f(x')| = e|\sin x'' - \sin x'| = 2e\left|\sin\frac{x'' - x'}{2} \cdot \cos\frac{x''+x'}{2}\right|.$$

Но $\left|\cos\frac{x''+x'}{2}\right| \leq 1$, $\left|\sin\frac{x''-x'}{2}\right| < \left|\frac{x''-x'}{2}\right|$.

Поэтому $|f(x'') - f(x')| < e\,|x'' - x'|$.

Таким образом, в данном случае можно принять $q = e = \frac{1}{5} < 1$. Следовательно, отображение числовой прямой, производимое функцией $e \sin x + M$, является сжатым. Так как $q < \frac{1}{2}$, то можно воспользоваться формулами (21)—(22) (при $k = 2$). Полагая $x_0 = 0$, получаем:

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{5}\sin x_0 + 4 = 4; \qquad x_2 = 3{,}85;\ x_3 = \frac{1}{5}\sin x_2 + 4 = 3{,}87\ldots;$$

$$x_1 = 4,\quad x_2 = \frac{1}{5}\sin x_1 + 4 = 3{,}85\ldots; \qquad x_3 = 3{,}87;\ x_4 = \frac{1}{5}\sin x_3 + 4 = 3{,}872\ldots.$$

А это значит, что $|\bar{x} - x_3| < 0{,}01$, то есть в приближенном равенстве $\bar{x} \approx 3{,}87$ погрешность не превышает 0,01.

12. Полагая $f(x) = 2^{x-2}$, имеем: $f'(x) = 2^{x-2} \cdot \ln 2$. При $0 < x < 1$ получаем: $|f'(x)| < \frac{\ln 2}{2}$. Примем $q = \frac{\ln 2}{2}$. Ясно, что $q < \frac{1}{2}$. Поэтому можно применить (19). При $n = 3$ получим

$$|\bar{x} - 0{,}31| = |\bar{x} - x_3| < 2|x_4 - x_3| = 2|0{,}310\ \ldots - 0{,}31| < 0{,}002,$$

то есть, полагая $x \approx 0{,}31$, допускаем погрешность, меньшую, чем 0,002.

13. Целочисленный корень равен 10. Сравнивая обе части уравнения сначала при $x = 1$, а затем при $x = 2$, убедимся, что уравнение имеет корень на отрезке [1, 2]. Запишем уравнение так: $x = 10^{0{,}1x}$. Нетрудно проверить, что функция $f(x) = 10^{0{,}1x}$ отображает [1, 2] в себя (если $1 < x < 2$, то $1 < f(x) < 2$). Кроме того, при $1 < x < 2$ $|f'(x)| = |10^{0{,}1x} \cdot 0{,}1 \cdot \ln 10| < 10^{-0{,}8} \cdot \ln 10 < \frac{1}{2}$. Отсюда видно, что $f(x)$ дает *сжатое* отображение отрезка [1, 2] в себя, причем $q < \frac{1}{2}$. Поэтому допустимо применить оценку (20). Полагая $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = 10^{0{,}1x_n}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), получим:

$$x_0 = 1,\quad x_1 = 10^{0{,}1} = 1{,}25\ldots,\quad x_3 = 1{,}36;\quad x_4 = 1{,}368\ldots;$$

$$x_1 = 1{,}26,\quad x_2 = 1{,}337\ldots;\quad x_4 = 1{,}37;\quad x_5 = 1{,}371\ldots.$$

$$x_2 = 1{,}34,\quad x_3 = 1{,}361\ldots;$$

В силу (20) заключаем, что $|\bar{x} - 1{,}37| < 2|x_5 - x_4| < 0{,}005$.

§ 2. 10. Примем обозначения:

$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}=\alpha$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{57}=\beta$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}=\gamma$. Тогда, $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{16}{63}$, $\operatorname{tg}3\alpha=\frac{191}{488}$,

$\operatorname{tg}(3\alpha+\beta)=\frac{7}{17}$, $\operatorname{tg}2(3\alpha+\beta)=\frac{119}{120}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\gamma\right)=\frac{119}{120}$.

Таким образом,

$$\operatorname{tg}2(3\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\gamma\right).$$

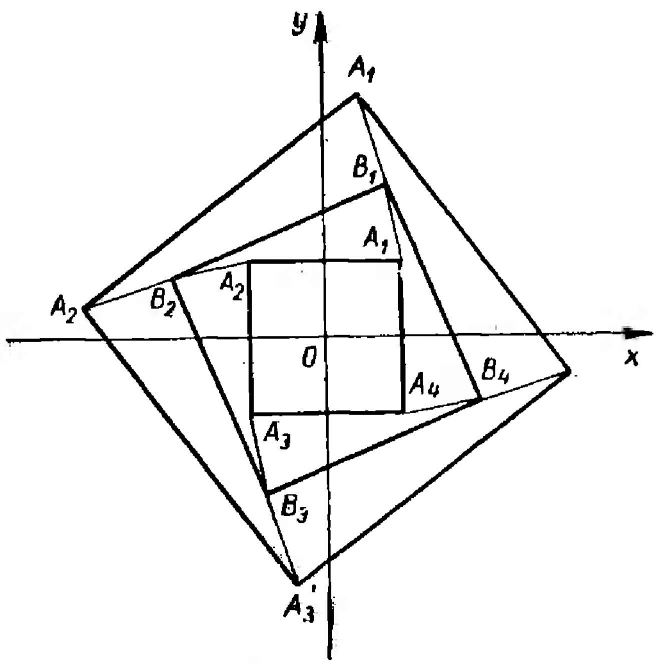


Рис. 211.

Так как $\operatorname{arctg}x$ монотонно возрастает и числа $\frac{1}{239}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{57}$ расположены между нулем и 1, то углы α, β, γ заключены между $\operatorname{arctg}0$ и $\operatorname{arctg}1$, т. е. между 0 и $\frac{\pi}{4}$. Следовательно $0<\frac{\pi}{4}-\gamma<\frac{\pi}{4}$, $0<3\alpha+\beta<\pi$. $\operatorname{tg}(3\alpha+\beta)=\frac{7}{17}>0$. Поэтому $0<3\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ и $0<2(3\alpha+\beta)<\pi$.

Так как оба угла $\frac{\pi}{4}-\gamma$ и $2(3\alpha+\beta)$ заключены между 0 и π и имеют один и тот же тангенс, то они равны.

§ 5. 4. Можем считать, что вершины A_1, A_2, A_3, A_4 (рис. 211), следует в порядке обхода контура против часовой стрелки. Пусть m — коэффициент подобия, φ — угол поворота. Тогда при $k=1, 2, 3, 4$

$$a_k'=m\cdot a_ke^{\varphi i},\quad b_k=\frac{1}{2}\left(a_k+a_k'\right)=\frac{a_k}{2}\left(1+m\cdot e^{\varphi\cdot i}\right). \tag{1}$$

Обозначим число $\frac{1}{2}(1+me^{\varphi\cdot i})$ через c.

Тогда $b_k=c\cdot a_k$ при $k=1, 2, 3, 4$. А это значит, что каждая из точек B_k получается из точки A_k поворотом на угол, равный $\arg c$, и центрально-подобного преобразования с коэффициентом $|c|$. Но при таких преобразованиях квадрат $A_1A_2A_3A_4$ преобразуется в квадрат.

ЛИТЕРАТУРА[1]

Александров И. И. [1] Сборник геометрических задач на построение. М., Учпедгиз, 1950.

Александров И. И. и Александров А. И. [1]. Методы решения арифметических задач. М., Учпедгиз, 1953.

Александров П. С. [1] Н. И. Лобачевский — великий русский математик. М., «Знание», 1956.

[2] Что такое неевклидова геометрия. М., Изд-во АПН РСФСР, 1954.

Андронов И. К. [1] Полвека развития школьного математического образования в СССР. М., «Просвещение», 1967.

Аргунов Б. И. и Балк М. Б. [1] Геометрические построения на плоскости. М., Учпедгиз, 1957.

[2] Элементарная геометрия. М., «Просвещение», 1966.

Багратуни Г. В. [1] К. Ф. Гаусс. М., Геодезиздат, 1955.

Бакельман И. Я. [1] Инверсия. М., «Наука», 1966.

Балк Г. Д. [1] Математика на железной дороге. МвШ, 1961, № 4.

[2] О применении эвристических приемов в школьном преподавании математики. МвШ, 1969, № 4.

Балк М. Б. [1] Вычисление сумм с помощью взвешивания. Сборник «Математическое просвещение», вып. 4. М., Физматгиз, 1959.

[2] Геометрические приложения понятия о центре тяжести. М., Физматгиз, 1959.

[3] Организация и содержание внеклассных занятий по математике. М., Учпедгиз, 1956.

[4] Элементы динамики космического полета. М., Физматгиз, 1965.

Берман Г. Н. [1] Приемы счета. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.

[2] Счет и число. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.

[3] Циклоида. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.

[4] Число и наука о нем. М.—Л., ГИТТЛ, 1954.

Беккенбах Э. и Беллман Р. [1] Введение в неравенства. М., «Мир», 1963.

Бескин Н. М. [1] Методика геометрии. М., Учпедгиз, 1947.

Болтянский В. Г. [1] Равновеликие и равносоставленные фигуры. М., Физматгиз, 1956.

[2] Что такое дифференцирование. М., Физматгиз. 1960.

Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. [1] Симметрия в алгебре. М., «Наука», 1967.

Болтянский В. Г. и Яглом И. М. [1] Преобразования. Векторы. М., «Просвещение», 1964.

[1] Ниже пишем МвШ вместо слов: журнал «Математика в школе».

[2] Школьный математический кружок при МГУ и московские математические олимпиады. В кн.: «Сборник задач московских математических олимпиад» (сост. А. А. Леман). М., «Просвещение», 1965.

Брадис В. М. [1] Как надо вычислять. М., Учпедгиз, 1959.

[2] Средства и способы элементарных вычислений. М.—Л., Изд-во АПН РСФСР, 1948.

Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева А. К. [1] Ошибки в математических рассуждениях. М., «Просвещение», 1967.

Бушуев Б. Е. [1] Графический метод решения задач линейного программирования в школе. МвШ, 1962, № 3.

Бутко Д. Г. [1] Проведение урока геометрии в цехе завода. МвШ, 1962, № 6.

Вавилов С. И. [1] Исаак Ньютон. М., Изд-во АН СССР, 1945.

Васильев М. Г. [1] Правила подсчета цифр, сокращенного умножения и деления в курсе VIII класса. МвШ, 1953, № 4; 1951, № 5 и 1953, № 2.

Васильев Н. Б., Егоров А. А. [1] Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков. М., Учпедгиз, 1963.

Вейль Г. [1] Симметрия. М., «Наука», 1967.

Вентцель Е. С. [1] Задачи и основные принципы теории игр. МвШ, 1962, № 4.

[2] Элементы теории игр. М., Физматгиз, 1961.

Вентцель М. К. [1] Сферическая тригонометрия. М., Геодезиздат, 1948.

Веселовский И. Н. [1] Архимед. М., Учпедгиз, 1957.

Виленкин Н. Я. [1] Комбинаторика. М., «Наука», 1969.

[2] Метод последовательных приближений. М., «Наука», 1968.

[3] Научное содержание внеклассной работы по математике. МвШ, 1955, № 6.

[4] Рассказы о множествах. М., «Наука», 1965.

Виленкин Н. Я., Гутер Р. С., Овчинский Б. В., Шварцбурд С. И., Ашкинузе В. Г. [1] Алгебра. М., «Просвещение», 1968.

Вильямс Дж. [1] Совершенный стратег. М., «Советское радио», 1960.

Винер Н. [1] Я — математик. М., «Наука», 1967.

Виноградов И. М. [1] Софья Ковалёвская. «Октябрь», 1950, № 1.

Воробьев Б. В. [1] Как геометрия служит технике. МвШ, 1959, №3.

Воробьев Н. Н. [1] Числа Фибоначчи. М., «Наука», 1964.

Воронцова Л. [1] Софья Ковалевская. М., «Молодая гвардия», 1959.

Выгодский М. Я. [1] Арифметика и алгебра в древнем мире. М., «Наука», 1967.

Гайдук Ю. М. [1] Сриниваса Рамануджан. МвШ, 1963, № 3.

Гайдуков И. И. [1] Абсолютная величина. М., «Просвещение», 1968.

Галанин Д. Д. [1] Как велик миллион? МвШ, 1955, № 6.

Гарднер М. [1] Математические чудеса и тайны. М., «Наука», 1964.

Гельфан Е. М. [1] Арифметические игры и упражнения. М., «Просвещение», 1968.

Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А. [1] Метод координат. М., «Наука», 1965.

Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э. [1] Функции и графики. М., «Наука», 1965.

Гельфанд С. И., Гервер М. Л., Кириллов А. А., Константинов Н. Н., Кушниренко А. Г. [1] Задачи по элементарной математике. М., «Наука», 1965.

Гельфанд М. Б., Павлович В. С. [1] Внеклассная работа по математике в восьмилетней школе. М., «Просвещение», 1965.

Гельфонд А. О. [1] Решение уравнений в целых числах. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.

Германович П. Ю. [1] Вопросы и задачи на соображение. М., Учпедгиз, 1957.

[2] Математические викторины. М., Учпедгиз, 1959.

[3] Сборник задач по математике на сообразительность. Учпедгиз, 1960.
Гильберт Д. и Кон-Фоссен С. [1] Наглядная геометрия. М., ГИТТЛ, 1951.
Глаголев Н. А. [1] Номография для школьника. М., Учпедгиз, 1959.
[2] Элементарная геометрия. М., Учпедгиз, 1954.
Гмурман В. Е. [1] Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. М., 1963.
Глейзер Г. И. [1] История математики в школе. М., «Просвещение», 1964.
Гнеденко Б. В. [1] Краткие беседы о зарождении и развитии математики. М., Изд-во АПН РСФСР, 1946.
[2] Андрей Николаевич Колмогоров. МвШ, № 2, 1963.
[3] Очерки по истории математики в России. М.—Л., ГИТТЛ, 1946.
[4] Роль математики в развитии техники и производства. МвШ, № 1, 1962.
[5] Языком математики. М., «Знание, 1962.
Гнеденко Б. В., Королюк В. С., Ющенко Е. Л. [1] Элементы программирования. М., Физматгиз, 1961.
Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. [1] Элементарное введение в теорию вероятностей. М., «Наука», 1964.
Голицын С. [1] Хочу быть топографом. М., Детгиз, 1954.
Головина Л. И. [1] Графы и их применения. МвШ, № 3, 1965.
Головина Л. И. и Яглом И. М. [1] Индукция в геометрии. М., Физматгиз, 1961.
Горячкин Е. Н. [1] Из истории мер и весов. М., Изд-во АПН РСФСР, 1953.
Градштейн И. С. [1] Прямая и обратная теорема. М., Физматгиз, 1959.
Гржегорчик А. [1] Популярная логика. М., «Наука», 1965.
Гурский И. П. [1] Функции и построение графиков. М., «Просвещение», 1968.
Гутер Р. С., Овчинский Б. В., Резниковский П. Т. [1] Программирование и вычислительная математика. М., «Наука», 1965.
Дальма А. Эварист Галуа, революционер и математик. М., Физматгиз, 1960.
Данилевич Г. А. [1] Вычисление объема сена в скирдах и стогах. МвШ, № 2, 1957.
Делоне Б. Н. [1] Элементарное доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского. М., ГИТТЛ, 1956.
Делоне Б. Н., Житомирский О. К. [1] Задачник по геометрии. М.—Л., ГИТТЛ, 1949.
Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. М., «Наука», 1967.
Денисов А. П. [1] Леонтий Филиппович Магницкий. «Просвещение», 1967.
Депман И. Я. [1] Возникновение системы мер и способов измерения величин. М., Учпедгиз, 1956.
[2] Меры и метрическая система. М.—Л., Детгиз, 1953.
[3] Метод математической индукции. М., Учпедгиз, 1957.
[4] Мир чисел, Л., Детиздат, 1963.
[5] Первое знакомство с математической логикой. Л., «Знание», 1965.
[6] Рассказы о математике. Л., Детгиз, 1954.
[7] Рассказы о решении задач. Л., Детгиз, 1964.
[8] История арифметики. М., «Просвещение, 1965.
[9] Рассказы о старой и новой алгебре. Л., Детгиз, 1967.
Дорф П. Я., Румер А. О. [1] Измерения на местности. М., Изд-во АПН, 1957.
Дорфман А. Г. [1] Оптика конических сечений. М., Физматгиз, 1959.
Дубнов Я. С. [1] Ошибки в геометрических доказательствах. М., ГИТТЛ, 1955.

Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. П., Толпыго А. Н. [1] Математические задачи. М., «Наука», 1965.
Д. Э. (Детская энциклопедия), т. 2, изд. 2. М., «Просвещение», 1964.
Евклид [1] Начала. Перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
Ефимов Н. В. [1] Высшая геометрия. М., Физматгиз, 1961.
Еленьский Щ. [1] По следам Пифагора. М., Детгиз, 1961.
Заботин И. [1] Лобачевский. Казань, Татгосиздат, 1954.
Завельский Ф. С. [1] Время и его измерение. М., ГИТТЛ, 1955.
Зайденман И. А. и Маргулис А. Я. [1] Математика в сетевом планировании. М., «Знание», 1967.
Законников П. Н. [1] О решении некоторых практических задач, МвШ, № 5, 1959.
Зельдович Я. Б. [1] Высшая математика для начинающих М., «Наука», 1968.
Зетель С. И. [1] Геометрия линейки и геометрия циркуля. М., Учпедгиз, 1959.
[2] Задачи на максимум и минимум. М.—Л., ГИТТЛ, 1951
[3] Новая геометрия треугольника. М., Учпедгиз, 1962.
Знаменский М. А. [1] Измерительные работы на местности в V—VII классах. М., Учпедгиз, 1956.
Инфельд Л. [1] Эварист Галуа — избранник богов. М., «Молодая гвардия», 1965.
Каган В. Ф. [1] Лобачевский и его геометрия. М., ГИТТЛ, 1955.
[2] Архимед. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1951.
Калужнин Л. А. [1] Что такое математическая логика. М., «Наука», 1964.
Кальбертсон Дж. Г. [1] Математика и логика цифровых устройств. М., «Просвещение», 1965.
Каченовский М. И. [1] Математический практикум по моделированию. М., Учпедгиз, 1959.
Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. [1] Введение в конечную математику. М., ИЛ, 1963.
Киселев А. П. [1] Алгебра, ч. 1—2. М., Учпедгиз, 1955.
[2] Геометрия, ч. I—II. М., Учпедгиз, 1955.
Киселев В. [1] Лев Понтрягин. «Семья и школа», № 7, 1949.
Кобринский Н. Е. и Пекелис В. Д. [1] Быстрее мысли. М. «Молодая гвардия», 1963.
Коксгер Г. С. М. [1] Введение в геометрию. М., «Наука», 1966.
Колмогоров А. Н. [1] О профессии математика. Изд-во МГУ, 1960.
Колосов А. А. [1] Внеклассная работа по математике в старших классах. М., Учпедгиз, 1955.
[2] Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах. М., Учпедгиз, 1963.
Кольман Э. и Зих О. [1] Занимательная логика. М., «Наука», 1966.
Кордемский Б. А. [1] Математическая смекалка. М., «Наука», 1965.
Кордемский Б. А. и Русалев Н. В. [1] Удивительный квадрат. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.
Коровкин П. П. [1] Неравенства. М., «Наука», 1966.
Костовский А. Н. [1] Геометрические построения одним циркулем. М., Физматгиз, 1960.
Котов А. Я. [1] Вечера занимательной арифметики. М., «Просвещение», 1967.
Кофман А., Фор Р. [1] Займемся исследованием операций. М., «Мир», 1966.
Крамская А. А. [1] Номограммы во внеклассной работе. МвШ, № 5, 1954.

Крейн С. Г., Ушакова В. Н. [1] Математический анализ элементарных функций. М., «Наука», 1966.
Крельштейн Б. И. [1] Необходимые и достаточные условия в математике. М., Учпедгиз, 1961.
Кречмар В. А. [1] Задачник по алгебре. М., «Наука», 1964.
Кронрод А. С., Яглом А. М., Яглом И. М. [1] Школьный математический кружок при МГУ, МвШ, № 2, 1947.
Крыжановский Д. А. [1] Изопериметры. М.,—Л., Физматгиз, 1959.
Крылов А. Н. [1] Собрание трудов, т. I, ч. 2. М., Изд-во АН СССР, 1951.
Кувчинский Е. В. [1] Планиметр-топорик. МвШ, № 3, 1956.
Кудрявцев П. С. [1] Исаак Ньютон. М., Учпедгиз, 1955.
Курант Р. и Роббинс Г. [1] Что такое математика. М., «Просвещение», 1966.
Лакатос И. [1] Доказательства и опровержения. М., «Наука», 1967.
Левин В. И. [1] Норберт Винер. МвШ, № 4, 1963.
[2] Рамануджан. М., «Знание», 1968.
Леман А. А. (составитель). [1] Сборник задач московских математических олимпиад. М., «Просвещение», 1965.
Ливанова А. М. [1] Три судьбы. М., «Молодая гвардия», 1959.
Лидский В. Б. и др. [1] Задачи по элементарной математике. М., «Наука», 1963.
Лиман М. М. [1] Конструирование учащимися наглядных пособий по геометрии. М., «Просвещение», 1965.
Линник Ю. В. [1] Метод наименьших квадратов. М., Физматгиз, 1962.
Литцман В. [1] Великаны и карлики в мире чисел. М., Физматгиз, 1959.
[2] Веселое и занимательное о числах и фигурах. М., Физматгиз, 1963.
[3] Где ошибка. М., Физматгиз, 1962.
[4] Теорема Пифагора. М., Физматгиз, 1960.
Лопшиц А. М. [1] Вычисление площадей ориентированных фигур. М., Физматгиз, 1956.
Лурье С. Я. [1] Архимед. М., Изд-во АН СССР, 1945.
Любич Ю. И., Шор Л. А. [1] Кинематический метод в геометрических задачах. М., «Наука», 1966.
Ляпин С. Е. [1] Суммирование некоторых конечных рядов. МвШ, № 4, 1951.
Люстерник Л. А. [1] Кратчайшие линии. М.—Л., ГИТТЛ, 1955.
[2] Выпуклые фигуры и многогранники. М., ГИТТЛ, 1956.
Майер Р. А. [1] Задачи по формированию функциональных понятий. М., «Просвещение», 1965.
Мак-Кинси Дж. [1] Введеине в теорию игр. М., .Физматгиз, 1960.
Малинин В. В. [1] Элементы математической логики во внеклассной работе. МвШ, № 5, 1962.
Малыгин К. А. [1] Развитие математики в Средней Азии в IX—XV веках. МвШ, № 3, 1955.
Маргулис Б. Е. [1] Системы линейных уравнений. М., Физматгиз, 1960.
Маркушевич А. И. [1] Возвратные последовательности. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.
[2] Замечательные кривые. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.
[3] Комплексные числа и конформные отображения. М., Физматгиз, 1960
[4] Ряды. М., Физматгиз, 1961.
Мацко Н. А. [1] Вычисление веса сена в скирдах и стогах. МвШ, № 1, 1955.
Мельников И. Г. [1] Метод неопределенных коэффициентов. МвШ, № 5, 1950.

Минковский В. Л. [1] За страницами учебника математики. М., «Просвещение», 1967.
Минчин С. Н., Шац А. Е. [1] Измерительный инструмент и техника измерений. М., Воениздат, 1957.
Моденов П. С. [1] Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. М., «Высшая школа», 1950.
Молодший В. Н. Очерки по вопросам обоснования математики. М., «Просвещение», 1967.
Морозова Е. А. и Петраков И. С. Международные математические олимпиады. М., «Просвещение», 1967.
Нагибин Ф. Ф. [1] Математическая шкатулка. М., «Просвещение», 1964.
[2] Эстремумы. М., «Просвещение», 1966.
Наркевич А. [1] Победа математика Понтрягина. «Техника — молодежи», № 3, 1950.
Натансон И. П. [1] Простейшие задачи на максимум и минимум. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
[2] Суммирование бесконечно малых величин. М.—Л., ГИТТЛ, 1953.
Нечаев Е [1] О задачах с техническим содержанием. МвШ, № 4, 1959.
Невяжский Г. Л. [1] Неравенства. М., Учпедгиз, 1949.
Нивен А. [1] Числа рациональные и иррациональные. М., «Мир», 1966.
Никитин В. В. и Рупасов К. А. [1] Определения математических понятий в курсе средней школы. М., Учпедгиз, 1963.
Никольский А. И. [1] Простейшие задачи теории вероятностей, МвШ, № 2, 1956.
Новоселов С. И. [1] Специальный курс тригонометрии. М., «Советская наука», 1953.
[2] Специальный курс элементарной алгебры. М., 1951.
Норден А. П. [1] Элементарное введение в геометрию Лобачевского. М., 1953.
Оре О. [1] Графы и их применение. М., «Мир», 1963.
[2] Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. М., Физматгиз, 1961.
Островский А. И. [1] 75 задач по элементарной математике — простых, но .... М., «Просвещение», 1966.
Островский А. И. и Кордемский Б. А. [1] Геометрия помогает арифметике. М., Физматгиз, 1960.
Панов Д. Ю. [1] Вычисление площадей. М., ГИТТЛ, 1946.
Пентковский М. В. [1] Считающие чертежи. М., ГИТТЛ, 1953.
Перельман Я. И. [1] Занимательная арифметика. М., Детгиз, 1954.
[2] Занимательная алгебра. М.—Л., ГИТТЛ, 1950.
[3] Занимательная геометрия. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.
[4] Живая математика, М.—Л., ГИТТЛ, 1947.
Перепелкин Д. И. [1] Геометрические построения в средней школе. М., Учпедгиз, 1953.
[2] Курс элементарной геометрии, ч. I—II. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
Пойа Д. [1] Как решать задачу. М., Учпедгиз, 1959.
[2] Математика и правдоподобные рассуждения. М., ИЛ, 1958.
Полубаринова-Кочина П. Я. [1] Жизнь и деятельность С. В. Ковалевской. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1950.
Поляк Г. Б. [1] Занимательные задачи. М., Учпедгиз, 1953.
Постников М. М. [1] Магические квадраты. М., Физматгиз, 1963.
Прудников В. Е. [1] П. Л. Чебышев — ученый и педагог. М., Учпедгиз, 1950.
Радемахер Г., Теплиц О. [1] Числа и фигуры. М., «Наука», 1966.
Рашевский П. К. [1] Геометрия и ее аксиоматика. Сб. «Математическое просвещение», вып. 5. М., Физматгиз, 1960.

Рейдемейстер К. [1] Трагедия Блэза Паскаля. «Знание—сила», 1954, № 12.
Румшиский Л. В. [1] Элементы теории вероятностей. М., «Наука», 1968.
Серебровская Е. К. [1] Опыт внеклассной работы по математике в V—VII классах. М., Учпедгиз, 1954.
Серпинский В. [1] О решении уравнений в целых числах. М., Физматгиз, 1961.
[2] О теории множеств. М., «Просвещение», 1966.
[3] Пифагоровы треугольники. М., Учпедгиз, 1959.
[4] Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики. М., Учпедгиз, 1961.
[5] Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. М., Физматгиз, 1963.
Сивашинский И. Х. [1] Задачник по элементарной математике. М., «Наука», 1966.
[2] Задачи по математике для внеклассных занятий. М., «Просвещение», 1968.
[3] Элементарные функции и графики. «Наука». М., 1965.
Скопец З. А. [1] Приложение комплексных чисел к задачам элементарной геометрии. МвШ, № 1, 1967.
Смычников Д. М. [1] Измерительные работы на местности в курсе математики средней школы. М., Учпедгиз, 1953.
Сойер У. У. [1] Прелюдия к математике. М., «Просвещение», 1965.
Солодовников А. С. [1] Введение в линейную алгебру и линейное программирование. М., «Просвещение», 1966.
Соминский И. С. [1] Элементарная алгебра. Дополнительный курс. М., Физматгиз, 1963.
[2] Метод математической индукции. М., «Наука», 1965.
Соминский И. С., Головина Л. И., Яглом И. М. [1] О математической индукции. М., «Наука», 1967.
Стражевский А. А. [1] Задачи на геометрические места точек в курсе геометрии средней школы. М., Учпедгиз, 1954.
Сушкевич А. К. [1] Обозначение чисел у разных народов. МвШ, № 4, 1948.
Столяр А. А. [1] Элементы математической логики. М., «Просвещение», 1964.
Трайнин Я. Л. [1] Основания геометрии. Учпедгиз, 1961.
Трахтенброт Б. А. [1] Алгоритмы и машинное решение задач. М., Физматгиз, 1960.
Тукачинский М. С. [1] Машины-математики. М., ГИТТЛ, 1958.
Успенский В. А. [1] Некоторые приложения механики к математике. М., Физматгиз, 1958.
[2] Треугольник Паскаля. М., «Наука», 1966.
Утемов В. А. [1] Приемы быстрого счета. МвШ, 1954, № 6.
Фадеев Д. К., Соминский И. С. [1] Алгебра. М., «Наука», 1964.
Фетисов А. И. [1] О доказательстве в геометрии. М., ГИТТЛ, 1954.
Фомин С. В. [1] Системы счисления. М., «Наука», 1964.
Халмош П. Р. [1] Николай Бурбаки. Сб. «Математическое просвещение», вып. 5. М., 1960.
Хинчин А. Я. [1] Цепные дроби. М., Физматгиз, 1961.
Чеботарев Н. Г. [1] Математическая автобиография. «Успехи математических наук», т. 3, вып. 4. М., 1948.
Чернышев М. А. [1] Устройство, содержание и ремонт пути. М., Трансжелдориздат, 1957.
Четверухин Н. Ф. [1] Методы геометрических построений. М., Учпедгиз, 1952.
Чистяков В. Д. [1] Знаменитые задачи древности. М., Учпедгиз, 1963.
[2] Математические вечера в средней школе. М., Учпедгиз, 1958.

Шварцбурд С. И. [1] О развитии интересов, склонностей и способностей учащихся к математике. МвШ, № 6, 1963.
[2] Системы уравнений. М., Изд-во АПН РСФСР, 1955.
Швецов В. П. [1] Славянская нумерация. МвШ, № 3, 1952.
Шилов Г. Е. [1] Простая гамма. М., Физматгиз, 1963.
[2] Как строить графики. М., Физматгиз, 1959.
Широков В. Ф. [1] Сборник арифметических задач на соображение. М., Учпедгиз, 1949.
Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. [1] Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1—3. М.—Л., ГИТТЛ, 1954.
Штейнгауз Г. [1] Математический калейдоскоп. ГИТТЛ, 1949.
[2] Сто задач. М., Физматгиз, 1959.
Штрайх С. Я. [1] Академик Алексей Николаевич Крылов. М.—Л., Военмориздат, 1955.
[2] Алексей Николаевич Крылов. Его жизнь и деятельность. М.—Л., ГИТТЛ, 1950.
Эрдниев П. М. [1] Сравнение и обобщение при обучении математике. М., Учпедгиз, 1960.
ЭЭМ (Энциклопедия элементарной математики), книги I—V. М.—Л., Физматгиз, 1951—1966.
Юрьев Н. П. [1] Счетная техника. М., 1952.
Юшкевич А. П. [1] История математиков в России до 1917 года. М., «Наука», 1968.
Яглом А. М. и Яглом И. М. [1] Вероятность и информация. М., Физматгиз, 1960.
[2] Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М., ГИТТЛ, 1954.
Яглом И. М. [1] Необыкновенная алгебра. М., «Наука», 1968.
[2] Комплексные числа и их применение в геометрии. М., Физматгиз, 1963.
[3] Что такое теория информации. МвШ, № 3 и 5, 1961.
Яглом И. М. и Болтянский В. Г. [1] Выпуклые фигуры. М.—Л., ГИТТЛ, 1951, § 3.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть II

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЧЕРКИ И ЗАДАЧИ

Марк Беневич Балк,
Галина Давидовна Балк

МАТЕМАТИКА
ПОСЛЕ УРОКОВ

Редактор *И. С. Комиссарова*
Художник *Л. Н. Сивков*
Художественный редактор *Л. Ф. Малышева*
Технический редактор *Л. Я. Медведев*
Корректор *Л. П. Михеева*

Сдано в набор 9/III 1970 г. Подписано к печати 24/V 1971 г. $60\times90^{1}/_{16}$. Бумага типографская № 3. Печ. л. 29,0. Учетн.-изд. л. 28,90. Тираж 150 тыс. экз. (План 1971—№ 77). А-08562.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц на Калининском полиграфкомбинате детской литературы Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Калинин, проспект 50-летия Октября, 46. Заказ № 145.

Цена без переплета 73 коп., переплет 24 коп.